Universidad de Granada

# EXAMEN DE INVESTIGACIÓN OPERATIVA

PROBLEMAS

**1.** Una pequeña empresa tiene una disponibilidad de al menos 5 unidades de materia prima A y como máximo 4 unidades de materia prima B para fabricar tres productos. Además la empresa trabaja como mínimo tres horas diarias. Se necesita una hora de mano de obra para fabricar el primer producto y 3h. de mano de obra para el tercero. Por otra parte se necesitan 1 y 2 unidades de materia prima A para producir una unidad del producto dos y tres, respectivamente. Además es necesario 1 unidad de materia prima B para fabricar cada uno de los productos primero y segundo. Finalmente, se sabe que los costos que proporcionan estos productos son 2, 3 y 9 euros respectivamente. Bajo estas condiciones determinar la cantidad que hay que producir de cada producto para obtener un costo mínimo. Determinar el precio sombra asociado al primer recurso, ¿qué significa?

**2.** En un sistema productivo se elaboran tres productos, $P_1, P_2$ y $P_3$, que pueden procesarse a través de tres procesos diferentes. Los tiempos (en minutos) requeridos por unidad de producto, así como el tiempo disponible en cada proceso y los beneficios unitarios de cada producto son los que se muestran a continuación. Además se muestra cómo debe planificarse la producción diaria para maximizar el beneficio en la tabla óptima.

| Proceso | $P_1$ | $P_2$ | $P_3$ | Tiempo disponible |
|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 1 | 430 |
| 2 | 3 | 0 | 2 | 460 |
| 3 | 1 | 4 | 0 | 420 |
| Benef. | 3 | 2 | 5 | |

TABLA ÓPTIMA

| | 3 | 2 | 5 | 0 | 0 | 0 | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $s_1$ | $s_2$ | $s_3$ | $b_i$ |
| $x_2$ | $-1/4$ | 1 | 0 | $1/2$ | $-1/4$ | 0 | 100 |
| $x_3$ | $3/2$ | 0 | 1 | 0 | $1/2$ | 0 | 230 |
| $s_3$ | 2 | 0 | 0 | $-2$ | 1 | 1 | 20 |

a) Determinar el rango de variación del beneficio asociado al $P_2$ para que la tabla siga siendo óptima. ¿Cuál es la solución si este aumenta 3 unidades?

b) Determinar el rango de variación del tiempo disponible para el primer proceso (primer recurso). Si este recurso disminuye 100 unidades ¿cuál es la solución óptima? ¿Qué tendría que ocurrir para que se produzca $P_1$?

c) Se introduce la siguiente restricción $2x_1 + 3x_2 + x_3 \geq 1000$, ¿cambiaría la solución óptima?

d) Determinar las soluciones del problema para $t \in (-830/4, +\infty)$ sabiendo que el vector $b^0$ está dado por $b^0 = (1, -1, 0)$.

**3.** Actualmente, la State University puede almacenar 200 archivos en disco duro, 50 en la memoria externa y 300 archivos en cinta. Los usuarios quieren almacenar 300 archivos de procesadores de palabras, 100 archivos de paquetes computacionales y 100 archivos de datos. Cuando se llama un archivo, el tiempo que se tarda en recuperar el archivo depende del tipo y del medio de almacenaje como se muestra en la siguiente tabla.

| | Procesador palabras | Paquete de comput. | Datos |
|---|---|---|---|
| Disco duro | 5 | 4 | 4 |
| Memoria | 2 | 1 | 1 |
| Cinta | 10 | 8 | 9 |

a) Determinar el número y tipo de archivos que se almacenan de forma que el tiempo sea mínimo.

b) Formular el problema como un problema de programación lineal.

## SOLUCIONES

**1.** Planteamiento del problema lineal

$$\begin{aligned} \text{Máx } Z &= 2x_1 + 3x_2 + 9x_3 \\ \text{s.a. } x_1 + 3x_3 &\geq 3 \\ x_2 + 2x_3 &\geq 5 \\ x_1 + x_2 &\leq 4 \\ x_i \geq 0,\ i &= 1,2,3. \end{aligned}$$

Solución: $x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = 1$ y $Z = 18$.

**2.** a) Si el beneficio $P_2$ está en $(0,10)$, la solución se mantiene y el valor de la función objetivo es $Z = 1150 + 100c_2$. Si aumenta en 3 unidades, la solución óptima es $x_1 = 0, x_2 = 100, x_3 = 230$ y $Z = 1650$.

b) El rango de variación de $b_1$ es $(230,440)$ para que la tabla permanezca óptima. Si el disminuye 100 unidades, la solución óptima es $x_1 = 0, x_2 = 50, x_3 = 220$ y $Z = 1200$. Tendría que pasar a ser variable básica y para ello $b_1$ no debe pertenecer a $(230,440)$.

c) Si cambiaría, ya que la solución óptima no verifica la restricción.

d)

| Rango | Solución | Función objetivo |
|---|---|---|
| $t \in (\frac{-830}{4}, \frac{-400}{3})$ | $x_1 = 400 - 3t, x_2 = 0, x_3 = 830 + 4t$ | $Z = 2030 - 5t$ |
| $t \in (\frac{-400}{3}, \frac{20}{3})$ | $x_1 = 0, x_2 = 100 + \frac{3}{4}t, x_3 = 230 - \frac{t}{2}$ | $Z = 1350 - t$ |
| $t \in (\frac{20}{3}, 460)$ | $x_1 = 0, x_2 = 105, x_3 = 230 - \frac{t}{2}$ | $Z = 1360 - \frac{5}{2}t$ |
| $t \in (460, +\infty)$ | Infactible | |

**3.** Planteamiento del problema de transporte como un problema lineal

$$\begin{array}{ll}
\text{Mín } Z = 5x_{11} + 4x_{12} + 4x_{13} + 2x_{21} + x_{22} + x_{23} + 10x_{31} + 8x_{32} + 9x_{33} & \\
\text{s.a.} \quad x_{11} + x_{12} + x_{13} \leq 200 & \\
\quad x_{21} + x_{22} + x_{23} \leq 50 & \\
\quad x_{31} + x_{32} + x_{33} \leq 300 & \\
\quad x_{11} + x_{21} + x_{31} \geq 300 & \\
\quad x_{12} + x_{22} + x_{32} \geq 100 & \\
\quad x_{13} + x_{23} + x_{33} \geq 100 & \\
\quad x_{ij} \in \mathbb{Z}^+, \forall i, j &
\end{array}$$

Solución: $x_{11} = 100, x_{12} = 0, x_{13} = 100, x_{21} = 50, x_{22} = 0, x_{23} = 0, x_{31} = 150, x_{32} = 100, x_{33} = 0$ y $Z = 3300$.