

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Convocatoria de septiembre. 10 de septiembre de 2004

[30] **EJERCICIO 1.** Se considera la ecuación lineal

$$(*) \quad x' = Ax + f(t),$$

con $A \in M_N(\mathbb{R})$ y $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ una función continua y T -periódica y se define la aplicación $P : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$ por

$$P(x_0) := e^{AT} \left(x_0 + \int_0^T e^{-As} f(s) ds \right), \quad x_0 \in \mathbb{R}^N.$$

Se pide:

1. Demostrar que una función $x \in C^1(\mathbb{R}; \mathbb{R}^N)$ es una solución T -periódica de $(*)$ si, y sólo si, $x_0 = x(0)$ es un punto fijo de P , esto es, $P(x_0) = x_0$.
2. Sea $\mu := \max\{\operatorname{Re} \lambda : \lambda \in \sigma(A)\}$. Probar que si $\mu < 0$ existe k_0 tal que la iterada $P^k (:= P \circ P \circ \dots \circ P)$ de P es una contracción para $k \geq k_0$. (Sug.: Probar que si $\mu < 0$, $\|e^{ATk}\| < 1$ para k suficientemente grande).
3. Utilizando lo anterior, demostrar que si $\mu < 0$ entonces $(*)$ tiene una única solución T -periódica.

[30] **EJERCICIO 2.** Dado el sistema

$$x' = \begin{pmatrix} t+1 & 2(t-1) \\ 0 & t+1 \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} e^{t^2/2} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Se pide:

1. Calcular una matriz fundamental para el sistema homogéneo asociado.
2. Resolver el sistema completo.
3. Determinar los valores de $\alpha \in \mathbb{R}$ para los que el sistema anterior tiene una **única** solución cumpliendo la siguiente condición de contorno

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} x(-2) + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} x(0) = 0.$$

4. Calcular la o las soluciones del sistema que cumplen la condición del apartado anterior, si existen, para $\alpha = 0$ y $\alpha = 1$.

[20] **EJERCICIO 3.** Determina los valores propios y las funciones propias del problema

$$\begin{cases} x'' + 4x' + (4 + 9\lambda)x = 0, \\ x(0) = x'(1) = 0. \end{cases}$$

[20] **EJERCICIO 4.** Dada $f \in C^1[a, b]$, se considera el funcional

$$\mathcal{F}[y] := \int_a^b f(x)(1 + (y'(x))^2) dx,$$

definido en $C_0^1[a, b]$. Se pide:

1. Determinar la ecuación de Euler-Lagrange y las condiciones de contorno asociadas a este funcional.
2. Demostrar que si $0 < a < b$ y $f(x) = x$, el funcional anterior tiene un único mínimo global y calcularlo.