

UNIVERSIDAD DE GRANADA
Ecuaciones Diferenciales
Primer examen parcial. 8 de julio de 2008

[50] **EJERCICIO 1.**

Resuelve razonadamente las siguientes cuestiones:

- (i) La función $x(t) = t$ es una solución del siguiente PVI:

$$x' = (x - t)^{2/3} + 1, \quad x(1) = 1. \quad (1)$$

Encuentra el PVI que satisface $u(t) = x(t) - t$ y resuélvelo.

- (ii) Suponiendo que $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ son funciones diferenciables, demuestra que

$$W[fg, fh](t) = f^2(t)W[g, h](t),$$

donde $W[a, b](t)$ denota el Wronskiano de las funciones $a(t)$ y $b(t)$.

- (iii) Encuentra una ecuación diferencial lineal y homogénea con coeficientes constantes del menor orden posible que tenga por soluciones $x_1(t) = \cos(2t)$ y $x_2(t) = te^{3t}$.
- (iv) Discute si las gráficas de dos soluciones de la ecuación diferencial lineal $x'(t) + 2x(t) = 0$ pueden o no cortarse o tocarse en un punto. Justifica la respuesta.
- (v) Resuelve la ecuación $y(t) = e^t \cos(t) + \int_0^t y(u) du$.
- (vi) Calcula, si es posible, $\lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$, siendo $x(t)$ la solución del PVI

$$x' = \frac{x(x-2)}{t+3}, \quad x(0) = x_0 \in \mathbb{R}.$$

en cada uno de los siguientes casos: $x_0 = 0$, $x_0 = 1$, $x_0 = 2$, $x_0 = 3$.

- (vii) Estudia el número de ceros de las soluciones de la ecuación diferencial

$$x'' + (a + \cos(t))x = 0,$$

siendo $|a| > 1$.

[30] **EJERCICIO 2.**

Considera la matriz de coeficientes constantes

$$A = \begin{pmatrix} 0 & a \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

1. Estudia el comportamiento asintótico de la ecuación $x' = Ax$ en términos de los parámetros a y b .
2. Estudia, en función del parámetro $a > 0$, la existencia y el número de soluciones 2π -periódicas de la ecuación

$$x'(t) = \begin{pmatrix} 0 & a^2 \\ -a^2 & 0 \end{pmatrix} x(t) + \begin{pmatrix} 0 \\ \sin(3t) \end{pmatrix}.$$

[20] **EJERCICIO 3.** Se considera el sistema lineal $x' = Ax + B(t)x$, siendo $B \in C((\alpha, +\infty), \mathcal{M}_N(\mathbb{R}))$ tal que $\int_{\beta}^{\infty} \|B(t)\| dt < +\infty$, con $\beta > \alpha$. Prueba que si el sistema $x' = Ax$ es acotado, entonces el sistema $x' = Ax + B(t)x$ también lo es.