

## FUNDAMENTOS DE BIOLOGÍA APLICADA I - (LDO. EN BIOLOGÍA. CUARTO CURSO)

*Módulo de Matemáticas. Relación de ejercicios N° 1. Curso 2009-2010.*

1. Considera la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = ax_n(b - x_n)$$

donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  son parámetros reales. Determina los valores de estos parámetros para que se satisfaga cada una de las siguientes situaciones:

- a)  $\{1, 2, 3, \dots\}$  es una solución.
- b)  $\{1, 1, 1, 1, \dots\}$  es una solución estable asintóticamente.
- c)  $\{3, 1, 3, 1, \dots\}$  es un 2-ciclo.

2. Determina, justificadamente, si las siguientes sucesiones pueden ser solución de una ecuación en diferencias:

- a)  $\{1, 2, 4, 7, \dots\}$ .
- b)  $\{1, 2, 3, 1, 4, \dots\}$ .
- c)  $\{3, 1, 2, 4, 6, 3, 1, 2, 4, 6, \dots\}$ .

3. La dinámica de una determinada especie responde a la siguiente ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = 2x_n e^{1-x_n}.$$

Responde, de forma justificada, a las siguientes cuestiones:

- a) ¿Cuáles son los puntos fijos?
- b) ¿Cómo son los puntos fijos con respecto a la estabilidad?

4. Considera la ecuación en diferencias

$$P_{n+1} = P_n e^{P_n - 2}.$$

- a) Calcula las soluciones constantes de la ecuación.
- b) Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones calculadas en el apartado anterior.

5. Considera la familia de ecuaciones en diferencias

$$x_{n+1} = (\lambda - x_n)x_n$$

donde  $\lambda$  es un parámetro real.

- a) Para cada valor de  $\lambda$ , ¿cuáles son los puntos fijos?
- b) Para cada valor de  $\lambda$ , ¿cómo son los puntos fijos con respecto a la estabilidad?
- c) Realiza un estudio gráfico de la estabilidad cuando el valor absoluto de la derivada sea igual a 1.

6. Repite el ejercicio anterior para la ecuación en diferencias

$$x_{n+1} = \lambda(1 - x_n)x_n.$$

7. Para una cierta especie se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad vienen dadas por

$$f(P) = \frac{1}{2} \quad y \quad m(P) = 1 - \frac{1}{1+P}$$

respectivamente.

- a) Determina la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población.
  - b) Calcula las soluciones constantes de la ecuación en diferencias obtenida.
  - c) Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.
  - d) Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.
8. Para una determinada especie de gamos se considera que  $P$  es la proporción de individuos que como máximo pueden pertenecer a un hábitat concreto (esto es,  $P = 0$  indica que no hay gamos,  $P = 1$  indica que no caben más gamos). Además, se ha comprobado que las tasas de fertilidad y mortalidad son, respectivamente, las siguientes:

$$f(P) = \frac{3a}{8}(1 - P) \quad y \quad m(P) = 1 - \frac{a}{8} + \frac{a}{8}P,$$

siendo  $a$  un número real comprendido entre 2 y 6.

- a) Comprueba, de manera justificada, que la ecuación en diferencias que rige la dinámica de dicha población viene dada por la expresión:

$$P_{n+1} = \frac{a}{2}P_n(1 - P_n).$$

- b) Calcula las soluciones constantes de la ecuación en diferencias obtenida.
- c) Estudia la estabilidad de los puntos fijos asociados a las soluciones constantes calculadas en el apartado anterior.
- d) Haz alguna interpretación sobre el comportamiento de la especie a largo plazo a partir de los resultados obtenidos en los apartados anteriores.

9. Se considera la serie de pesos (expresada en kilos)

$$p_{37} = 1'35; \quad p_{38} = 2'90; \quad p_{39} = 1'74; \quad p_{40} = 3'06; \quad p_{41} = 1'35.$$

que se ajusta a una ecuación en diferencias del tipo

$$x_{n+1} = x_n(a - x_n)$$

donde  $a$  es un parámetro por determinar.

- a) Estima el valor de  $a$  (con precisión de un decimal).
- b) Determina los puntos fijos para la ecuación en diferencias dada.
- c) Estudia la estabilidad de los puntos fijos.