

Capítulo 6

Producto escalar. Bases ortonormales. Producto vectorial y producto mixto.

◆ DEFINICIÓN DE PRODUCTO ESCALAR

Dados dos vectores $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ de $\mathbb{R}^n$ definimos su producto escalar denotado por $x \cdot y$ como

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

Propiedades del producto escalar

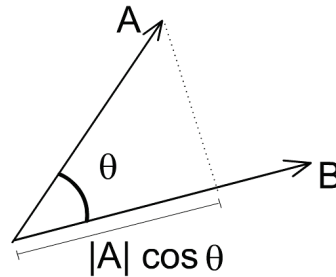
Es inmediato comprobar que el producto escalar satisface las siguientes propiedades:

1. $x \cdot y = y \cdot x$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ (propiedad conmutativa),
2. $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$ para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}^n$,
3. $(\lambda x) \cdot y = \lambda(x \cdot y) = x \cdot (\lambda y)$ para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$ y $\lambda \in \mathbb{R}$,
4. $x \cdot x \geq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$ (definido positivo)
5. $x \cdot y = |x||y| \cos \angle(x, y)$, para cualesquiera $x, y \in \mathbb{R}^n$, donde $\angle(x, y)$ es el ángulo que forman los vectores x e y , mientras que $|x|$ es el módulo o longitud del vector y está dado por $|x| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$.
6. $|x| = \sqrt{x \cdot x}$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Observemos que directamente de las propiedades 1, 2 y 3 se deduce también lo siguiente para cualesquiera $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z) \quad \text{y} \quad x \cdot (\alpha y + \beta z) = \alpha(x \cdot y) + \beta(x \cdot z).$$

Figura 6.1: Interpretación geométrica del producto escalar



Vectores ortogonales

Diremos que dos vectores x e y de $\mathbb{R}^n$ son ortogonales cuando su producto escalar es cero, esto es, $x \cdot y = 0$. A partir de la propiedad 5, podemos deducir que dos vectores son ortogonales cuando forman un ángulo recto.

Definición de base ortonormal

En dimensión arbitraria, diremos que una base $B = \{u_1, u_2, \dots, u_p\}$ de un subespacio V de $\mathbb{R}^n$ es *ortonormal* cuando sus elementos son ortogonales dos a dos y el módulo de cada uno de los vectores es 1.

Método de ortonormalización de Gram-Schmidt

Dada una base cualquiera, hay un procedimiento para obtener a partir de dicha base, una base ortonormal llamado *método de ortonormalización de Gram-Schmidt*. En el presente curso lo ilustraremos para mayor claridad solamente en dimensión 2. Dada una base $B = \{v_1, v_2\}$ de un subespacio V de $\mathbb{R}^n$, definamos

$$u = v_2 - \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_1} v_1,$$

entonces la base ortonormal se obtiene como $B' = \{u_1, u_2\}$, donde $u_1 = v_1/|v_1|$ y $u_2 = u/|u|$. Por ejemplo, si queremos calcular una base ortonormal del subespacio $V = \langle (1, 1, 1), (0, 1, 1) \rangle$, entonces

$$u = (0, 1, 1) - \frac{(1, 1, 1) \cdot (0, 1, 1)}{(1, 1, 1) \cdot (1, 1, 1)} (1, 1, 1) = (0, 1, 1) - \frac{2}{3} (1, 1, 1) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Además $|(1, 1, 1)| = \sqrt{3}$ y $\left|(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})\right| = \sqrt{6}/3$ y por tanto

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

y

$$u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Puedes comprobar como ejercicio que efectivamente $\{u_1, u_2\}$ es una base ortonormal.

Ángulo entre dos vectores

El producto escalar nos proporciona un método para calcular el ángulo que forman dos vectores arbitrarios. Dados dos vectores $v, w \in \mathbb{R}^n$, usando la propiedad 5 deducimos que

$$\angle(v, w) = \arccos \frac{v \cdot w}{|v||w|}$$

Complemento ortogonal

Dado un vector $w \in \mathbb{R}^n$ definimos su complemento ortogonal $\{w\}^\perp$ como el conjunto de los vectores $v \in \mathbb{R}^n$ tales que $v \cdot w = 0$ (es decir, es el conjunto formado por todos los vectores perpendiculares a w). El complemento ortogonal es siempre un subespacio de $\mathbb{R}^n$. En $\mathbb{R}^3$ es justamente el plano que es perpendicular a dicho vector.

En general, si U es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ diremos que un vector v es perpendicular a U si v es perpendicular a todos los vectores de U . Al subespacio vectorial formado por todos los vectores perpendiculares a U le llamaremos complemento ortogonal o subespacio ortogonal de U y lo representaremos mediante $U^\perp$.

Llegados a este punto, podemos reinterpretar el significado de las ecuaciones implícitas que definen a un subespacio vectorial. Por ejemplo, observemos que:

$$U = \left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{cccc} 2x & +y & -z & +3t = 0 \\ x & & +2z & +t = 0 \end{array} \right\} =$$
$$\left\{ (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} (2, 1, -1, 3) \cdot (x, y, z, t) = 0 \\ (1, 0, 2, 1) \cdot (x, y, z, t) = 0 \end{array} \right\},$$

es decir, U está formado por los vectores que son perpendiculares a la vez a $(2, 1, -1, 3)$ y a $(1, 0, 2, 1)$.

◆ PRODUCTO VECTORIAL Y PRODUCTO MIXTO

Definición de producto vectorial

Dados dos vectores $v = (v_1, v_2, v_3)$ y $w = (w_1, w_2, w_3)$ en $\mathbb{R}^3$ podemos definir su producto vectorial $v \wedge w$ como

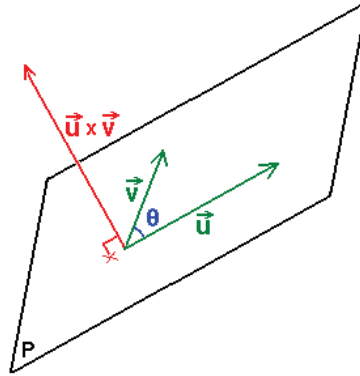
$$v \wedge w = \left(\begin{vmatrix} v_2 & v_3 \\ w_2 & w_3 \end{vmatrix}, - \begin{vmatrix} v_1 & v_3 \\ w_1 & w_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} v_1 & v_2 \\ w_1 & w_2 \end{vmatrix} \right) = (v_2 w_3 - v_3 w_2, v_3 w_1 - v_1 w_3, v_1 w_2 - v_2 w_1).$$

Otra forma de obtenerlo es calculando

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix}.$$

Entonces el coeficiente de i coincide con la primera coordenada de $v \wedge w$, el coeficiente de j con la segunda y el coeficiente de k con la tercera.

Figura 6.2: Representación del producto vectorial



Propiedades del producto vectorial

El producto vectorial $v \wedge w$ está determinado por las siguientes propiedades:

1. es ortogonal a v y w ,
2. su módulo es igual al área del paralelogramo que determinan v y w , esto es, $|v \wedge w| = |v| \cdot |w| \cdot \sin \angle(v, w)$,
3. el sentido se puede obtener mediante “la regla del sacacorchos” o “de los tres dedos”.
4. $w \wedge v = -v \wedge w$.

Además el producto vectorial es lineal en ambas componentes, esto es, para cualesquiera $v, w, z \in \mathbb{R}^n$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$:

$$(\alpha v + \beta w) \wedge z = \alpha v \wedge z + \beta w \wedge z \quad \text{y} \quad v \wedge (\alpha w + \beta z) = \alpha v \wedge w + \beta v \wedge z.$$

Observemos que el área del paralelogramo determinado por los dos vectores v y w viene dada por

$$\text{Área del paralelogramo} = |v| \cdot h,$$

donde h es la altura del paralelogramo y es igual a $\sin \angle(v, w)|w|$. Por tanto, $A = |v||w| \sin \angle(v, w)$.

Definición de producto mixto

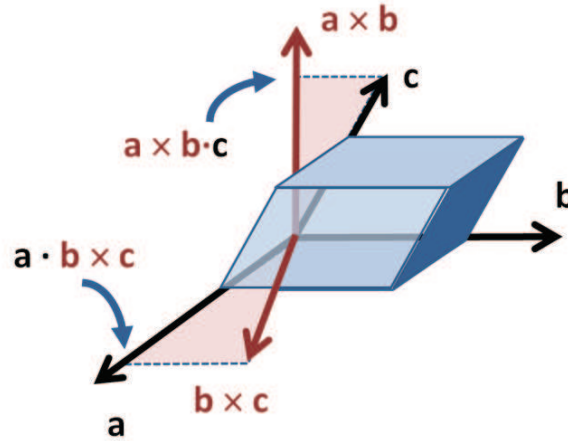
Dados tres vectores de $\mathbb{R}^n$, $v = (v_1, v_2, v_3)$, $w = (w_1, w_2, w_3)$ y $z = (z_1, z_2, z_3)$, podemos hacer el producto vectorial de dos de ellos y después el producto escalar por el otro. Esto es lo que llamamos el *producto mixto* $[v, w, z]$. En concreto,

$$[v, w, z] = \langle v, w \wedge z \rangle.$$

Se puede comprobar fácilmente que

$$[v, w, z] = \begin{vmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Figura 6.3: Paralelepípedo (la notación del dibujo difiere de la seguida en este curso, $\times$ indica el producto vectorial y $\cdot$ el producto escalar)



La comprobación de dicha igualdad se propone como ejercicio.

Cálculo del volumen del paralelepípedo

Como ya hemos visto el módulo del producto vectorial coincide con el área del paralelogramo determinado por los vectores. El volumen del paralelepípedo determinado por tres vectores $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ es igual al área del paralelogramo determinado por dos de ellos multiplicada por la altura correspondiente (véase figura 6.3):

$$\text{Volumen paralelepípedo} = (\text{Área de la base}) \times (\text{Altura } h).$$

Puesto que el área del paralelogramo es el producto vectorial de a y b y el producto vectorial es ortogonal al plano determinado por a y b , la altura correspondiente será igual a

$$h = |c| |\cos \angle(a \wedge b, c)|.$$

¹ Por tanto, el volumen del paralelepípedo es igual a $|a \wedge b| \cdot |c| |\cos \angle(a \wedge b, c)| = |\langle a \wedge b, c \rangle|$:

$$\text{Volumen paralelepípedo determinado por } a, b, c = |[a, b, c]|.$$

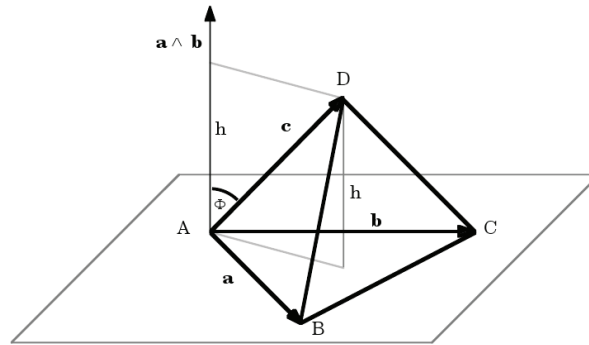
Cálculo del volumen del tetraedro

Acabaremos obteniendo el volumen del tetraedro determinado por tres vectores $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ (véase figura 6.4). Sabemos que dicho volumen es igual a un tercio del área de la base por la altura correspondiente. Esto es:

$$\text{Volumen tetraedro} = \frac{1}{3} (\text{Área de la base}) \cdot (\text{Altura}).$$

¹ Observemos que el signo de $\cos \angle(a \wedge b, c)$ será positivo o negativo dependiendo de que $a \wedge b$ y c estén en el mismo lado del plano determinado por la base o no.

Figura 6.4: Tetraedro irregular



Razonando como con el paralelepípedo se obtiene que

$$\text{Volumen del tetraedro} = \frac{1}{6}[a, b, c].$$

Como ejemplo, podemos calcular el volumen del tetraedro determinado por los puntos $P = (0, 0, 0)$, $Q = (1, 0, 0)$, $R = (0, 1, 2)$ y $S = (0, 0, 2)$. Dicho tetraedro está determinado por los vectores $\{\vec{PQ} = (1, 0, 0), \vec{PR} = (0, 1, 2), \vec{PS} = (0, 0, 2)\}$ y por tanto su volumen es igual a

$$\frac{1}{6} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}.$$

♦ EJERCICIOS

1. Se consideran los vectores $u = (1, 2, 3)$, $v = (2, -1, 4)$ y $w = (-1, -2, -3)$. Calcula el producto escalar $u \cdot v$, los módulos $|v|$, $|w|$, y el complemento ortogonal de w .
2. Determina los valores de a para los que el vector $v = (a, 2, 3)$ es perpendicular a $w = (2, -3, 5)$. Calcula el complemento ortogonal de w .
3. ¿Existe algún vector en el espacio que sea perpendicular a sí mismo? ¿Qué se puede decir sobre un vector de $\mathbb{R}^3$ que es perpendicular a todos los demás?
4. Considera la familia de vectores de $\mathbb{R}^3$ dada por $B = \{u_1, u_2, u_3\}$, donde:

$$u_1 = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right), u_2 = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), u_3 = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right).$$

Comprueba que B es una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Calcula las coordenadas del vector $v = (2, 3, 6)$ en la base B .

5. Obtener una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$ a partir del vector $v = (1, -2, 3)$. Calcular las coordenadas del vector $(1, 1, \sqrt{7})$ en la base obtenida.
6. Demostrar que dos vectores perpendiculares y no nulos son siempre linealmente independientes.
7. Demostrar que si u y v son dos vectores entonces $|u \times v|$ coincide con el área del paralelogramo determinado por u y v . Aplicar ésto para calcular el área del paralelogramo determinado por $u = (2, 1, 5)$ y $v = (3, 2, 1)$.
8. Calcula una base ortonormal de los subespacios generados por los vectores

(I) $\{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$	(III) $\{(4, 1, 0), (1, 0, 1)\}$
(II) $\{(0, 1, 2), (1, 3, 1)\}$	
9. Calcula el volumen del paralelepípedo determinado por los vectores $u = (1, 1, 0)$, $v = (0, 1, 0)$ y $w = (0, 1, 1)$.
10. Calcula el volumen del tetraedro que tiene por vértices los puntos $P = (0, 1, 0)$, $Q = (1, 1, 0)$, $R = (1, 2, 3)$ y $S = (4, 2, 1)$.
11. Halla el valor de x para que el tetraedro que tiene por vértices los puntos $P = (x, 2, 0)$, $Q = (0, 2, x)$, $R = (2, 0, 1)$ y $S = (x, 2, 1)$ tenga volumen igual a 1.
12. Halla un vector que sea ortogonal a los vectores $u = (1, 2, 4)$ y $v = (2, 1, 0)$ y tenga módulo unitario.
13. Calcula el valor de x para que el paralelogramo determinado por los vectores $(1, 1/2, 0)$ y $(x, 1, 1/3)$ tenga área unidad.
14. Calcula el coseno y el seno de los ángulos del triángulo determinado por los puntos

(I) $P = (0, 0, 1)$, $Q = (1, 0, 1)$ y $R = (2, 0, 1)$	
(II) $P = (1, 0, 0)$, $Q = (0, 0, 1)$ y $R = (0, 1, 1)$	
(III) $P = (2, 2, 0)$, $Q = (0, -1, 1)$ y $R = (0, 0, 0)$	