

Capítulo 4

Matrices, determinantes y sistemas de ecuaciones lineales

♦ DEFINICIÓN DE MATRIZ DE NÚMEROS REALES

Una matriz de números reales de tamaño $m \times n$ es un conjunto ordenado por filas y columnas de números reales de tal modo que a cada lugar determinado por el número de fila i y de columna j se le asigna un número a_{ij} . Se representa como

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Para expresar la matriz de forma reducida escribiremos $A = (a_{ij})$.

Tipos de matrices

- Una matriz que esté formada por una sola columna, se llama VECTOR COLUMNA. Análogamente, una matriz formada por una única fila se llama VECTOR FILA.
- Si A es una matriz $m \times n$, su MATRIZ TRASPUESTA es una matriz $n \times m$ cuyas filas son las columnas de A . Se representa por A^t . Por ejemplo, si

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 9 & 6 \\ 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

la matriz A^t sería:

$$A^t = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 9 & 1 \\ 6 & 4 \end{pmatrix}.$$

- Una MATRIZ CUADRADA es aquélla que tiene igual número de filas que de columnas. En este caso, se llama DIAGONAL PRINCIPAL a la diagonal formada por todos los elementos a_{ii} .
 1. Una matriz cuadrada se dice DIAGONAL si todos los elementos fuera de la diagonal principal son iguales a cero.
 2. Una matriz cuadrada se dice TRIANGULAR SUPERIOR si todos los elementos por debajo de la diagonal principal son iguales a cero.
 3. Una matriz cuadrada se dice TRIANGULAR INFERIOR si todos los elementos por encima de la diagonal principal son iguales a cero.

Por ejemplo, de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} \underline{2} & 0 & 0 \\ 3 & \underline{1} & 0 \\ 6 & 4 & \underline{7} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

todas son cuadradas, A es triangular inferior y B es diagonal. Los elementos de la diagonal principal de A vienen subrayados.

◆ OPERACIONES CON MATRICES

Suma de matrices y producto por un número real

La operación suma solo se puede efectuar entre matrices con el mismo número de filas y columnas y es la operación más sencilla, basta sumar los coeficientes de la matriz término a término, esto es, si tenemos dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, entonces $C = A + B$ se define como $C = (c_{ij})$, donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Por ejemplo,

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

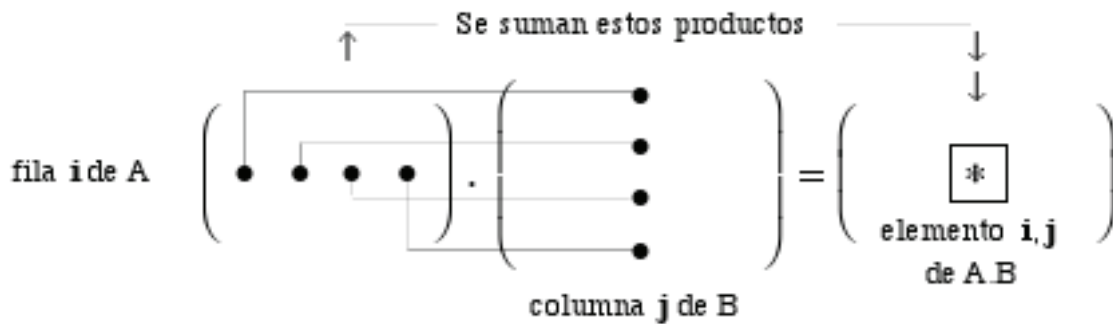
El producto de un número real λ por una matriz $A = (a_{ij})$ se define como una matriz $B = (b_{ij}) = \lambda \cdot A$ del mismo orden que A dada por los elementos de A multiplicados por λ , esto es, $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Veamos un ejemplo particular:

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 12 & 9 \\ 0 & 6 & 3 \\ 3 & 9 & 0 \end{pmatrix}.$$

Producto de matrices

La operación característica de las matrices es el producto. Para poder definir el producto de dos matrices A y B , la primera matriz tiene que tener el mismo número de columnas que filas

Figura 4.1: Producto de matrices



tiene la segunda. Supongamos que A tiene orden $m \times n$ y B tiene orden $n \times p$. Entonces la matriz producto $C = (c_{ij}) = A \cdot B$ es una matriz de orden $m \times p$ y está dada por

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i3}b_{3j} + \cdots + a_{in}b_{nj}.$$

Dicha cantidad se obtiene multiplicando los elementos de la fila i -ésima por los correspondientes elementos de la columna j -ésima y sumándolos (véase Figura 4.1).

Es importante observar que el producto de matrices no es conmutativo, pero sí verifica las propiedades asociativa y distributiva, esto es, dadas tres matrices A , B y C , entonces

- $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$,
- $A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C$,
- $(A + B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C$,

siempre que las matrices tengan tamaños de manera que se puedan efectuar las operaciones.

Matriz identidad

Cuando consideramos matrices cuadradas de orden n hay una matriz que denotamos por I_n que tiene las mismas propiedades con respecto al producto que el elemento unidad en los números reales, es decir $A \cdot I_n = I_n \cdot A = A$. Esta matriz es una matriz diagonal que está compuesta por unos en la diagonal y ceros en el resto de coeficientes:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

◆ DETERMINANTES

El determinante de una matriz cuadrada **es un número real** cuya definición exacta es bastante complicada. Por ello, definiremos primero el determinante de matrices pequeñas, y estudiaremos métodos y técnicas para calcular determinantes en general. **Solamente se puede calcular el determinante a matrices cuadradas.**

En cuanto a la notación, a veces el determinante se escribe con la palabra *det*, y otras veces se indica sustituyendo los paréntesis de la matriz por barras verticales.

- El determinante de una matriz 1×1 es: $\det(a) = a$.

- El determinante de una matriz 2×2 es:

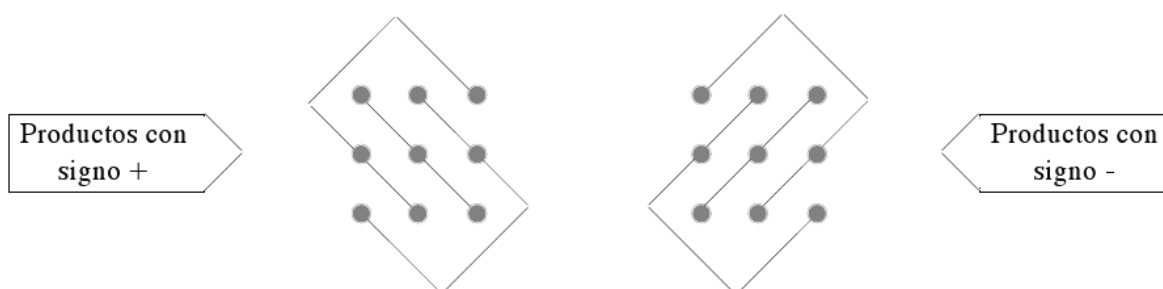
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

- El determinante de una matriz 3×3 es:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

La fórmula anterior se conoce como *Regla de Sarrus*.

Figura 4.2: Regla de Sarrus



- Veamos ahora como calcular el determinante de una matriz cuadrada cualquiera. Para ello, necesitamos antes el concepto de menor adjunto de una matriz. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada. Dado un par de índices (i, j) representamos por A_{ij} a la matriz que resulta al eliminar la i -ésima fila y la j -ésima columna de A . El MENOR ADJUNTO δ_{ij} de A es el número real dado por:

$$\delta_{ij} = (-1)^{i+j} |A_{ij}|.$$

El signo $(-1)^{i+j}$ en la definición anterior se suele recordar mediante la regla:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix}$$

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz cuadrada de orden n . Entonces su DETERMINANTE se puede calcular mediante el *desarrollo de Laplace* por una fila cualquiera (o columna), de la siguiente forma:

1. Si elegimos la i -ésima fila, $|A| = a_{i1} \delta_{i1} + \dots + a_{in} \delta_{in}$.
2. Si elegimos la j -ésima columna, $|A| = a_{1j} \delta_{1j} + \dots + a_{nj} \delta_{nj}$.

Propiedades de los determinantes

Veamos cuales son las propiedades básicas que verifican los determinantes:

1. El valor del determinante no cambia cuando se intercambian filas por columnas. Es decir, $|A| = |A^t|$.
2. Si todos los elementos de una fila son cero, entonces el valor del determinante es cero.
3. Si intercambiamos dos filas o dos columnas el valor del determinante cambia de signo.
4. Si hay dos filas o columnas que son iguales, entonces el determinante es cero.
5. Si se multiplican todos los elementos de una fila o una columna por k , el valor del determinante también se multiplica por dicho número.
6. El valor del determinante no se modifica si se le suma a una fila otra fila multiplicada por un escalar (lo mismo vale para columnas).
7. Si una fila es combinación lineal de otras, entonces el valor del determinante es cero.
8. El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes, esto es, $|A \cdot B| = |A| \cdot |B|$.

Observemos que las propiedades de los determinantes pueden ser muy útiles a la hora de calcular efectivamente el determinante. Por ejemplo aplicando la propiedad 6 podemos hacer ceros debajo del primer coeficiente y después desarrollar el determinante por la primera columna, reduciendo así el determinante a otro de un orden menor.

♦ RANGO DE UNA MATRIZ

Menor de orden r de una matriz

Llamamos menor de orden r de una matriz al determinante de una matriz cuadrada obtenida al fijar r filas y r columnas. Esto es, si fijamos las filas $i_1, \dots, i_r$ y las columnas $j_1, \dots, j_r$, entonces el menor viene dado por

$$\begin{vmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \cdots & a_{i_1 j_r} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \cdots & a_{i_2 j_r} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{i_r j_1} & a_{i_r j_2} & \cdots & a_{i_r j_r} \end{vmatrix}.$$

Definimos el *rango de una matriz* A que representaremos mediante $\text{rg}(A)$ como el máximo orden de menores no nulos. Por tanto, si A es una matriz de orden $m \times n$, entonces $\text{rg}(A) \leq \min\{m, n\}$.

Luego para calcular el rango de una matriz A de orden $m \times n$ hemos de actuar de la siguiente forma:

Supongamos que $k = \min\{m, n\}$. Para ver si $\text{rg}(A) = k$, buscamos una submatriz cuadrada de A de orden $k \times k$ con determinante distinto de cero. Si encontramos alguna, entonces $\text{rg}(A) = k$. En caso contrario, $\text{rg}(A) \leq k - 1$. Para ver si el rango es $k - 1$, buscamos submatrices cuadradas de orden $(k - 1) \times (k - 1)$ con determinante distinto de cero y si existe alguna entonces $\text{rg}(A) = k - 1$. En caso contrario, $\text{rg}(A) \leq k - 2$ y así sucesivamente hasta calcular el rango de A .

Veamos como ejemplo, como calcular el rango de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Como A es una matriz de orden 3×3 , entonces el rango de A es como máximo 3. Para que sea 3, hemos de encontrar una submatriz cuadrada de A de orden 3×3 con determinante distinto de cero. En este caso, la única submatriz cuadrada 3×3 es la propia matriz A , y como $|A| = 0$, entonces concluimos que $\text{rg}(A) \leq 2$. Para comprobar si es 2 buscamos una submatriz cuadrada de A de orden 2×2 con determinante distinto de cero. En efecto,

$$\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2,$$

y por tanto $\text{rg}(A) = 2$.

♦ MÉTODO DE GAUSS

El método de Gauss es otra herramienta que nos permite calcular el rango de una matriz. Empecemos dando algunas definiciones:

Sea A una matriz y F una fila de A . Diremos que F es nula si todos los números de F coinciden con el cero. Si F es no nula, llamamos PIVOTE de F al primer número distinto de cero de F contando de izquierda a derecha.

Una MATRIZ ESCALONADA es aquella que verifica las siguientes propiedades:

1. Todas las filas nulas (caso de existir) se encuentran en la parte inferior de la matriz.
2. El pivote de cada fila no nula se encuentra estrictamente más a la derecha que el pivote de la fila de encima.

Por ejemplo, entre las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 8 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

A no es escalonada, mientras que B y C sí lo son.

Dada una matriz escalonada E es fácil ver que el rango de E coincide con el número de filas no nulas de E .

En los ejemplos B y C de arriba se tiene $\text{rg}(B) = \text{rg}(C) = 2$, sin embargo no podemos decir que $\text{rg}(A) = 3$ ya que A no está escalonada. Otro ejemplo, las matrices nulas tienen rango cero y la matriz identidad de orden n cumple $\text{rg}(I_n) = n$.

El método de Gauss consiste en calcular el rango de una matriz usando transformaciones que no alteran el rango. Dichas transformaciones son las siguientes:

1. Se altera el orden de las filas o las columnas.
2. Se elimina una fila (o columna) que sea combinación de las otras.
3. Se multiplica una fila por un número distinto de cero.
4. Se suma a una fila (o a una columna) una combinación lineal de otras.

Básicamente tenemos que conseguir transformar una matriz cualquiera A en una matriz escalonada E usando las transformaciones anteriores. Una vez que tengamos la matriz escalonada, el rango de la matriz inicial A coincidirá con el rango de la matriz escalonada E , es decir, con el número de filas no nulas de la matriz escalonada.

Para encontrar a partir de la matriz A una matriz escalonada, procedemos de la siguiente forma. Primero intercambiamos las columnas en caso de que sea necesario para que el elemento a_{11} sea distinto de cero y después restamos la primera fila multiplicada por a_{j1}/a_{11} a cada una de las otras. Después procederemos del mismo modo con a_{22} y las filas que están por debajo. Si a_{22} y los elementos que hay debajo de él fuesen cero, entonces procederíamos con a_{23} y así sucesivamente. Veamos un ejemplo. Vamos a aplicar el método de Gauss a la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

En primer lugar intercambiamos la primera y la segunda fila para tener un 1 como pivote en el lugar a_{11} (y así facilitar los cálculos):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 2 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 6 \end{pmatrix};$$

ahora restamos a la segunda fila dos veces la primera, y a la tercera, tres veces la primera, con el fin de hacer ceros debajo del elemento a_{11} . Obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -7 \\ 0 & -4 & -9 \end{pmatrix}.$$

Como en el segundo elemento de la diagonal nos ha salido un cero, tenemos que intercambiar las filas segunda y tercera para tener un pivote (observemos que de haber obtenido un cero también en a_{32} tendríamos que haber elegido un pivote en la siguiente columna y continuar con el método):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & -9 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Y ya hemos acabado, pues hemos obtenido una matriz escalonada con tres filas no nulas. Por tanto rango de la matriz inicial es 3.

♦ INVERSA DE UNA MATRIZ

Recordemos que hemos denotado por I_n la matriz identidad de orden n . Definimos la inversa de una matriz cuadrada A como una matriz que denotamos por A^{-1} y verifica

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n.$$

Existencia de la inversa

Una matriz cuadrada A admite inversa si y sólo si el determinante de A es distinto de cero. En tal caso la inversa es igual a

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(A_{ji}) = \frac{1}{|A|}(A_{ij})^t,$$

donde recordemos que A_{ij} es el adjunto del término a_{ij} .

♦ SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Definiciones

Llamamos sistema de ecuaciones lineales (SEL) a un conjunto de m ecuaciones de primer grado que dependen de n variables:

$$\left. \begin{array}{cccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & a_{m3}x_3 & + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{array} \right\}$$

Asociaremos a cada sistema de ecuaciones lineales dos matrices. La *matriz de coeficientes* que denotamos por A y la matriz ampliada A^* que incluye también los términos independientes:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}; \quad A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Si además denotamos $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$, es fácil comprobar que el sistema de ecua-

ciones es equivalente a la ecuación matricial $A \cdot X = B$. Una *solución* del sistema es una n -upla de números $(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ tales que al sustituir x_i por α_i en el sistema, obtenemos que se verifican todas las igualdades.

Los sistemas de ecuaciones lineales se clasifican atendiendo a la cantidad de soluciones que tienen. Un SEL se dice INCOMPATIBLE (SI) si no admite ninguna solución. Si admite soluciones se dice COMPATIBLE (SC). Un sistema compatible puede ser:

1. SISTEMA COMPATIBLE DETERMINADO (SCD) si admite una única solución.
2. SISTEMA COMPATIBLE INDETERMINADO (SCI) si admite más de una solución.

Discutir un SEL consiste en decidir de qué tipo es según la clasificación anterior. Resolver un SEL consiste en calcular todas las soluciones del SEL si las hay.

La principal herramienta que usaremos para discutir un SEL sin necesidad de resolverlo es el siguiente resultado:

Teorema (Rouché-Frobenius). *Supongamos que tenemos un SEL con matriz de coeficientes A y matriz ampliada A^* . Entonces:*

1. Si $\text{rg}(A) \neq \text{rg}(A^*)$, entonces tenemos un sistema incompatible.
2. Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$ y es igual al número de incógnitas, entonces tenemos un sistema compatible determinado.
3. Si $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^*)$ y es menor que el número de incógnitas, entonces tenemos un sistema compatible indeterminado cuyas soluciones dependerán de $m - \text{rg}(A)$ parámetros reales.

Sistemas homogéneos

Los *sistemas homogéneos* son aquellos en los que los términos independientes son cero. Una consecuencia inmediata del teorema de Rouché-Frobenius es que los sistemas homogéneos son siempre compatibles.

♦ MÉTODOS PARA RESOLVER UN SEL

Para resolver un SEL, estudiaremos dos herramientas distintas: el método de Gauss y la regla de Cramer.

Método de Gauss

Dos sistemas se dicen *equivalentes* cuando tienen el mismo conjunto de soluciones. Se obtienen sistemas equivalentes cuando:

1. Se altera el orden de las ecuaciones
2. Se elimina una ecuación que sea combinación lineal de las otras
3. Se sustituye una ecuación por otra que resulta de multiplicarla por un número distinto de cero
4. Se sustituye una ecuación por otra que resulta de sumarle una combinación lineal de otras ecuaciones.

El método de Gauss es igual al que vimos para calcular el rango de una matriz. Consiste en obtener un sistema de ecuaciones lineales equivalente al inicial cuya matriz ampliada sea una matriz escalonada. A estos SEL se les llama escalonados y se resuelven fácilmente de abajo hacia arriba.

A modo de ejemplo, apliquemos el método de Gauss al siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & + & y & + & 2z & = & 1 \\ 4x & + & 7y & - & 7z & = & 7 \\ 2x & + & 3y & - & z & = & 3 \end{array} \right\},$$

Para ello escribimos sólo la matriz ampliada (separando con una línea la de coeficientes):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & -7 & 7 \\ 2 & 3 & -1 & 3 \end{array} \right);$$

a la segunda fila le restamos cuatro veces la primera y a la tercera, dos veces la primera:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -15 & 3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \end{array} \right);$$

intercambiamos la segunda y la tercera para tener un 1 como pivote:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & -15 & 3 \end{array} \right);$$

restamos a la tercera tres veces la segunda:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right);$$

puesto que el número de filas no nulas de la matriz de coeficientes escalonada coincide con el número de filas no nulas de la matriz ampliada escalonada el teorema de Rouché-Fröbenius nos dice que es compatible. Como además, el rango de dichas matrices (que coincide con el número de filas no nulas) es 2 y el número de incógnitas 3, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones dependen de $3 - 2 = 1$ parámetros reales. Haciendo $z = \lambda$, tenemos que resolver el sistema:

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y + 2\lambda & = & 1 \\ y - 5\lambda & = & 1 \end{array} \right\},$$

que se puede resolver fácilmente de forma escalonada (de abajo a arriba). Las soluciones son $x = -7\lambda$, $y = 1 + 5\lambda$, $z = \lambda$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Regla de Cramer

Esta regla proporciona un método para resolver ciertos sistemas de ecuaciones compatibles determinados mediante determinantes. Diremos que un SEL es un SISTEMA DE CRAMER si su matriz de coeficientes A es cuadrada (lo que equivale a decir que el SEL tienen tantas ecuaciones como incógnitas) y $|A| \neq 0$. Gracias al Teorema de Rouché-Frobenius se comprueba enseguida que un sistema de Cramer es compatible determinado. Sin embargo, no es cierto que todo SCD sea de Cramer. Veamos como resolver sistemas de Cramer.

Teorema (Regla de Cramer). *Supongamos que tenemos un sistema de Cramer con incógnitas $x_1, \dots, x_n$ y matriz ampliada A^* . Escribamos:*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}.$$

Entonces el sistema es compatible determinado y se puede resolver así:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_n & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|}, \dots, \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n-1} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn-1} & b_n \end{vmatrix}}{|A|},$$

es decir, para despejar la incógnita x_i , en el numerador se tiene el determinante de la matriz que resulta al cambiar en A la columna i -ésima por la columna b , mientras que en el denominador se tiene siempre el determinante de A .

Como ejemplo, resolvamos el SEL:

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & - & y & + & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & -1 \\ 2x & + & 2y & + & z & = & -1 \end{array} \right\}.$$

La matriz ampliada del SEL es:

$$A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & -1 \end{array} \right).$$

Comprobamos que el determinante de A es distinto de cero:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -8.$$

Las soluciones se pueden calcular por la regla de Cramer del siguiente modo:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{4}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}}{-8} = \frac{-1}{4}, \quad z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-8} = 0.$$

◆ EJERCICIOS

1. Calcula cuando sea posible las matrices $C^t \cdot A \cdot B$, $A^2 \cdot C$ y $3A \cdot B - C$, donde

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 4 \\ 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad C = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. Calcula los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 \\ 3 & 3 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -7 & 2 \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b \cdot c & a \cdot c & a \cdot b \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}$$

3. Resuelve las siguientes ecuaciones:

$$\begin{vmatrix} 1-x & 2-x & 3-x \\ 2-x & 3-x & 4-x \\ 3-x & 4-x & 5-x \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & x^2 & x^4 & x^6 \\ 1 & x^3 & x^6 & x^9 \end{vmatrix} = 0$$

4. Calcula el valor de los determinantes de orden n siguientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & a & 1 & \dots & 1 \\ -1 & -1 & a & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & a \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} n & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n & 2 & 1 & \dots & 1 \\ n & 1 & 3 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & 1 & 1 & \dots & n \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} 1 & n & n & \dots & n \\ n & 2 & n & \dots & n \\ n & n & 3 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n \end{vmatrix}$$

5. Halla los rangos de las matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 6 & 5 & 8 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 & 5 \\ 4 & 2 & 1 & 5 & -3 \\ 6 & -3 & 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \\ -4 & 6 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 4 & -5 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 1 & -1 \\ -2 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Si $\text{rango} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2$, ¿puede ser $\text{rango} \begin{pmatrix} a & b & c \\ d-a & e+b & f+c \\ d & e & f \end{pmatrix} = 2$?

7. Estudia el rango de las siguientes matrices en función de los valores de los parámetros:

$$A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & a & 1 \\ 3 & 1 & -a \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix};$$

$$D = \begin{pmatrix} m^2-1 & (m+1)^2 \\ m+1 & m-1 \end{pmatrix}; \quad E = \begin{pmatrix} m^2-1 & (m+1)^2 & m+1 \\ m+1 & m-1 & m+1 \end{pmatrix}$$

8. Halla siempre que sea posible las inversas de las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}; \quad C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 6 \end{pmatrix}; \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

9. Discute los siguientes sistemas usando el teorema de Rouché-Fröbenius y en caso de que sean compatibles resuélvelos:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 2y + z = 0 \\ x - y + 2z = 2 \\ 4x + y + 3z = 5 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{l} x - y + z = 1 \\ x + y + z = 5 \\ 2x - y + 3z = 5 \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{rrcr} 3x & + & 2y & + & z & = & 0 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ 4x & + & y & + & 3z & = & 2 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{rrcr} x & + & y & - & z & = & 1 \\ x & + & 2y & - & z & = & 2 \\ 2x & + & y & - & z & = & 3 \\ 3x & - & y & - & 2z & = & 5 \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{rrcr} x & - & 2y & - & z & + & w & = & 1 \\ x & + & y & + & 2z & - & w & = & 3 \\ x & + & y & & & + & w & = & 9 \\ x & & & + & z & & & = & 3 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{rrcr} x & + & y & - & 3z & & & = & 0 \\ x & & & - & z & & & = & 0 \\ x & & & + & z & - & 2w & = & 0 \\ 3x & + & y & - & 3z & - & 2w & = & 0 \end{array} \right\};$$

10. Si la matriz ampliada de un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas tiene rango 3, ¿puede asegurarse que el sistema sea compatible?

11. Supongamos que dos sistemas sólo se diferencian en los términos independientes:

- (a) si uno de ellos es compatible determinado ¿puede ser el otro compatible indeterminado?
- (b) si uno de los dos es incompatible, ¿tiene que serlo el otro?
- (c) si uno de ellos es compatible indeterminado ¿puede ser el otro compatible determinado?

Dar ejemplos en los casos que las afirmaciones no sean verdaderas.

12. Halla los valores de m para los que los sistemas siguientes son compatibles y obtén las soluciones en el caso de que existan.

$$\left. \begin{array}{rrcr} 3x & + & 10y & + & 4z & = & 0 \\ mx & + & y & - & z & = & 0 \\ x & + & 3y & + & z & = & 0 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{rrcr} 2x & + & 3y & - & z & = & 5 \\ 4x & - & 5y & + & 6z & = & -7 \\ 3x & - & 4y & + & 3z & = & -9 \\ mx & + & 5y & - & 3z & = & 7 \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{rrcr} mx & + & y & + & z & = & 1 \\ x & + & my & + & z & = & m \\ x & + & y & + & mz & = & m^2 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{rrcr} 4x & + & my & + & z & = & m+2 \\ x & + & y & + & mz & = & -2(m+1) \\ mx & + & y & + & z & = & m \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{rrcr} (m^2-1)x & - & (m+1)^2y & = & m+1 \\ (m+1)x & + & (m-1)y & = & m+1 \end{array} \right\}$$

13. Discute en función de los parámetros m , a , b y c los siguientes sistemas aplicando el teorema de Rouché-Fröbenius:

$$\left. \begin{array}{rrcr} mx & + & 2y & = & 2 \\ 2x & + & my & = & m \\ x & - & y & = & -1 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{rrcr} 2x & + & y & - & z & = & a \\ x & + & my & + & z & = & b \\ 3x & + & y & - & mz & = & c \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{rrcr} ax & + & by & + & z & = & 1 \\ x & + & aby & + & z & = & b \\ x & + & by & + & az & = & 1 \end{array} \right\}$$

14. Discute y resuelve los siguientes sistemas aplicando el método de Gauss:

$$\left. \begin{array}{rcl} 3x + 2y + z & = & 1 \\ 5x + 3y + 4z & = & 2 \\ x + y - z & = & 1 \end{array} \right\}; \quad \left. \begin{array}{rcl} 5x - y + z & = & -2 \\ x + 2y + 3z & = & -1 \\ 7x - 8y - 7z & = & -1 \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{rcl} x + y - z & = & 1 \\ 3x + 2y + z & = & 1 \\ 5x + 3y + 4z & = & 2 \\ -2x - y + 5z & = & 6 \end{array} \right\};$$

$$\left. \begin{array}{rcl} 2x - 5y + 4z + v - w & = & -3 \\ x - 2y + z - v + 5w & = & 5 \\ 4x - 13y + 16z + 5v + w & = & 23 \\ x - 4y + 6z + 2v + w & = & 10 \\ 2x - 5y + 4z + v - w & = & 3 \end{array} \right\}$$