

Capítulo 3

Integración de funciones de una variable

♦ LA INTEGRAL INDEFINIDA. CÁLCULO DE PRIMITIVAS

El cálculo de primitivas se puede pensar como la operación inversa de la derivación. El objetivo es que dada una función debemos encontrar otra cuya derivada coincida con la función original. Comenzaremos dando algunas definiciones:

Sea I un intervalo abierto de $\mathbb{R}$. Dada una función $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, se dice que otra función $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ es una **FUNCIÓN PRIMITIVA** de f si F es derivable y $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$. Por ejemplo, una función primitiva de $f(x) = \cos(x)$ es $F(x) = \sin(x)$, ya que $(\sin(x))' = \cos(x)$.

Obsérvese que hemos dicho **una función primitiva**, y no **la función primitiva**. Ello es debido a que no hay una única función primitiva, sino infinitas. De hecho, es claro que si $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$ y $C \in \mathbb{R}$, entonces $F(x) + C$ es también una primitiva de $f(x)$, ya que la derivada de una función constante es igual a cero. En realidad, todas las primitivas de f se obtienen así, como ilustra el siguiente resultado.

Proposición. *Sea I un intervalo abierto, $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función y F una primitiva suya. Entonces, cualquier otra función primitiva de $f(x)$ es de la forma $F(x) + C$, donde C es una constante real.*

Llamaremos INTEGRAL INDEFINIDA de la función f al conjunto de todas sus primitivas, y lo denotaremos por $\int f(x) dx$. Así, por ejemplo, la integral indefinida de $f(x) = 2x$ es $F(x) = x^2 + C$, donde C es una constante real arbitraria.

Empezaremos señalando dos propiedades básicas del cálculo de primitivas que son una consecuencia inmediata de las propiedades de las derivadas del Tema 2.2:

- a) $\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx,$
- b) $\int kf(x)dx = k \int f(x)dx$ para $k \in \mathbb{R}.$

Por otra parte, realizando el camino inverso de las derivadas inmediatas que aprendimos en el tema 2.2, obtenemos las integrales inmediatas recogidas en el cuadro 3.1. Aplicando las

Cuadro 3.1: Tabla de Integrales inmediatas

$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C; \text{ si } n \neq -1$	$\int \frac{dx}{x} = \ln x + C$
$\int \operatorname{sen} x dx = -\cos x + C$	$\int \cos x dx = \operatorname{sen} x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \operatorname{sen} x + C$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctan} x + C$

propiedades básicas y usando las integrales inmediatas, ya podemos calcular integrales que sean suma de funciones elementales. Por ejemplo:

$$\int \left(\operatorname{sen} x + \frac{5}{1+x^2} + 3x^3 \right) dx = \int \operatorname{sen} x dx + 5 \int \frac{dx}{1+x^2} + 3 \int x^3 dx = -\cos x + 5 \operatorname{arctan} x + \frac{3}{4} x^4 + C.$$

Método de sustitución

Aplicando a la inversa la regla de la cadena, obtenemos el método de sustitución para el cálculo de primitivas. De esta forma se deduce que

$$\int g'(f(x)) f'(x) dx = g(f(x)) + C.$$

A efectos prácticos y con el fin de identificar las funciones f y g , realizaremos un cambio de variable $f(x) = t$, sustituyendo después $f'(x) dx = dt$. Pongamos un ejemplo. Si queremos calcular la integral

$$\int x \operatorname{sen}(3x^2) dx$$

podemos realizar la sustitución $3x^2 = t$, derivando obtenemos $6x dx = dt$, de donde $x dx = 1/6 dt$. Sustituyendo en la integral se obtiene:

$$\int x \operatorname{sen}(3x^2) dx = \int \frac{\operatorname{sen} t}{6} dt = -\frac{\cos t}{6} + C.$$

Deshaciendo el cambio finalmente concluimos que

$$\int x \operatorname{sen}(3x^2) dx = -\frac{\cos(3x^2)}{6} + C.$$

En el cuadro 3.0.11 se recoge una relación de integrales obtenidas mediante el método de sustitución.

Cuadro 3.2: Tabla de Integrales inmediatas

$\int f(x)^n f'(x) dx = \frac{f(x)^{n+1}}{n+1} + C; \text{ si } n \neq -1$	$\int \frac{f'(x) dx}{f(x)} = \ln f(x) + C$
$\int \sin(f(x)) f'(x) dx = -\cos(f(x)) + C$	$\int \cos(f(x)) f'(x) dx = \sin(f(x)) + C$
$\int e^{f(x)} f'(x) dx = e^{f(x)} + C$	$\int a^{f(x)} dx = \frac{a^{f(x)}}{\ln a} + C$
$\int \frac{f'(x) dx}{\sqrt{1-(f(x))^2}} = \arcsin(f(x)) + C$	$\int \frac{f'(x) dx}{1+f(x)^2} = \arctan(f(x)) + C$

Método de integración por partes

Usando ahora la fórmula de la derivada de un producto, podemos obtener lo que se conoce con el nombre de integración por partes. Recordemos la derivada de un producto:

$$[u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x).$$

Integrando ambos miembros, se obtiene:

$$u(x)v(x) = \int u'(x)v(x) dx + \int u(x)v'(x) dx.$$

Si ahora denotamos $u'(x)dx = du$ y $v'(x)dx = dv$, la fórmula anterior se puede describir como

$$u \cdot v = \int v \cdot du + \int u \cdot dv.$$

De aquí se obtiene de forma inmediata

$$\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du,$$

que es la fórmula de integración por partes. Una regla nemotécnica para aprenderla es usar la frase “**un día vi una vaca vestida de uniforme**”, y observar que la sucesión de las primeras letras de las palabras coincide con las letras que aparecen en la fórmula. Por supuesto, que las integrales, el igual y el menos hay que memorizarlos a parte.

Ejemplo. Vamos a calcular

$$\int x e^x dx$$

mediante integración por partes. Tenemos que elegir primero cual va a ser la función u . En general, se elegirá como función u aquella cuya derivada sea más simple, como por ejemplo, un

polinomio, $\ln x$... mientras que dv deberá ser una función con una integral fácil de calcular. En este caso, vamos a elegir $u = x$ y $e^x dx = dv$. En primer lugar obtenemos v :

$$v = \int e^x dx = e^x$$

(omitimos C porque solo nos interesa encontrar una primitiva particular; la añadiremos al final). Sintetizando,

$$\begin{aligned} u = x & \rightarrow du = dx \\ e^x dx = dv & \rightarrow v = e^x \end{aligned}$$

Si aplicamos ahora la fórmula de integración por partes, se tiene que

$$\int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x - 1) e^x + C.$$

Ejercicio. Aplicar el método de integración por partes para calcular las integrales: $\int x \sin x dx$ y $\int x \ln x dx$.

Integración de funciones racionales

Recordemos que las funciones racionales son cocientes de polinomios. Para calcular una primitiva del tipo:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx,$$

donde $P(x)$ y $Q(x)$ son funciones polinómicas, podemos limitarnos a dar métodos para cuando el grado de $Q(x)$ es estrictamente mayor que el grado de $P(x)$, pues si no fuese así, podríamos aplicar la división de polinomios, reduciendo la integral a una suma de un polinomio más otra racional de las que sabemos calcular.

Ejemplo. $\int \frac{x^3 - 4x^2 + x + 9}{x^2 - 5x + 6} dx = \int (x + 1) dx + \int \frac{3}{x^2 - 5x + 6} dx.$

Los métodos para la integración de funciones racionales dependen del carácter que tengan las raíces del denominador Q . Distinguiremos tres casos:

- (a) Las raíces de Q son reales y simples.
- (b) Las raíces de Q son reales (posiblemente múltiples).
- (c) Q es un polinomio de grado 2 sin raíces reales.

Los casos que se estudian en este curso son las sumas de funciones racionales en los casos anteriores; es decir, aquellos casos en los que Q se escriba como producto de polinomios de grado 2 sin raíces reales y de polinomios del tipo $(x - a)^m$, con $a \in \mathbb{R}$ y $m \in \mathbb{N}$.

(a) Las raíces de Q son reales y simples. Si se tiene

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \cdots (x - a_n),$$

con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$, entonces expresaremos $P(x)/Q(x)$ como la siguiente suma de fracciones simples:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_1}{x-a_1} + \frac{A_2}{x-a_2} + \cdots + \frac{A_n}{x-a_n}$$

para ciertas constantes reales $A_1, \dots, A_n$, reduciendo después cada uno de los sumandos a una integral logarítmica.

Ejemplo. Si queremos calcular la integral

$$\int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx,$$

primero factorizaremos el denominador obteniendo $x^3+x^2-6x = x(x-2)(x+3)$. Como todas las raíces son simples, podemos aplicar el método. Tenemos que hallar A, B y C tal que

$$\frac{x+1}{x^3+x^2-6x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x+3}.$$

De aquí se sigue que

$$x+1 = A(x-2)(x+3) + Bx(x+3) + Cx(x-2).$$

Sustituyendo por las raíces del polinomio, obtenemos fácilmente que

$$A = -\frac{1}{6}; \quad B = \frac{3}{10}; \quad C = \frac{-2}{15}.$$

Así pues, obtenemos finalmente:

$$\begin{aligned} \int \frac{x+1}{x^3+x^2-6x} dx &= -\frac{1}{6} \int \frac{dx}{x} + \frac{3}{10} \int \frac{dx}{x-2} - \frac{2}{15} \int \frac{dx}{x+3} \\ &= -\frac{1}{6} \ln|x| + \frac{3}{10} \ln|x-2| - \frac{2}{15} \ln|x+3|. \end{aligned}$$

(b) Las raíces de Q son reales (posiblemente múltiples). Cuando

$$Q(x) = (x-a_1)^{m_1}(x-a_2)^{m_2} \cdots (x-a_n)^{m_n},$$

descomponemos $Q(x)$ en una suma de fracciones más simples. Por cada a_i tenemos que añadir m_i sumandos de la forma:

$$\frac{A_1^i}{x-a_i} + \frac{A_2^i}{(x-a_i)^2} + \cdots + \frac{A_{m_i}^i}{(x-a_i)^{m_i}}.$$

En total tenemos que añadir tantos sumandos como grado tenga la raíz. Después, cada sumando se podrá integrar por métodos conocidos, esto es, usando un cambio de variable y la lista de integrales inmediatas.

Ejemplo. Si queremos calcular

$$\int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx,$$

primero factorizamos el denominador:

$$x^3 - x^2 - x + 1 = (x+1)(x-1)^2.$$

La descomposición de la función racional en factores simples será en este caso de la forma:

$$\frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{(x-1)^2},$$

de donde se obtiene la siguiente ecuación:

$$3x+5 = A(x-1)^2 + B(x+1)(x-1) + C(x+1).$$

Sustituyendo x por las raíces de Q y por algún otro valor (en este caso, podemos elegir por ejemplo $x=0$) se obtiene fácilmente que

$$A = \frac{1}{2}; \quad B = -\frac{1}{2}; \quad C = 4.$$

Por lo tanto, nos queda:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x+5}{x^3-x^2-x+1} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} + 4 \int \frac{dx}{(x-1)^2} \\ &= \frac{1}{2} \ln|x+1| - \frac{1}{2} \ln|x-1| - \frac{4}{x-1} + C. \end{aligned}$$

(c) Q es un polinomio de grado 2 sin raíces reales. En este caso, tenemos una fracción del tipo

$$\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$$

donde A y B son constantes reales y x^2+bx+c no tiene raíces reales (es decir, $b^2-4c < 0$). En este caso se obtiene la suma de un logaritmo y una arcotangente. Explicamos a continuación a grandes rasgos los pasos a seguir, y lo veremos a continuación con ejemplos.

En un primer paso, transformamos $\frac{Ax+B}{x^2+bx+c}$ en la suma de dos fracciones: una múltiplo de $\frac{2x+b}{x^2+bx+c}$, que al integrar nos da una función logarítmica; y otra del tipo $\frac{D}{x^2+bx+c}$. Esto se consigue a partir de:

$$Ax+B = \frac{A}{2}(2x+b) - \frac{Ab}{2} + B,$$

tomando $D = B - \frac{Ab}{2}$, que es constante.

Por tanto, sólo nos queda aprender a integrar fracciones del tipo $\frac{1}{x^2+bx+c}$. Ahora, vamos a transformar x^2+bx+c en un polinomio del tipo $(x-a)^2+d$, $d > 0$. Para ello sumamos y restamos $b^2/4$:

$$x^2+bx+c = x^2+bx+b^2/4-b^2/4+c = (x+b/2)^2+(c-b^2/4).$$

Basta tomar $a = b/2$ y $d = c - b^2/4 > 0$.

Por último, aplicando un cambio de variable llegamos a que la integral de $\frac{1}{(x-a)^2+d}$ es de tipo arcotangente.

Ejemplo. Queremos resolver

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5} dx.$$

Primero observamos que x^2+2x+5 no tiene raíces reales. Como

$$\frac{3x-1}{x^2+2x+5} = \frac{\frac{3}{2}(2x+2) - 4}{x^2+2x+5},$$

nos queda:

$$\begin{aligned} \int \frac{3x-1}{x^2+2x+5} dx &= \frac{3}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+2x+5} dx - 4 \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx \\ &= \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) dx - 4 \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx. \end{aligned}$$

Ahora observamos que $x^2+2x+5 = (x+1)^2+4$, y por tanto

$$-4 \int \frac{1}{x^2+2x+5} dx = - \int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1} dx.$$

Considerando el cambio de variable $t = \frac{x+1}{2}$, llegamos a que

$$\begin{aligned} - \int \frac{1}{(\frac{x+1}{2})^2+1} dx &= - \int \frac{1}{t^2+1} 2dt \\ &= -2 \arctan(t) + C = -2 \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C. \end{aligned}$$

Juntándolo todo obtenemos

$$\int \frac{3x-1}{x^2+2x+5} dx = \frac{3}{2} \ln(x^2+2x+5) dx - 2 \arctan\left(\frac{x+1}{2}\right) + C.$$

Ejemplo. (Un caso general) Para calcular

$$\int \frac{3x^2-3x+11}{(x+1)(x^2-6x+10)} dx$$

hacemos la descomposición

$$\frac{3x^2-3x+11}{(x+1)(x^2-6x+10)} = \frac{A}{x+1} + \frac{Bx+C}{x^2-6x+10}.$$

En consecuencia,

$$3x^2 - 3x + 11 = A(x^2 - 6x + 10) + (Bx + C)(x + 1).$$

Igualando coeficientes o sustituyendo la x por tres valores cualesquiera (por ejemplo, 1 , 0 y 1) se obtiene

$$A = 1; \quad B = 2; \quad C = 1.$$

Así pues, podemos escribir finalmente:

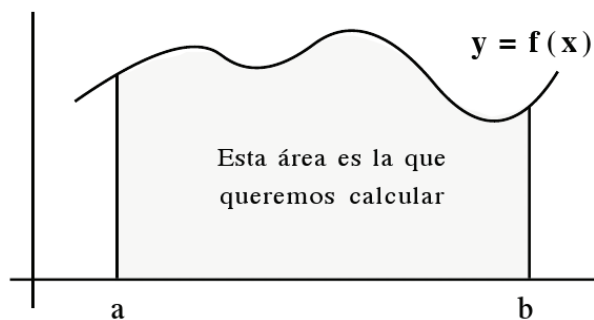
$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 - 3x + 11}{(x+1)(x^2 - 6x + 10)} dx &= \int \frac{dx}{x+1} + \int \frac{2x+1}{x^2 - 6x + 10} dx \\ &= \ln|x+1| + \int \frac{2x+1}{(x-3)^2 + 1} dx. \end{aligned}$$

La última integral la podemos resolver con el cambio de variable $t = x - 3$. Después de algunos cálculos se obtiene

$$\int \frac{3x^2 - 3x + 11}{(x+1)(x^2 - 6x + 10)} dx = \ln|x+1| + \ln((x-3)^2 + 1) + 7 \arctan(x-3) + C.$$

♦ LA INTEGRAL DEFINIDA

Tomando como unidad el área de un cuadrado podemos obtener fácilmente expresiones para las áreas de rectángulos, triángulos, y en general para cualquier polígono. Pero cuando nuestro objetivo es medir el área que queda bajo la gráfica de una función cualquiera, no resulta tan sencillo. Si queremos utilizar el área de los polígonos (rectángulos, trapecios...) tendremos que proceder necesariamente por aproximación, pues en general no hay manera de dividir el área en cuestión en unión disjunta de tales figuras. Una opción muy conveniente puede ser la de considerar una partición del intervalo $[a, b]$ de definición de la función, esto es,



$$P = \{x_0, x_1, x_2, \dots, x_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n = b\}.$$

Básicamente estamos dividiendo el intervalo $[a, b]$ en $n - 1$ pedazos, de tal modo que ahora podemos aproximar el área bajo la función en cada uno de los intervalitos, por el área de un rectángulo, por ejemplo el más pequeño que contenga el área a calcular, o el mayor que no se salga. Definamos para tal fin:

1. m_i como el valor mínimo de $f(x)$ en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$,

2. M_i , el valor máximo de $f(x)$ en el subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$,
3. Δx_i , la longitud del subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, esto es, la diferencia $x_i - x_{i-1}$,
4. Δx , la anchura de la partición, esto es, la mayor de las longitudes Δx_i .

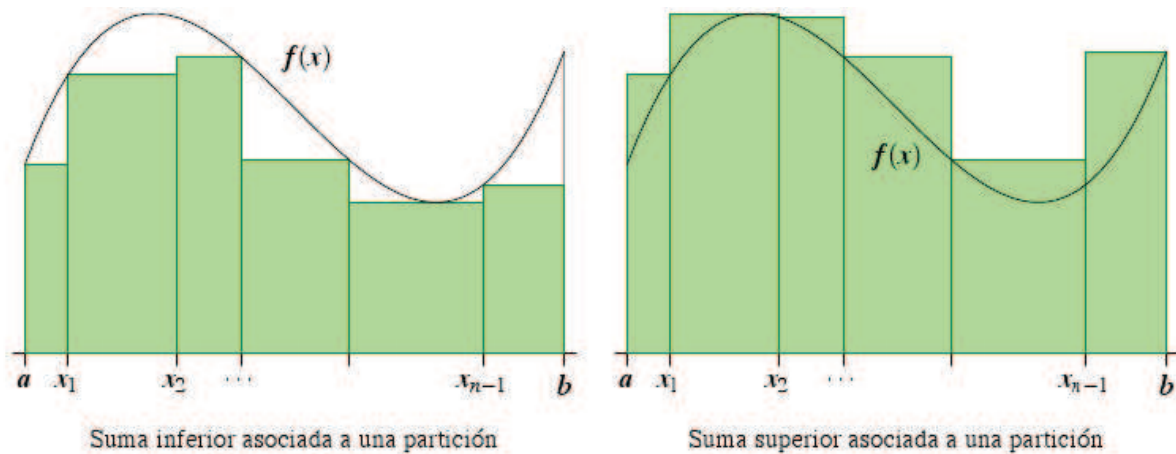
Así pues, las aproximaciones que hemos propuesto antes se pueden escribir como

$$s = m_1 \Delta x_1 + m_2 \Delta x_2 + m_3 \Delta x_3 + \cdots + m_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n m_i \Delta x_i$$

que será una aproximación inferior, y

$$S = M_1 \Delta x_1 + M_2 \Delta x_2 + M_3 \Delta x_3 + \cdots + M_n \Delta x_n = \sum_{i=1}^n M_i \Delta x_i$$

que será una aproximación superior. Llamaremos a estas aproximaciones *suma inferior* y *suma superior* de la función $f(x)$ en $[a, b]$ correspondientes a la partición P . Si tomamos una partición



más fina P' (es decir añadiendo más puntos), entonces las correspondientes sumas inferior y superior s' y S' satisfacen:

$$s \leq s' \leq S' \leq S.$$

Es decir, cuanto más fina es la partición, mejor es la aproximación obtenida. Así pues, podemos intuir que cuando $\Delta x \mapsto 0$, esto es, la anchura de la partición se hace tan pequeña como queramos, entonces tanto las sumas inferiores como las sumas superiores convergen a un mismo número, que es precisamente el área que queda debajo de la función y al que llamamos $\int_a^b f(x) dx$. El porqué se usa el símbolo integral quedará claro a partir del Teorema Fundamental del Cálculo Integral.

Propiedades inmediatas

Siempre que $f(x)$ y $g(x)$ sean funciones continuas en un intervalo cerrado $[a, b]$ se satisfacen las propiedades:

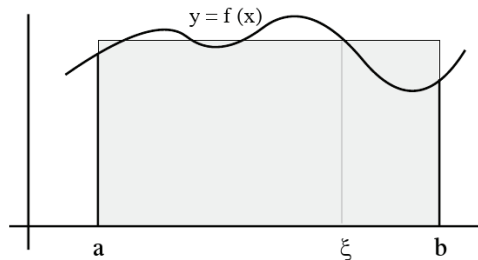
- $\int_a^a f(x)dx = 0$,
- $\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$; $k \in \mathbb{R}$,
- $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$,
- $\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx$; $c \in [a, b]$.

Relación entre la integral definida y la indefinida

A continuación, pretendemos poner de manifiesto la relación entre la integral definida y la indefinida, es decir, la relación entre el cálculo de áreas y el cálculo de primitivas.

Teorema (Teorema del valor medio). *Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, entonces existe $\xi \in [a, b]$ tal que*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi) \cdot (b - a)$$



Como consecuencia del Teorema del valor medio, tenemos el siguiente resultado.

Teorema (Teorema Fundamental del Cálculo Integral). *Sea I un intervalo abierto y $a \in I$. Dada una función continua $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, definimos la función área $F : I \rightarrow \mathbb{R}$ como:*

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt.$$

Entonces, la función F es derivable y $F'(x) = f(x)$, en otras palabras, F es una primitiva de f .

Justificación. Sea $x \in [a, b]$, entonces

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_a^{x+h} f(t) dt - \int_a^x f(t) dt}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_x^{x+h} f(t) dt}{h}.$$

Por el Teorema de Valor Medio, $\int_x^{x+h} f(t) dt = f(\xi_h) \cdot h$ para algún $\xi_h \in [x, x+h]$. Por tanto, usando que f es continua en I se obtiene

$$F'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\xi_h) \cdot h}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} f(\xi_h) = f(x).$$

Como consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo, podemos deducir el siguiente resultado, que nos dice cómo calcular integrales definidas a partir de indefinidas.

Teorema (Regla de Barrow). Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$ y $F(x)$ una primitiva cualquiera de $f(x)$ en $[a, b]$, entonces

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo. Calculamos $\int_0^1 (e^x + 3x - x^2) dx$:

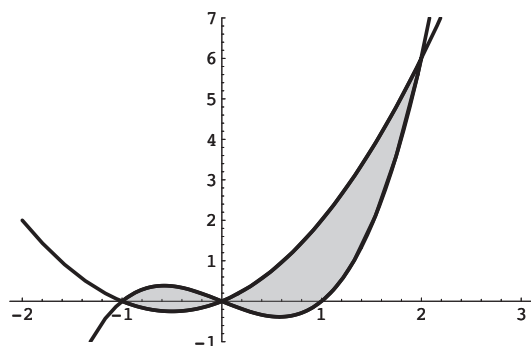
$$\int_0^1 (e^x + 3x - x^2) dx = \left[e^x + \frac{3x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^1 = e^1 + \frac{3}{2} - \frac{1}{3} - e^0 = e + \frac{1}{6}.$$

Cálculo de áreas planas

Sean $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ dos funciones continuas definidas en un intervalo abierto I . Supongamos que tenemos dos puntos $a, b \in I$ con $a < b$ de forma que $f(x) \geq g(x)$, para cada $x \in [a, b]$. Llamamos *área encerrada entre f y g en $[a, b]$* al área del recinto plano acotado por arriba por $y = f(x)$, por abajo por $y = g(x)$, y lateralmente por las rectas verticales $x = a$, $x = b$. En este caso, se puede probar que este área coincide con:

$$A = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx.$$

En el caso general en el que las funciones no estén ordenadas en todo el intervalo (hay trozos donde f es mayor y trozos donde lo es g), dividiremos el intervalo $[a, b]$ en trozos disjuntos buscando **los puntos de corte de las dos funciones**, de forma que en cada trozo una de ellas sea mayor que la otra, y calcularemos el área entre las curvas en cada trozo siguiendo la fórmula de arriba. Si no nos queremos preocupar por determinar exactamente la posición de las dos gráficas en cada intervalo concreto, basta con sumar los valores absolutos de las integrales en cada trozo. Veámoslo en un ejemplo:



Ejemplo. Calcula el área entre las curvas $y = x^3 - x$ e $y = x^2 + x$ (área de la región sombreada en la figura de arriba).

Observación. En general, cuando no se especifica el intervalo donde tenemos que calcular el área, se toma el comprendido entre el primer y el último punto de corte de las gráficas.

Lo primero que necesitamos son los puntos de corte de las dos gráficas, que se obtienen resolviendo la ecuación:

$$x^3 - x = x^2 + x.$$

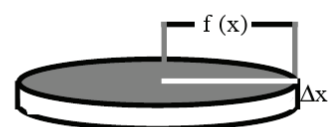
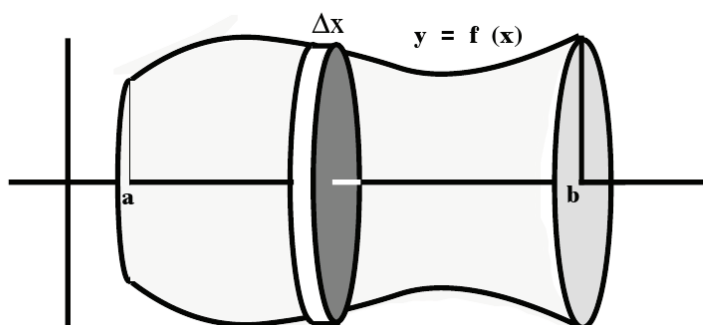
Dichos puntos son $x = -1$, $x = 0$ y $x = 2$, con lo que dividimos el área en dos partes: A_1 , la parte en el intervalo $[-1, 0]$ y A_2 , la parte en el intervalo $[0, 2]$. Entonces se tiene:

$$A_1 = \left| \int_{-1}^0 (x^3 - x - (x^2 + x)) dx \right| = \frac{5}{12}, \quad A_2 = \left| \int_0^2 (x^3 - x - (x^2 + x)) dx \right| = \frac{8}{3},$$

con lo que el área buscada será $A = A_1 + A_2 = 5/12 + 8/3 = 37/12$.

Cálculo de volúmenes de revolución

Nuestro objetivo ahora será el de calcular el volumen de la figura que se obtiene al girar el área debajo de la gráfica de $f(x)$ entorno al eje de abscisas. De manera intuitiva, dicho volumen



El volumen de este elemento diferencial es

$$\pi \cdot f(x)^2 \cdot \Delta x$$

tiene que venir dado por

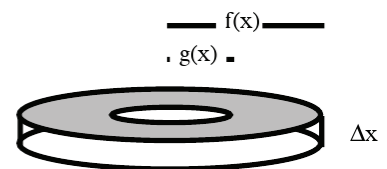
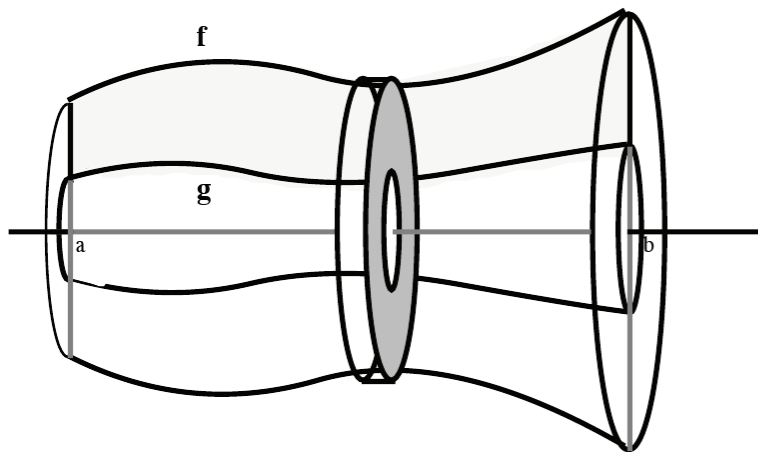
$$V = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi \cdot f(\xi_i)^2 \cdot \Delta x$$

y por consiguiente:

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

Si lo que giramos alrededor del eje x es el área comprendida entre dos funciones $f(x)$ y $g(x)$, entonces

$$V = \pi \cdot \int_a^b [f(x)^2 - g(x)^2] dx.$$



El volumen de este elemento diferencial es

$$\pi \cdot [f(x)^2 - g(x)^2] \cdot \Delta x$$

◆ EJERCICIOS

1. Determina la función $f(x)$ sabiendo que $f'''(x) = 2x$ y $f(0) = 0$, $f(1) = -1/4$ y $f(2) = 1/3$.

2. Calcula las siguientes primitivas:

(I) $\int \frac{dx}{x(x-1)^3}$

(VII) $\int \frac{x^3+5}{x^2-4} dx$

(XIII) $\int \frac{x-5}{x^2+3x+3} dx$

(II) $\int (x^2 + 1)e^x dx$

(VIII) $\int x \sin x^2 dx$

(XIV) $\int \frac{3dx}{x^2+x+1}$

(III) $\int \arctan(x) dx$

(IX) $\int \tan x dx$

(XV) $\int (x^3 + 2x + 1)e^x dx$

(IV) $\int \frac{dx}{x^2-9}$

(X) $\int \frac{2x+3}{x^2+4} dx$

(XVI) $\int \frac{dx}{(x^2-4x+3)(x^2+4x+5)}$

(V) $\int x\sqrt{1+x} dx$

(XI) $\int x \sin 3x dx$

(VI) $\int \frac{dx}{x^2+4}$

(XII) $\int \frac{x}{\sqrt{1-x^4}} dx$

3. Calcula las derivadas de las siguientes funciones:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad F(x) = \int_0^2 \sin t \, dt & \text{(III)} \quad F(x) = \int_a^{x^3} \sin^3 t \, dt \\ \text{(II)} \quad F(x) = \int_0^x \frac{5}{\sqrt{1+t}} \, dt & \text{(IV)} \quad F(x) = \int_0^{\sin x} \ln t \, dt \end{array}$$

4. Calcula las siguientes integrales definidas:

$$\begin{array}{lll} \text{(I)} \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \, dx & \text{(IV)} \quad \int_0^1 \arcsin x \, dx & \text{(VII)} \quad \int_{-2}^2 |x| \, dx \\ \text{(II)} \quad \int_0^x \cos^3 x \, dx & \text{(V)} \quad \int_2^3 \frac{5x}{x^2+3x+2} \, dx & \text{(VIII)} \quad \int_{-1}^0 \frac{dx}{1+e^x} \\ \text{(III)} \quad \int_0^1 x^2 e^x \, dx & \text{(VI)} \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}} & \end{array}$$

5. Calcula el área de las recintos limitados por las siguientes líneas:

$$\begin{array}{ll} \text{(I)} \quad y = 4x - x^2 \text{ y el eje de abscisas} & \text{(III)} \quad y = 6x - x^2 \text{ e } y = x^2 - 2x \\ \text{(II)} \quad y = x^3 - 6x^2 + 8x \text{ y el eje de abscisas} & \text{(IV)} \quad y = x^2 - 4 \text{ e } y = 8 - 2x^2 \end{array}$$

6. Halla el área comprendida entre la curva $y = e^x$ y la cuerda de la misma que tiene por extremos los puntos de abscisas 0 y 1.

7. Halla el volumen que se engendra cuando:

- El recinto limitado por la parábola $y^2 = 8x$ y las rectas $x = 2$, $x = 3$ gira alrededor del eje de abscisas.
- El recinto que queda por encima del eje de abscisas y está limitado por la parábola $y = \frac{3}{4}x^2 - \frac{3}{2}x - \frac{9}{4}$ y por la recta $4x - 2y + 3 = 0$ gira 360 grados alrededor del eje de abscisas.
- La elipse de semiejes a y b (de ecuación $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$) gira 360° alrededor del eje de abscisas.
- La elipse de semiejes a y b gira 360° alrededor del eje de ordenadas.

8. Determina el valor de a de modo que el área comprendida entre la curva $y = ax - x^2$ y el eje de abscisas sea 36.

9. Demuestra el teorema del valor medio a partir de la definición de integral.

10. Halla el área limitada por la parábola $y = -x^2 - 2x + 3$, su tangente en el punto $(-2, 3)$ y el eje y .

11. Halla el valor del parámetro λ para el que la curva $y = \lambda \cos x$ divide en dos partes de igual área la región limitada por el eje x , la curva $y = \sin x$ y la recta $x = \pi/2$.