

Capítulo 2

Continuidad y derivación de funciones de una variable

TEMA 2.1

Repaso de límites y continuidad

♦ DEFINICIÓN DE LÍMITE Y PROPIEDADES

Aunque existen varias aproximaciones al concepto de límite, aquí vamos a introducir una que se basa en el concepto de *sucesión*. Una SUCESIÓN DE NÚMEROS REALES es una aplicación de $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$, esto es, una correspondencia que a cada número natural n le asocia un único número real, que representamos por x_n y llamamos TÉRMINO n -ÉSIMO DE LA SUCESIÓN. La forma más común de representar una sucesión es escribiendo entre llaves el término n -ésimo, $\{x_n\}$. En algunas ocasiones también se representa una sucesión listando entre llaves los primeros términos de la misma, seguidos de puntos suspensivos, o bien, dando la expresión analítica del término n -ésimo. Así podemos definir las sucesiones:

(a) $x_n = \frac{1}{n}$, es decir, la sucesión es $\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots\right\}$.

(b) $y_n = n^2$, esto es, la sucesión es $\{1, 4, 9, 16, \dots\}$.

(c) $\{-n^3 + n^2 + 1\}$.

(d) $\{3\}$, o lo que es lo mismo, la sucesión cuyos términos son todos igual a 3.

(e) $\{-1, 1, -1, 1, -1, \dots\}$, cuyo término n -ésimo vale $x_n = (-1)^n$.

¡Atención! Aunque utilicemos llaves para describir tanto las sucesiones como los conjuntos, no debemos confundir una sucesión con un conjunto de números.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ TIENDE A UN NÚMERO REAL L (o TIENE LÍMITE L o CONVERGE a L) si podemos hacer que los términos de la sucesión se aproximen tanto como queramos al número L , sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\} \rightarrow L$ o por $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = L$.

Aunque para nuestros propósitos bastará con tener clara la anterior definición intuitiva de límite, rigurosamente hablando una sucesión tiene límite L si para cualquier distancia prefijada, $\varepsilon > 0$, existe un término de la sucesión a partir del cuál todos los términos de la sucesión distan de L menos de ε , esto es, existe un término a partir del cual todos los términos de la sucesión se encuentran en el intervalo $]L - \varepsilon, L + \varepsilon[$.

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ TIENDE A $+\infty$ (o TIENE LÍMITE $+\infty$ o DIVERGE POSITIVAMENTE) si podemos hacer que los términos de la sucesión sean tan grandes como queramos, sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\} \rightarrow +\infty$ o por $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = +\infty$. Al igual que antes, la anterior definición sólo nos da una idea intuitiva de la definición de límite. Rigurosamente hablando, una sucesión tiende hacia más infinito si para cualquier número positivo, $K > 0$, existe un término de la sucesión a partir del cuál todos los términos de la sucesión son mayores que K .

Diremos que una sucesión $\{x_n\}$ TIENDE A $-\infty$ (o TIENE LÍMITE $-\infty$ o DIVERGE NEGATIVAMENTE) si podemos hacer que los términos de la sucesión sean tan pequeños como queramos, sin más que tomar n suficientemente grande. Esto lo representamos por $\{x_n\} \rightarrow -\infty$ o por $\lim_{n \rightarrow +\infty} x_n = -\infty$. Rigurosamente, una sucesión tiende hacia menos infinito si para cualquier número negativo, $K < 0$, existe un término de la sucesión a partir del cuál todos los términos de la sucesión son menores que K .

Ejemplo. Las sucesiones definidas anteriormente cumplen:

$$\left\{\frac{1}{n}\right\} \rightarrow 0, \quad \{n^2\} \rightarrow +\infty, \quad \{-n^3 + n^2 + 1\} \rightarrow -\infty \quad \text{y} \quad \{3\} \rightarrow 3,$$

mientras que la sucesión $\{(-1)^n\}$ no tiene límite real ni tampoco $\pm\infty$, puesto que sus términos oscilan entre 1 y -1 .

Ejemplo. La sucesión $\{1, \frac{1}{2}, 1, \frac{1}{3}, 1, \frac{1}{4}, 1, \dots\}$ no tiene límite. La primera impresión es que se aproxima a 0, pero si tomamos como distancia $\varepsilon = \frac{1}{2}$, podemos comprobar que no existe ningún término de la sucesión a partir del cuál todos los términos se encuentren en $] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$. También se podría pensar que el límite de la sucesión es 1, de nuevo tomando $\varepsilon = \frac{1}{2}$, podemos comprobar que no existe ningún término de la sucesión a partir del cuál todos los términos estén en $]1 - \frac{1}{2}, 1 + \frac{1}{2}[=]\frac{1}{2}, \frac{3}{2}[$.

Límite de una función en un punto

A continuación procedemos a definir el concepto de límite de una función $f(x)$ cuando x tiende a un número real x_0 . Dicho concepto sólo tiene sentido cuando f esté definida alrededor del punto x_0 , aunque no necesariamente en dicho punto. Donde por “*alrededor*” entendemos que esté definida a su izquierda, a su derecha o a ambos lados. Por ejemplo, no tiene sentido preguntarse por el límite de $f(x) = \ln(x)$ para x tendiendo a -3 , puesto que la función f no está definida en $\mathbb{R}^-$; pero sí para x tendiendo a 1 puesto que f está definida alrededor de 1 y también para x tendiendo a 0 , porque el logaritmo está definido a la derecha de 0 .

Sea f una función definida alrededor de un punto x_0 (no es necesario que x_0 pertenezca al dominio de la función, es decir, podría no existir $f(x_0)$). Sea $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ (esto significa que L puede representar a $+\infty$ o a $-\infty$, que no son números). Decimos que f TIENE LÍMITE L cuando x tiende a x_0 , y lo simbolizamos

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales, $\{x_n\}$, distintos todos ellos de x_0 , tales que $x_n \in \text{Dom}(f)$ y $\{x_n\} \rightarrow x_0$, se cumple que la correspondiente sucesión de imágenes $\{f(x_n)\}$ tiende a L .

Observación. El límite de una función en un punto no tiene por qué existir. Más adelante veremos ejemplos de funciones que no tienen límite en un punto.

Límites laterales

Hay veces en las que el comportamiento de una función es distinto a la izquierda y a la derecha de un punto (por ejemplo, cuando una función está definida a trozos y tiene distintas expresiones a la izquierda y a la derecha de un punto x_0). Para estudiar estas situaciones se definen los límites laterales, que permiten estudiar el comportamiento de la función a ambos lados de x_0 por separado. Así, la idea de los límites laterales consiste en estudiar hacia dónde tiende una función cuando nos acercamos a un punto por tan solo un lado del mismo.

- Sea f una función definida a la izquierda de x_0 . Decimos que el LÍMITE LATERAL POR LA IZQUIERDA de f en x_0 es $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, y lo representamos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales, $\{x_n\}$, tal que $x_n < x_0 \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \text{Dom}(f) \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow x_0$, se cumple que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

- Sea f una función definida a la derecha de x_0 . Decimos que el LÍMITE LATERAL POR LA DERECHA de f en x_0 es $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, y lo representamos

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L,$$

si para cada sucesión de números reales, $\{x_n\}$, tal que $x_n > x_0 \forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in \text{Dom}(f) \forall n \in \mathbb{N}$ y $\{x_n\} \rightarrow x_0$, se cumple que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

Observación. Cuando una función está definida únicamente a un lado de x_0 , sólo es posible estudiar el límite lateral por dicho lado. Por ejemplo $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \ln(x)$ sólo está definida a la derecha del cero, luego sólo tiene sentido calcular el límite por la derecha en cero de dicha función. A la vista de la gráfica del logaritmo neperiano es fácil deducir que dicho límite es $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \ln(x) = -\infty$.

Ejemplo.

1. Consideremos la función $f : \mathbb{R} \setminus \{3\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} -1 & \text{si } x < 3 \\ 1 & \text{si } x > 3 \end{cases}$$

Es fácil convencerse de que:

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) = -1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) = 1.$$

Así, los límites laterales de la función f en 3 no son iguales.

2. Sea la función $g : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $g(x) = 1/x$. Se deduce, sin más que mirar la gráfica de g , que

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty.$$

Luego no coinciden los límites laterales en 0.

3. Sea la función $h : \mathbb{R} \setminus \{2\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $h(x) = 1/(x-2)^2$. Mirando la gráfica de h podemos deducir que:

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} h(x) = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 2^+} h(x) = +\infty,$$

luego los límites laterales coinciden en este caso.

El siguiente resultado relaciona la existencia y el valor del límite de una función en un punto con la existencia y el valor de los límites laterales de la función en dicho punto.

Teorema. Sea f una función definida alrededor de un punto x_0 y $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$. Entonces, existe el límite de f cuando x tiende a x_0 si, y sólo si, existen los dos límites laterales y son iguales. En tal caso, todos estos límites coinciden. Simbólicamente:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = L.$$

Ejemplo. En el ejemplo anterior, las funciones f y g no tienen límite en $x_0 = 3$ y $x_0 = 0$, respectivamente, puesto que sus límites laterales, aunque existen, no son iguales. Sin embargo, la función h sí tiene límite en $x_0 = 2$ y vale $+\infty$, ya que los límites existen y valen ambos $+\infty$.

Límites en el infinito. Hasta ahora hemos estudiado el comportamiento de una función en las cercanías de un punto $x_0 \in \mathbb{R}$. Ahora estudiaremos el comportamiento que puede presentar una función cuando la variable x toma valores arbitrariamente grandes ($x \rightarrow +\infty$) o pequeños ($x \rightarrow -\infty$). Sea $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ una función, tendrá sentido hablar de límite de la función cuando x tiende a $+\infty$ cuando podamos tomar valores arbitrariamente grandes, para lo cual es necesario que exista un número $a > 0$ tal que $]a, +\infty[\subseteq A$. De forma análoga, para hablar de límite cuando x tiende a $-\infty$ hemos de poder tomar valores tan chicos como queramos, para lo cual es necesario que exista un número $a < 0$ cumpliendo que $] -\infty, a[\subseteq A$. En estas condiciones, diremos que

- f tiene límite L en $+\infty$, y lo denotamos por $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$, si para cada sucesión de números en A , $\{x_n\}$, tal que $\{x_n\} \rightarrow +\infty$, se cumple que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.
- f tiene límite L en $-\infty$, y lo denotamos por $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L$, si para cada sucesión de números en A , $\{x_n\}$, tal que $\{x_n\} \rightarrow -\infty$, se cumple que $\{f(x_n)\} \rightarrow L$.

Donde $L \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

Propiedades de los límites. A continuación exponemos las propiedades básicas de los límites frente a las operaciones con funciones. Dichas propiedades son también válidas para los límites laterales y los límites en $\pm\infty$. Sean f y g dos funciones definidas alrededor de un punto x_0 , tales que existen los límites de f y g cuando x tiende a x_0 y dichos límites son números reales. Entonces existen los siguientes límites y su valor es el que se indica en cada caso:

- (I) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) + g(x)) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) + \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
- (II) $\lim_{x \rightarrow x_0} (af(x)) = a \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$, con $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.
- (III) $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x)g(x)) = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right) \left(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \right)$.
- (IV) $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)}{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) \neq 0$.
- (V) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \right)^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)}$, siempre que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) > 0$.

◆ INDETERMINACIONES. TÉCNICAS PARA CALCULAR LÍMITES

A continuación vamos a exponer una serie de técnicas para el cálculo de límites que involucran a las funciones elementales que hemos visto en el tema anterior. Al calcular dichos límites aparecerán operaciones con 0 y/o con los símbolos $\pm\infty$ que, como hemos dicho en más de una ocasión, no son números. En algunas situaciones estas operaciones tienen resultados concretos.

En el caso en el que esto último no ocurra, estamos ante una INDETERMINACIÓN (o INDETERMINADA). El cálculo de límites está basado en técnicas que ayudan a resolver distintos tipos de indeterminaciones.

Vamos a exponer a continuación aquellas operaciones que involucran a $\pm\infty$ y que tienen resultados concretos:

Suma

1. $a + \infty = +\infty$, $a - \infty = -\infty$, para todo $a \in \mathbb{R}$.
2. $+\infty + \infty = +\infty$, $-\infty - \infty = -\infty$.

Ejemplos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x) + (x+1)^2] = -\infty + 1 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} [\ln(x) - \frac{1}{x^2}] = -\infty - \infty = -\infty.$$

Producto

1. $a(\pm\infty) = \pm\infty$ si $a > 0$,
 $a(\pm\infty) = \mp\infty$ si $a < 0$.
2. $(+\infty)(+\infty) = +\infty$, $(-\infty)(-\infty) = +\infty$, $(+\infty)(-\infty) = -\infty$, $(-\infty)(+\infty) = -\infty$.

Ejemplos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg(x)e^x = \frac{\pi}{2}(+\infty) = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}x\right) = (+\infty)(-\infty) = -\infty.$$

Cociente

1. $\frac{+\infty}{a} = \frac{1}{a}(+\infty)$, $\frac{-\infty}{a} = \frac{1}{a}(-\infty)$, para todo $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Véase ahora el primer apartado del producto.
2. $\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$, $\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$,
 $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$, $\frac{-\infty}{0^-} = +\infty$.
3. $\frac{a}{\pm\infty} = 0$, para cualquier $a \in \mathbb{R}$.
4. $\frac{a}{0^+} = +\infty$ y $\frac{a}{0^-} = -\infty$ si $a > 0$,
 $\frac{a}{0^+} = -\infty$ y $\frac{a}{0^-} = +\infty$ si $a < 0$.

Ejemplos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{e^{-x}} = \frac{+\infty}{0^+} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-e^x}{x} = \frac{-1}{0^+} = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} \frac{\operatorname{tg}(x)}{\operatorname{cosec}(x)} = \frac{0}{-\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-e^x}{x} = \frac{-1}{0^-} = +\infty.$$

Por lo tanto, el límite de $\frac{-e^x}{x}$ cuando x tiende a 0 no existe.

Potencia

1. Sea $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$.
 $a^{+\infty} = +\infty$ si $a > 1$, $a^{+\infty} = 0$ si $0 < a < 1$.
 $a^{-\infty} = 0$ si $a > 1$, $a^{-\infty} = +\infty$ si $0 < a < 1$.
2. $(0^+)^{+\infty} = 0$ y $(0^+)^{-\infty} = +\infty$.
3. $(+\infty)^{+\infty} = +\infty$ y $(+\infty)^{-\infty} = 0$.

Ejemplos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} (3+x)^{\frac{1}{x^2}} = 3^{+\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{1}{\sqrt{x}}} = (0^+)^{\frac{1}{0^+}} = (0^+)^{+\infty} = 0,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-\infty} = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\frac{-1}{\sqrt{x}}} = (0^+)^{\frac{-1}{0^+}} = (0^+)^{-\infty} = +\infty.$$

Las indeterminaciones (operaciones que involucran a 0 y/o $\pm\infty$ que no siempre dan el mismo resultado y que hay que estudiar en cada caso particular) son las siguientes:

- De tipo *suma*: $+\infty - \infty$, $-\infty + \infty$.
- De tipo *cociente*: $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$, $\frac{a}{0}$ con $a \neq 0$.
- De tipo *producto*: $0(\pm\infty)$.
- De tipo *exponencial*: $(\pm\infty)^0$, 0^0 , $1^{\pm\infty}$.

Ejemplo. Sean $f(x) = x$, $g(x) = x^2$ y $h(x) = x^3$. Es claro que el límite cuando x tiende a $+\infty$ de todas estas funciones es $+\infty$. Por tanto, el límite de la diferencia de dos cualesquiera de dichas funciones presenta la indeterminación $+\infty - \infty$. A continuación mostramos dos casos en los que el límite toma valores distintos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - g(x) = +\infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x - x^2 = -\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) - g(x) = +\infty - \infty = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 - x^2 = +\infty.$$

En este tema veremos cómo tratar algunos casos en los que aparecen indeterminadas de los tipos: $+\infty - \infty$, $\frac{0}{0}$, $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$ y $1^{\pm\infty}$.

Reglas para el cálculo de límites

1. Funciones polinómicas

Sea $p(x)$ un polinomio y $x_0 \in \mathbb{R}$. Entonces $\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = p(x_0)$.

Si $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$, entonces

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} a_n x^n = \text{signo}(a_n) \infty \quad \text{y}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} p(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} a_n x^n = \text{signo}(a_n) (-1)^n \infty.$$

Ejemplos.

$$\lim_{x \rightarrow -1} (-2x^2 + 5x - 7) = -2(-1)^2 + 5(-1) - 7 = -2 - 5 - 7 = -14.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{7}x^3 + \pi x^2 = +\infty.$$

2. Funciones racionales.

Límite cuando x tiende a un número. Sean $p(x)$ y $q(x)$ dos polinomios y sea $x_0 \in \mathbb{R}$. Teniendo en cuenta el ejemplo anterior y las propiedades de los límites, deducimos que:

- Si $q(x_0) \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)}$.
- Si $q(x_0) = 0$ y $p(x_0) \neq 0$, entonces $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{0}$. Tenemos entonces que estudiar los límites laterales; si éstos coinciden, entonces existe el límite.
- Si $q(x_0) = p(x_0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{0}{0}$. Para resolver esta indeterminación, factorizamos los polinomios $p(x)$ y $q(x)$. Como x_0 es una raíz de ambos polinomios, podremos simplificar la expresión del cociente, tras lo cual volveremos a evaluar el límite.

Ejemplos.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 - 1}{2x + 7} = \frac{-1}{7}.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{x^2 + 1 - 2x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x - 1}{(x - 1)^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{x - 1} = \left(\frac{1}{0^+} \right) = +\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{x - 1} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x - 2)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x - 2) = -1.$$

Estudiemos ahora el límite de $\frac{6x^2 + 1}{x + 3}$ cuando x tiende a -3 . $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{6x^2 + 1}{x + 3} = \frac{55}{0}$, luego tenemos que estudiar qué ocurre con los límites laterales.

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} \frac{6x^2 + 1}{x + 3} = \frac{55}{0^+} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} \frac{6x^2 + 1}{x + 3} = \frac{55}{0^-} = -\infty.$$

Como estos límites no coinciden, no existe el límite de $\frac{6x^2+1}{x+3}$ cuando x tiende a -3 .

Límite cuando x tiende a $\pm\infty$. Sean $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ y $q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0$ dos polinomios con grados n y m , respectivamente. Como el límite de $p(x)$ y $q(x)$ cuando x tiende a $\pm\infty$ es $+\infty$ o $-\infty$, tenemos que

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\pm\infty}{\pm\infty}.$$

Para resolver este tipo de límites basta con aplicar la siguiente regla, conocida como CRITERIO O REGLA DE LOS GRADOS:

- Si $n < m$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = 0$.
- Si $n = m$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_n}{b_m}$.
- Si $n > m$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\text{signo}(a_n)}{\text{signo}(b_m)} \infty$ y $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{\text{signo}(a_n)(-1)^n}{\text{signo}(b_m)(-1)^m} \infty$.

La regla de los grados se demuestra fácilmente dividiendo numerador y denominador entre $x^{\min\{n,m\}}$, y tomando a continuación el correspondiente límite.

Ejemplos. Veamos algunos ejemplos concretos en los que aplicar la regla anterior.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x^2+1}{x-7} = -\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x^3-3}{x+1} = -\infty,$$

ya que en ambos casos el grado del numerador es mayor que el del denominador.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^3+7}{2x^3+3} = \frac{-1}{2} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^3+5}{3x^3-2} = \frac{-1}{3},$$

ya que numerador y denominador tienen el mismo grado.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{3}x^2}{-x^3+1} = 0,$$

ya que el grado del denominador es mayor que el del numerador.

3. Cocientes de expresiones que contienen raíces y polinomios.

Límite cuando x tiende a un número. Sea $f(x)$ el cociente de dos expresiones que contienen raíces y polinomios, y sea $x_0 \in \mathbb{R}$.

El caso en el que el denominador de $f(x_0)$ no se anula y el caso en el que sólo se anula el denominador de $f(x_0)$, se tratan tal y como se hace en el caso de funciones racionales.

Supongamos ahora que tanto el numerador como el denominador de $f(x_0)$ se anulan. Tenemos en este caso una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$. En algunos casos se puede evitar la indeterminación realizando operaciones convenientes. Así, por ejemplo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x+1} - 1}{x} &= \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sqrt{x+1} - 1)(\sqrt{x+1} + 1)}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + 1 - 1}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{x(\sqrt{x+1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{x+1} + 1} = \frac{1}{\sqrt{0+1} + 1} = \frac{1}{2},\end{aligned}$$

donde hemos multiplicado numerador y denominador por la expresión conjugada del numerador y además hemos usado que $(a-b)(a+b) = a^2 - b^2$.

Límite cuando x tiende a $\pm\infty$. Sea $f(x)$ el cociente de dos expresiones que contienen raíces y polinomios.

Supongamos que tomamos límite de $f(x)$ cuando x tiende a $\pm\infty$ y obtenemos una indeterminación del tipo $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. En algunas ocasiones es posible realizar algunas operaciones que permiten calcular el límite. Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^4 + 1}}{\sqrt{x^2 + 1}} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{x^4 + 1}{x^2 + 1}} = \sqrt{+\infty} = +\infty, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{3x^2 + 2}}{x + 1} &= \left(\frac{+\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^2 + 2}{(x + 1)^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3x^2 + 2}{x^2 + 2x + 1}} = \sqrt{3}.\end{aligned}$$

En ambos casos hemos usado la regla de los grados para calcular el límite de una función racional (la que está dentro de la raíz). Además, la segunda igualdad del segundo límite es cierta gracias a que $x + 1 = \sqrt{(x + 1)^2}$ cuando $x > -1$ y a que estamos tomando límite cuando x tiende a $+\infty$.

Cuando no podamos realizar operaciones para llegar a una expresión tratable, empleamos un método parecido al que se usa para demostrar la regla de los grados.

Si estamos calculando el límite cuando x tiende a $+\infty$, en primer lugar hemos de ver que todas las raíces están bien definidas (esto es, su radicando es positivo cuando x es suficientemente grande), en el caso en que esto no ocurra, no existe el límite. Una vez comprobado esto, dividimos numerador y denominador entre $x^{\min\{n,m\}}$, donde n y m son dos números que desempeñan el papel que desempeñaban el grado del numerador y el grado del denominador en la regla de los grados (su cálculo se explicará más tarde). Tras realizar estas divisiones, tomamos el correspondiente límite.

Si estamos calculando el límite cuando x tiende a $-\infty$, cambiamos x por $-x$ y $-\infty$ por $+\infty$. Tenemos entonces un límite cuando x tiende a $+\infty$, que resolvemos tal y como se explica arriba.

Para calcular n y m lo único que hay que tener en cuenta es que el papel de grado de $(p(x))^{\frac{1}{k}}$ (esto es, la raíz k -ésima de $p(x)$) lo desempeña $\frac{\text{grado}(p(x))}{k}$.

Ejemplos.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^3 - 1}}{x^3 + 1} = \frac{+\infty}{+\infty}.$$

El papel de grado del numerador lo hace $\frac{3}{2}$ y el del denominador 3, por lo tanto tenemos que dividir numerador y denominador entre $x^{\frac{3}{2}} = \sqrt{x^3}$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^3 - 1}}{x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x + \sqrt{x^3 - 1}}{\sqrt{x^3}}}{\frac{x^3 + 1}{\sqrt{x^3}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{1}{\sqrt{x}} + \sqrt{1 - \frac{1}{x^3}}}{\sqrt{x^3} + \frac{1}{\sqrt{x^3}}} = \frac{0 + \sqrt{1 - 0}}{+\infty + 0} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

Estudiemos ahora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + \sqrt{3x^4 - 1}}{-x^2 + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(-x)^2 + \sqrt{3(-x)^4 - 1}}{-(-x)^2 - x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + \sqrt{3x^4 - 1}}{-x^2 - x}.$$

Dividimos numerador y denominador entre x^2 .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{x^2 + \sqrt{3x^4 - 1}}{x^2}}{\frac{-x^2 - x}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \sqrt{3 - \frac{1}{x^4}}}{-1 - \frac{1}{x}} = \frac{1 + \sqrt{3 - 0}}{-1 + 0} = -1 - \sqrt{3}.$$

4. *Indeterminada tipo $+\infty - \infty$.* Esta indeterminada proviene de la diferencia de dos funciones.

Si la indeterminada proviene de la diferencia de dos funciones racionales basta con operar dicha diferencia para calcular el límite, así, por ejemplo:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} \right) = (+\infty - \infty) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 1}{x^4} = \left(\frac{-1}{0^+} \right) = -\infty.$$

Si la indeterminada proviene de la diferencia de dos expresiones con raíces basta multiplicar y dividir por la expresión conjugada y simplificar. Así

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1}) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\sqrt{x+1} - \sqrt{x-1})(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{(\sqrt{x+1} + \sqrt{x-1})} = \frac{2}{+\infty} = 0. \end{aligned}$$

5. *Indeterminada* $1^{\pm\infty}$ Las indeterminaciones de este tipo se suelen resolver con el siguiente resultado:

Criterio $1^{\pm\infty}$. Sean f y g dos funciones definidas alrededor de un punto x_0 (el criterio también es cierto si $x_0 = \pm\infty$) de forma que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1$. Entonces se verifica:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)(f(x)-1)}.$$

Este mismo criterio es válido para límites laterales.

Ejemplos. Calcularemos un par de límites haciendo uso del criterio anterior.

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (2x-5)^{1/(x-3)} = (1^{+\infty}) = e^{\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{1}{x-3} (2x-5-1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-6}{x-3}}.$$

Ahora, como

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2x-6}{x-3} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{2(x-3)}{x-3} = 2,$$

deducimos que

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} (2x-5)^{1/(x-3)} = e^2.$$

Otro ejemplo es el siguiente:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = (1^{+\infty}) = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} x(1 + \frac{1}{x} - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x}} = e.$$

Terminamos esta sección con un resultado que nos ayuda a calcular un tipo particular de límites.

Teorema. Sean f y g dos funciones definidas alrededor de x_0 (se admite aquí que x_0 sea $\pm\infty$). Supongamos que se cumplen las siguientes hipótesis:

- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 0$.
- g está acotada.

Entonces, se cumple que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)g(x) = 0$.

Observaciones.

1. Es importante recalcar que para aplicar el teorema anterior no es necesario que exista $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$.
2. El teorema es también cierto para límites laterales.

Ejemplo. Aplicaremos el resultado anterior para calcular $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x}$. Para ello tomamos $f(x) = 1/x$ y $g(x) = \text{sen}(x)$. Se cumple que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$ y $g(x)$ está acotada. Por tanto

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{sen}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) g(x) = 0.$$

Nótese que el cálculo anterior es cierto aún sabiendo que no existe $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{sen}(x)$.

Ejercicio. Usando el criterio anterior, calcular el siguiente límite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

◆ APLICACIONES DE LOS LÍMITES: ASÍNTOTAS

Vamos a introducir, como primera aplicación de los límites, un concepto que nos será útil para esbozar la gráfica de una función: las asíntotas. Una asíntota a una función es una recta a la cuál se aproxima la gráfica de la función. Esta condición se expresa de distintas formas según dicha recta sea vertical, horizontal u oblicua. Así hablaremos de tres tipos de asíntotas.

Antes de definir dicho concepto recordemos que la ecuación de una recta en el plano viene dada por $ax + by = c$, siendo a y b no simultáneamente nulos. Si $a = 0$, entonces la recta es horizontal, $y = c/b$; si $b = 0$, entonces la recta es vertical, $x = c/a$. En otro caso, dicha ecuación podemos escribirla también como $y = mx + n$, donde a m se le llama pendiente de la recta.

- La recta $y = k$ es una ASÍNTOTA HORIZONTAL de la función f si existe alguno de los siguientes límites y es finito:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x).$$

Las asíntotas horizontales de una función (si es que existen) se calculan hallando el límite en $\pm\infty$; si este límite es finito e igual a k , la asíntota es $y = k$. Conviene tener en cuenta las siguientes observaciones:

1. Una función puede tener como máximo dos asíntotas horizontales correspondientes a cada uno de los límites en $+\infty$ y $-\infty$. Así diremos que $y = k_1$ es asíntota horizontal en $-\infty$ si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = k_1$ y, análogamente, $y = k_2$ es asíntota horizontal en $+\infty$ si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = k_2$.
2. La gráfica de una función puede cortar a la asíntota horizontal en uno o varios puntos.
3. Una recta horizontal $y = k$ puede ser simultáneamente asíntota horizontal de una función en $+\infty$ y en $-\infty$.

- La recta $x = k$ es una ASÍNTOTA VERTICAL de la función f si alguno de los siguientes límites no es finito:

$$\lim_{x \rightarrow k^+} f(x); \quad \lim_{x \rightarrow k^-} f(x).$$

1. Cuando tenemos una función que es el cociente de dos funciones, las asíntotas verticales hay que buscarlas en aquellos valores de x que anulan al denominador.
2. Al contrario de lo que ocurre con las asíntotas horizontales, no existe tope al número de asíntotas verticales que puede tener una función. Por ejemplo, la función $\operatorname{tg}(x)$ tiene una cantidad infinita de asíntotas verticales, todas de la forma $y = \frac{\pi}{2} + k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.

- La recta $y = mx + n$ es una ASÍNTOTA OBLICUA de la función f si se cumple:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - mx - n] = 0 \quad \text{y/o} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - mx - n] = 0.$$

Así, según uno u otro límite exista, hablaremos de asíntota oblicua en $+\infty$ o en $-\infty$, respectivamente. Para calcular los coeficientes m y n de la recta usaremos las siguientes fórmulas:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} = m \neq 0 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - mx = n,$$

tomando límite en $+\infty$ o $-\infty$ según estemos calculando la asíntota oblicua en $+\infty$ o $-\infty$.

Conviene hacer las siguientes observaciones:

1. A la vista de la definición, una función f puede tener como mucho dos asíntotas oblicuas (una en $+\infty$ y otra en $-\infty$). Si una función tiene una asíntota oblicua en $+\infty$ (o $-\infty$) entonces no puede tener una asíntota horizontal en $+\infty$ (o $-\infty$) y viceversa.
2. La gráfica de una función puede cortar a una asíntota oblicua.
3. Una recta $y = mx + n$ puede ser simultáneamente asíntota oblicua de una función en $+\infty$ y en $-\infty$.

El conocimiento de la situación de la gráfica con relación a las asíntotas es esencial para la representación de funciones. Así:

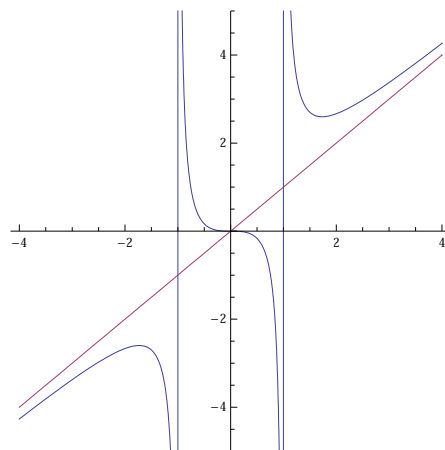
- En el caso de las asíntotas horizontales y oblicuas es conveniente estudiar si la función se aproxima a la asíntota por encima o por debajo. Y si la gráfica de la función interseca a la asíntota y en qué puntos lo hace.
- En el caso de la asíntota vertical en $x = k$ es conveniente estudiar ambos límites laterales, $\lim_{x \rightarrow k^-} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow k^+} f(x)$.

Ejercicio. Hallar las asíntotas de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$.

Observemos en primer lugar que

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = +\infty \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^2 - 1} = -\infty.$$

Luego la función f no tiene asíntotas horizontales. Por otro lado, al tratarse de una función racional, debemos buscar las asíntotas verticales en las raíces del denominador. Puesto que el polinomio $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ tiene dos raíces reales, f tiene dos posibles asíntotas verticales, en $x = 1$ y en $x = -1$. En ambos casos tenemos que:



Gráfica de la función $f(x) = \frac{x^3}{x^2 - 1}$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= -\infty, \\ \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= +\infty, & \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^3}{x^2 - 1} &= -\infty. \end{aligned}$$

Luego $x = 1$ y $x = -1$ son asíntotas verticales de la función.

Puesto que la función no tiene asíntotas horizontales, veamos si tiene asíntotas oblicuas.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1 = m_1, & \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - m_1 x &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 = n_1, \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^3}{x^3 - x} = 1 = m_2, & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - m_2 x &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{x^2 - 1} = 0 = n_2. \end{aligned}$$

Así, la recta $y = m_1 x + n_1 = m_2 x + n_2 = x$ es una asíntota oblicua de la función f en $+\infty$ y en $-\infty$ simultáneamente.

Finalmente, estudiamos la posición de la gráfica de la función con respecto a la asíntota oblicua en $+\infty$ y en $-\infty$. Para hallar los puntos de intersección, resolvemos la ecuación que se obtiene al igualar las expresiones de la función y de la asíntota.

$$\frac{x^3}{x^2 - 1} = x \iff x^3 = x^3 - x \iff x = 0.$$

Entonces, la gráfica de f sólo corta a la asíntota oblicua en $(0, 0)$.

Gracias a la existencia de dos asíntotas verticales y a que sabemos cómo se comporta la gráfica de f alrededor de ellas, podemos decir que la gráfica de f está por encima de su asíntota oblicua en $+\infty$ y por debajo de su asíntota oblicua en $-\infty$. Otra forma de llegar a esta misma conclusión consiste en: evaluar la función y la asíntota en un valor suficientemente grande y ver cuál está por encima de cuál, hacer lo mismo para un valor suficientemente chico y tener en cuenta que la gráfica de f y la recta $y = x$ sólo se intersecan en $(0, 0)$.

Toda esta información sobre la función f queda reflejada en su gráfica.

♦ CONTINUIDAD DE UNA FUNCIÓN

Intuitivamente, las funciones continuas son aquellas cuyas gráficas no presentan saltos en cada trozo de su dominio, esto es, aquellas que podemos dibujar sin levantar el lápiz del papel en cada trozo de su dominio.

Sea f una función y sea $x_0 \in \text{Dom}(f)$ tal que f está definida alrededor de x_0 (donde por alrededor entendemos a la izquierda, a la derecha o a ambos lados). Diremos que f es CONTINUA EN x_0 si se verifican:

(I) Existe $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ y es finito, y

(II) $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$.

Si $x_0 \in \text{Dom}(f)$, pero f no está definida a su alrededor, por convenio diremos que f es continua en x_0 .

Observación. A diferencia del concepto de límite, la definición de continuidad implica que la función tiene que estar definida en el punto. Esto es, no tiene sentido preguntarse si una función es continua o no en un punto x_0 donde no esté definida.

Diremos que una función f es DISCONTINUA en $x_0 \in \text{Dom}(f)$ si no es continua en x_0 . Esto es, si f no cumple en x_0 alguna de las 2 condiciones dadas en la definición de continuidad. Según sea la propiedad que no se cumple clasificamos las discontinuidades en:

- DISCONTINUIDAD ESENCIAL O INEVITABLE cuando no se cumple (I), esto es, o bien cuando no existe el límite de f en x_0 o bien cuando existe pero es $\pm\infty$.

Si f no tiene límite en x_0 pero los límites laterales sí existen y son finitos, diremos que f TIENE UNA DISCONTINUIDAD DE SALTO FINITO EN x_0 . Gráficamente lo que observamos es que la gráfica “da un salto” en x_0 .

Si f no tiene límite en x_0 pero existen los límites laterales y al menos uno de ellos vale $+\infty$ o $-\infty$, entonces diremos que f TIENE UNA DISCONTINUIDAD DE SALTO INFINITO EN x_0 .

Existen discontinuidades esenciales que no son ni de salto finito, ni de salto infinito.

- DISCONTINUIDAD EVITABLE cuando se cumple (I) y no se cumple (II), esto es, el límite de la función existe y es un número real $L \in \mathbb{R}$ pero $L \neq f(x_0)$.

El nombre de discontinuidad evitable se debe a que podemos “reparar la discontinuidad”. Concretamente, si f presenta una discontinuidad evitable en x_0 , entonces la función f^* , definida por

$$f^*(x) = \begin{cases} f(x) & x \neq x_0 \\ \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) & x = x_0 \end{cases}$$

es una función continua en x_0 . En una discontinuidad esencial no es posible la construcción de f^* al no existir $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ o bien existir pero ser $\pm\infty$.

Hemos visto lo que significa que una función sea continua en un punto. Pues bien, diremos que una función f es CONTINUA EN UN INTERVALO de $\mathbb{R}$ si f es continua en todos los puntos de dicho intervalo. En general, diremos que $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es CONTINUA (EN A) si es continua en cada punto de su dominio A .

Observación. La propiedad (II) de la definición de continuidad en un punto, nos indica que los límites en un punto de funciones continuas se calculan evaluando directamente la función en el punto.

Propiedades de las funciones continuas. Supongamos que f y g son funciones continuas. Sea $A = \text{Dom}(f) \cap \text{Dom}(g)$. Entonces:

1. $f + g$ es continua (en A).
2. $f \cdot g$ es continua (en A). En particular, af es continua para cualquier $a \in \mathbb{R}$.
3. $\frac{f}{g}$ es continua en $A \setminus \{x \in A : g(x) = 0\}$.
4. Si $f(x) > 0$ para todo $x \in A$, entonces f^g es continua en A .
5. Las composiciones $g \circ f$ y $f \circ g$ son continuas en sus dominios de definición.

Ejemplo. Toda función polinómica $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ es continua en $\mathbb{R}$ al ser suma y producto de funciones continuas. Toda función racional $r(x) = p(x)/q(x)$ es continua en $\mathbb{R} \setminus \{x : q(x) = 0\}$. Las funciones potenciales, exponenciales, logarítmicas y trigonométricas son continuas en sus dominios de definición.

Ejercicio. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} & x < 0 \\ 1 & x = 0 \\ \frac{x^2}{x^2 + x} & x > 0 \end{cases}$$

Solución: Tendremos que comprobar si se cumplen las condiciones de la definición de continuidad. Gracias al ejemplo anterior, tenemos asegurada la continuidad cuando $x \neq 0$. En $x = 0$ tenemos que estudiar qué ocurre. En primer lugar hemos de ver si existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y es finito. Como a ambos lados de $x_0 = 0$ la función tiene distintas expresiones analíticas, debemos calcular los límites laterales. Tenemos:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}} = (1^{-\infty}) = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} (x^2 + 1 - 1)} = e^{\lim_{x \rightarrow 0^-} x} = 1,$$

donde hemos aplicado el criterio $1^{\pm\infty}$. Por otro lado:

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^2 + x} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x+1} = 0.$$

Como los límites laterales son distintos se sigue que no existe $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ y, por tanto, f presenta en $x_0 = 0$ una discontinuidad esencial. Como los límites laterales son finitos estamos, más concretamente, ante una discontinuidad de salto finito.

Ejercicio. Estudiar la continuidad de la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 1 & x \neq -1 \\ 2008 & x = -1 \end{cases}$$

Solución: Procedemos como en el caso anterior. En los puntos distintos de -1 sabemos que la función es continua. Estudiemos qué ocurre en $x = -1$. Veamos si existe $\lim_{x \rightarrow -1} f(x)$. En este caso la expresión de la función a ambos lados de $x_0 = -1$ es la misma, por lo que no tenemos que calcular límites laterales. Se tiene:

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1} (x^2 + 1) = (-1)^2 + 1 = 2.$$

Por tanto el límite existe y es finito. Por último, como $f(-1) = 2008$ y $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 2$, deducimos que f presenta una discontinuidad evitable en $x_0 = -1$.

♦ TRES TEOREMAS FUERTES

Terminaremos este tema con tres resultados donde se ponen de manifiesto algunas propiedades relevantes de las funciones continuas.

Teorema (de conservación del signo). *Si f es una función continua en x_0 y $f(x_0) \neq 0$, entonces existe un entorno abierto $B(x_0, r)$ en el que el signo de $f(x)$ es el mismo signo que el de $f(x_0)$.*

Teorema (de los valores intermedios). *Sea f una función continua en un intervalo $[a, b]$ de forma que $f(a) \neq f(b)$. Entonces f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$, es decir, para cada y en el intervalo determinado por $f(a)$ y $f(b)$ existe $x \in [a, b]$ tal que $f(x) = y$.*

Una de las aplicaciones más conocidas del resultado anterior es la siguiente:

Teorema (de los ceros de Bolzano). *Sea f una función continua sobre un intervalo cerrado y acotado $[a, b]$. Si se cumple que $f(a)f(b) < 0$ (es decir, el signo de $f(a)$ es distinto al signo de $f(b)$), entonces existe un valor $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = 0$.*

La interpretación geométrica del Teorema de Bolzano es la siguiente: una curva continua en el plano que pasa del semiplano superior al inferior (o al revés) tiene que cortar en algún punto al eje x . El teorema de Bolzano se puede aplicar para asegurar la existencia de solución de ciertas ecuaciones difíciles de resolver por métodos directos.

Ejemplo. La ecuación $x + e^x = 7$ no se puede resolver directamente (inténtese despejar x) pero podemos demostrar la existencia de al menos una solución si procedemos de la siguiente forma. Definimos la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x + e^x - 7$. Esta función es continua en $\mathbb{R}$ al ser suma de funciones continuas. Además, es claro que las soluciones de la ecuación $x + e^x = 7$

coinciden con los valores de x para los que $f(x) = 0$. De esta forma, trasladamos el problema de encontrar una solución de la ecuación $x + e^x = 7$ al problema de encontrar un punto $x \in \mathbb{R}$ donde $f(x) = 0$. Para ello trataremos de encontrar un intervalo $[a, b]$ donde la función f cumpla las hipótesis del Teorema de Bolzano. Por ejemplo, se tiene $f(0) = 0 + e^0 - 7 = -6 < 0$, mientras que $f(2) = 2 + e^2 - 7 > 2 + 7 - 7 = 2 > 0$, ya que $e^2 \approx 7,38906$. Así, podemos aplicar el Teorema de Bolzano a f en el intervalo $[0, 2]$ para asegurar la existencia de un número $c \in]0, 2[$ tal que $f(c) = 0$, es decir $c + e^c = 7$, lo que implica que c es una solución de la ecuación original. En principio, no podemos calcular c explícitamente.

◆ EJERCICIOS

1. Calcula los siguientes límites:

- | | |
|--|--|
| (I) $\lim_{x \rightarrow -1} (-x^3 - x^2 - x + 12)$ | (XIII) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} \cos(x)$ |
| (II) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x^2-1} \right)$ | (XIV) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{ x+1 }$ |
| (III) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^3 - 2x^2 + 4x - 8}{x^2 - 4}$ | (XV) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x^2 + 5x + 2}{3x^2 + 7}$ |
| (IV) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x}$ | (XVI) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{5}$ |
| (V) $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{x+2} - 1}{\sqrt{x^2 + 3} - 2}$ | (XVII) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x^3 - 2x + 3}{5x^3 - x^2 + 6x}$ |
| (VI) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + 3x - 4}}{x^2 - 1}$ | (XVIII) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{x}{\arctg x} + \sqrt[3]{x^2} \right)$ |
| (VII) $\lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{3}{x+1}$ | (XIX) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x^3}$ |
| (VIII) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{x^2 + 1}{x+1} \right)^{\frac{1}{x}}$ | (XX) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 + 2x - 3}{x^5 - 1}$ |
| (IX) $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \cos \left(\frac{1}{x} \right)$ | (XXI) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{ x-5 }{x^2 + x - 30}$ |
| (X) $\lim_{x \rightarrow 1} x \arctg x$ | (XXII) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\log_{(1/2)}(x)}$ |
| (XI) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x+1}$ | (XXIII) $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \arcsen(x)$ |
| (XII) $\lim_{x \rightarrow -\infty} (-x^3 + 3x + 2)$ | |

2. Teniendo en cuenta que:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = 1 \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0,$$

calcular los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg} x}{x}, \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - x \cos x}{x^2}.$$

3. Calcular las asíntotas de las siguientes funciones indicando la posición de la gráfica con respecto a la asíntota:

$$(I) f(x) = \frac{1}{x^2},$$

$$(IV) f(x) = \frac{x^2 - 6x + 8}{x - 4},$$

$$(II) f(x) = \frac{x^2 + 1}{x^2 - 1},$$

$$(V) f(x) = \frac{1}{x^3},$$

$$(III) f(x) = \frac{1}{x^2 - 1},$$

$$(VI) f(x) = \frac{x^4 - 1}{x - 1}.$$

4. Hallar las asíntotas de las funciones y comprobar si en algún caso la asíntota corta a la gráfica de la función calculando, en su caso, el punto de corte:

$$(I) f(x) = \frac{x}{1 + x^2},$$

$$(III) f(x) = \frac{x^3}{(1 + x)^2},$$

$$(II) f(x) = \frac{3x^2}{25 - x^2},$$

$$(IV) f(x) = \frac{x}{x^2 - 6x + 9}.$$

5. Estudiar la continuidad de las siguientes funciones $f, g, h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ indicando, en su caso, el tipo de discontinuidades que presentan:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 0 \\ 2x - 3, & x > 0 \end{cases} \quad g(x) = \begin{cases} \ln|x|, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases} \quad h(x) = \begin{cases} \frac{x^3 + x^2 + x - 3}{x - 1}, & x \neq 1 \\ 2008, & x = 1 \end{cases}$$

6. Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} (x^2 + 1)^{\frac{1}{x}}, & x \neq 0 \\ a, & x = 0 \end{cases}$$

hallar el valor de a para que sea continua.

7. Dada la función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x - 1, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x < 1 \\ 2, & x \geq 1, \end{cases}$$

calcular los valores de a y b para que sea continua.

8. Usar el Teorema de Bolzano para justificar que la ecuación $x + \ln x = e$ tiene al menos una solución real.

Apuntes elaborados por César Rosales y modificados por Magdalena Caballero y Francisco Torralbo.
Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada.