TEMA 5: Aplicaciones Lineales. Diagonalización.

1. Aplicaciones Lineales

1.1. Definición, propiedades y ejemplos.

Definición 1. Dados dos espacios vectoriales V y V' sobre un mismo cuerpo K, una aplicación $f : V \to V'$ se dice que es una aplicación lineal u homomorfismo de espacios vectoriales si para cualesquiera dos vectores $u, v \in V$ y para todo escalar $\lambda \in K$, se verifica

1. $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
2. $f(\lambda u) = \lambda f(u)$.

En el caso de $V = V'$ se dice que f es un endomorfismo de espacios vectoriales.

Las dos condiciones de la definición anterior se pueden sintetizar en una sola, diciendo que f es una aplicación lineal si y sólo si

$$\forall u, v \in V \quad \text{y} \quad \forall \lambda, \mu \in K, \quad f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)$$

Es decir, cuando la imagen de una combinación lineal de vectores sea igual a la combinación lineal de las imágenes de cada uno de ellos.

A partir de la definición de aplicación lineal se deducen las siguientes propiedades inmediatas:

- $f(\overrightarrow{0}_V) = \overrightarrow{0}_{V'}$
- $f(-u) = -f(u)$
- $f(\sum_{i=1}^{k} \lambda_i v_i) = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i f(v_i)$

Ejemplos 2.

1. Toda aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de la forma $f(x) = a \cdot x$, siendo $a \in \mathbb{R}$, es una aplicación lineal.
2. La aplicación nula $f : V \to V$ definida por $f(v) = \overrightarrow{0}$ es una aplicación lineal.
3. La aplicación $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ no es lineal ya que en general $f(x_1 + x_2) \neq f(x_1) + f(x_2)$.
4. La aplicación de $\mathcal{M}_n(K)$ en K que hace corresponder a cada matriz cuadrada su traza es una aplicación lineal. Sin embargo, aquella que hace corresponder a cada matriz cuadrada su determinante, no es lineal (¿Por qué?).
5. La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (3x + y,\ y - 4z)$ es lineal.
6. La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (3x + y,\ y - 4z + 2)$ no es lineal. Basta observar que $f(0, 0, 0) = (0, 2) \neq (0, 0)$.
7. La aplicación $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y^2, y - z)$ tampoco es lineal.

   Por ejemplo, tomando $u = v = (0, 1, 0)$ se puede comprobar facilmente que $f(u + v) \neq f(u) + f(v)$.

   Observar que en este caso sí se cumple que $f(0, 0, 0) = (0, 0)$.

Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, con $dim_K(V) = n$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para V. Supongamos que $f : V \to V'$ es una aplicación lineal tal que

$$f(v_1) = u'_1,\ f(v_2) = u'_2, \ldots, f(v_n) = u'_n.$$

Puesto que $\mathcal{B}$ es una base para V, cualquier vector $v \in V$ se puede expresar (y de modo único) como combinación lineal de $\mathcal{B}$. Supongamos que

$$v \overset{\mathcal{B}}{=} (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n), \quad \text{es decir,} \quad v = \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n$$

Por la linealidad de f,

$$f(v) = f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_n v_n) = \lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_n f(v_n) = \lambda_1 u'_1 + \lambda_2 u'_2 + \ldots + \lambda_n u'_n.$$

Ésto nos dice que:

Propiedad 3. *Toda aplicación lineal queda totalmente definida o determinada en cuanto especificamos las imágenes de los vectores de una base del espacio vectorial dominio.*

Ejemplo 4. Si $V = \mathbb{R}^2$ y $V' = \mathbb{R}$, entonces ya que el conjunto $\{(1,1), (1,-1)\}$ es una base para V, existirá una única aplicación lineal $f : V \to V'$ tal que $f(1,1) = 5$ y $f(1,-1) = -2$. ¿Cual es la expresión para dicha aplicación lineal? Dado un vector cualquiera $v = (x, y) \in V$, resolviendo el oportuno sistema de ecuaciones, lo expresamos como combinación lineal de la base dada:

$$v = (x, y) = \frac{x+y}{2} \cdot (1,1) + \frac{x-y}{2} \cdot (1,-1).$$

Ahora aplicando que f ha de ser lineal calculamos $f(v)$ y obtenemos

$$f(v) = f(x, y) = f\left(\frac{x+y}{2} \cdot (1,1) + \frac{x-y}{2} \cdot (1,-1)\right) =$$

$$\frac{x+y}{2} \cdot f(1,1) + \frac{x-y}{2} \cdot f(1,-1) = \frac{x+y}{2} \cdot 5 + \frac{x-y}{2} \cdot (-2) = \frac{3x+7y}{2} = \frac{3}{2}x + \frac{7}{2}y.$$

A continuación presentamos algunas propiedades de las aplicaciones lineales en relación con los subespacios vectoriales:

Proposición 5. *Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y $f : V \to V'$ una aplicación lineal.*

1. *Si U es un subespacio vectorial de V entonces su conjunto imagen $f_*(U)$ es un subespacio vectorial de V'. Como caso particular, tomando $U = V$, obtenemos que $Im(f) = f_*(V) = f_*(U)$ es un subespacio vectorial de V' denominado el* subespacio imagen *de f.*
2. *Si U' es un subespacio vectorial de V' entonces el conjunto de sus preimágenes $f^*(U')$ es un subespacio vectorial de V. En el caso particular de $U' = \{\overrightarrow{0_{V'}}\}$, obtenemos que $f^*(U') = f^*(\{\overrightarrow{0_{V'}}\})$ es un subespacio vectorial de V, denominado el* subespacio núcleo *de f. El núcleo de f se suele representar como $Ker(f)$ o bien como $N(f)$.*

Ejemplos 6.

1. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = a \cdot x$, siendo $a \neq 0$, es inmediato comprobar que $Im(f) = \mathbb{R}$ y que $N(f) = \{0\}$, ya que dicha aplicación es biyectiva.
2. Para la aplicación nula $f : V \to V'$ $(f(v) = \overrightarrow{0}$, para todo $v \in V)$, se verifica que $Im(f) = \{\overrightarrow{0}\}$ y $N(f) = V$.
3. Calculemos el núcleo de la aplicación lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, x - z)$.
   Un vector $v = (x, y, z) \in N(f)$ si y sólo si $f(v) = (0, 0)$, es decir, cuando verifica
$$\left.\begin{array}{rcrcrcl} x & + & y & & & = & 0 \\ x & & & - & z & = & 0 \end{array}\right\}.$$
   Las ecuaciones anteriores son unas ecuaciones implícitas para $N(f)$; resolviendo el sistema obtenemos unas ecuaciones paramétricas para $N(f)$:
$$\left.\begin{array}{rcr} x & = & \lambda \\ y & = & -\lambda \\ z & = & \lambda \end{array}\right\}.$$
   Por tanto, $\mathcal{B}_{N(f)} = \{(1, -1, 1)\}$ es una base para $N(f)$.
4. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_2[x]_4 \to \mathbb{Z}_2[x]_4$ que a cada polinomio del dominio le hace corresponder su polinomio derivado. Dado $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4$, transformamos $p(x)$ en el polinomio $p'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + 4a_4x^3$. Pero en $\mathbb{Z}_2$, $2 = 4 = 0$, luego $p'(x) = a_1 + 3a_3x^2 = a_1 + a_3x^2$.
   Calculemos $N(f)$: es claro a partir de lo anterior que $p(x) \in N(f)$ si y sólo si $p'(x)$ es el polinomio nulo, es decir si $a_1 = a_3 = 0$, en $\mathbb{Z}_2$. Por tanto $N(f)$ está formado por todos los polinomios del tipo $a_0 + a_2x^2 + a_4x^4$ y una base para el núcleo de f es por tanto $B_{N(f)} = \{1, x^2, x^4\}$.
   Por otra parte, $B_{Im(f)} = \{1, x^2\}$ es una base para la imagen de f.

Estudiemos más propiedades de las aplicaciones lineales:

Proposición 7. *Dada una aplicación lineal $f : V \to V'$, si $\mathcal{S}$ es un conjunto de generadores para V, entonces $f_*(\mathcal{S})$ es un conjunto de generadores para $Im(f)$.*

Demostración. Supongamos que $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots\}$. Entonces $f_*(\mathcal{S}) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r), \ldots\}$. Si $v' \in Im(f)$, tenemos que probar que es posible expresar v' como combinación lineal de los vectores de $f_*(\mathcal{S})$.

Ya que $v' \in Im(f)$, significa que existe un vector $v \in V$ tal que $f(v) = v'$. Pero por hipótesis $\mathcal{S}$ es un sistema de generadores para V, luego podemos suponer que $v = \lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_rv_r$. Por la linealidad de f,
$$v' = f(v) = f(\lambda_1v_1 + \lambda_2v_2 + \ldots + \lambda_rv_r) = \lambda_1f(v_1) + \lambda_2f(v_2) + \ldots + \lambda_rf(v_r),$$
lo cual nos dice que $f_*(\mathcal{S})$ genera a $Im(f)$. □

Ejemplo 8. Calculemos una base para la imagen de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida por $f(x, y, z) = (x + 2y + 3z, 3x - y + 2z, 2x - y + z, y + z)$. $Im(f)$ está generada por los vectores $f(1,0,0) = (1,3,2,0)$, $f(0,1,0) = (2,-1,-1,1)$, $f(0,0,1) = (3,2,1,1)$. Si los escribimos como filas de una matriz y le aplicamos operaciones elementales de fila hasta llegar a una forma escalonada obtenemos sólo dos filas no nulas. Por tanto una base para $Im(f)$ sería $\{(1,3,2,0),(2,-1,-1,1)\}$.

Para toda aplicación lineal, las dimensiones de los subespacios núcleo e imagen están relacionadas de la siguiente forma:

Proposición 9. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales sobre K, siendo V de dimensión finita. Entonces:*

$$dim_K V = dim_K N(f) + dim_K Im(f).$$

Demostración. Supongamos que $dim_K(V) = n$, $\{v_1,\ldots,v_r\}$ es una base para el núcleo de f y el conjunto ampliado $S = \{v_1,\ldots,v_r,v_{r+1},\ldots,v_n\}$ es una base para V. Por la proposición anterior, el conjunto $f_*(S) = \{\overrightarrow{0}, f(v_{r+1}),\ldots,f(v_n)\}$ es un sistema de generadores para $Im(f)$. Entonces, para demostrar la proposición, simplemente hay que razonar que el conjunto $\{f(v_{r+1}),\ldots,f(v_n)\}$ de vectores de V' es linealmente independiente y por tanto es una base para la imagen de f. $\square$

Esta fórmula resulta útil al resolver ejercicios. Para el ejemplo anterior podemos deducir que el núcleo es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ de dimensión igual a 1.

Definición 10. Un isomorfismo de V en V' es una aplicación lineal biyectiva de V en V'. Si f es biyectiva, entonces existe la aplicación inversa $f^{-1} : V' \to V$ la cual se puede demostrar que también es lineal. Por tal motivo se dice simplemente que los espacios vectoriales V y V' son isomorfos y se escribe $V \cong V'$.

El que dos espacios vectoriales V y V' sean isomorfos, significa que ambos son esencialmente el mismo espacio vectorial, diferenciándose tan solo en los nombres que reciben los respectivos elementos y operaciones en cada uno de ellos. Así por ejemplo, si $\mathcal{B}$ es una base para V entonces $f_*(\mathcal{B})$ es una base para V'.

Ejemplos 11.

1. El espacio vectorial $\mathbb{Q}[x]_2$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{Q}^3$. Un isomorfismo del primero en el segundo viene dado por la aplicación que transforma
$$a_0 + a_1x + a_2x^2 \longmapsto (a_0,a_1,a_2).$$
2. El espacio vectorial $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ es isomorfo al espacio vectorial $\mathbb{R}^4$, mediante el isomorfismo
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \longmapsto (a,b,c,d).$$
3. Si V es un espacio vectorial sobre K de dimensión n y $\mathcal{B}$ es una base para V, entonces la aplicación $f : V \to K^n$ definida por
$$v \longmapsto (\lambda_1,\ldots,\lambda_n), \quad \text{siendo} \quad v \overset{\mathcal{B}}{=} (\lambda_1,\ldots,\lambda_n),$$
es un isomorfismo de espacios vectoriales.

Como consecuencia obtenemos que:

Proposición 12. *Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K tal que $dim_K(V)$ es finita. Entonces*

$$V \cong V' \iff dim_K(V) = dim_K(V').$$

Veamos propiedades que caracterizan a las aplicaciones lineales sobreyectivas:

Proposición 13. *Para toda aplicación lineal $f : V \to V'$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *f es sobreyectiva.*
2. *Si S es un conjunto de generadores para V entonces $f_*(\mathcal{S})$ es un conjunto de generadores para V'.*

Demostración.

1. ($1 \Rightarrow 2$) Es consecuencia de la Proposición 7, pues si además f es sobreyectiva entonces $Im(f) = V'$.
2. ($2 \Rightarrow 1$) Ya que todo espacio vectorial V tiene al menos una base $\mathcal{B}$, y por tanto un conjunto de generadores, aplicando la hipótesis resulta que $f_*(\mathcal{B})$ es un conjunto de generadores para V'. De nuevo, según la Proposición 7, $f_*(\mathcal{B})$ es siempre un conjunto de generadores para $Im(f)$. Como conclusión, $V' = Im(f)$ y por tanto f es sobreyectiva.

□

Una aplicación lineal sobreyectiva también se denomina un epimorfismo de espacios vectoriales.

Ahora para las aplicaciones lineales inyectivas:

Proposición 14. *Para toda aplicación lineal $f : V \to V'$, son equivalentes las siguientes afirmaciones:*

1. *f es inyectiva.*
2. *$N(f)$ es trivial, es decir, $N(f) = \{\overrightarrow{0}\}$.*
3. *Para todo subconjunto $\mathcal{S}$ de V linealmente independiente, resulta que $f_*(\mathcal{S})$ es un subconjunto de V' linealmente independiente.*

Demostración.

1. ($1 \Rightarrow 2$) Supongamos que $v \in N(f)$. Ésto significa que $f(v) = \overrightarrow{0}$. Pero toda aplicación lineal verifica que $f(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$, luego $f(v) = \overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{0})$, y ya que f es inyectiva implica que $v = \overrightarrow{0}$.
2. ($2 \Rightarrow 3$) Supongamos ahora que $N(f) = \{\overrightarrow{0}\}$, $\mathcal{S} = \{v_1, v_2, \ldots, v_r, \ldots\}$ es un subconjunto de V linealmente independiente y $f_*(\mathcal{S}) = \{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_r), \ldots\}$. Entonces hemos de probar que $f_*(\mathcal{S})$ es un subconjunto de V' linealmente independiente. Si

$$\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2) + \ldots + \lambda_r f(v_r) = \overrightarrow{0}_{V'}$$

por la linealidad de f obtenemos que $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r) = \overrightarrow{0}_{V'}$, es decir, que $\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r \in N(f)$, y ya que $N(f) = \{\overrightarrow{0}\}$, ésto implica que

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \ldots + \lambda_r v_r = \overrightarrow{0}.$$

Pero los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_r$ son linealmente independientes por hipótesis, luego $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_r = 0 \in K$. Hemos probado que el conjunto $f_*(\mathcal{S})$ es linealmente independiente.

3. ($3 \Rightarrow 1$) Supongamos ahora (3) y que $f(u) = f(v)$. Hemos de deducir que $u = v$. La hipótesis $f(u) = f(v)$ podemos reescribirla de modo equivalente como $f(u - v) = \overrightarrow{0}_{V'}$. La única posibilidad de que esta hipótesis sea compatible con la afirmación (3) es que $u - v = \overrightarrow{0}$, pues de lo contrario, f transformaría el conjunto linealmente independiente $\{u - v\}$ formado por un sólo vector no nulo, en el conjunto $\{\overrightarrow{0}_{V'}\}$ linealmente dependiente. Luego $u - v = \overrightarrow{0}$, es decir $u = v$ y por tanto f es inyectiva.

$\square$

Así por ejemplo, si una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ verifica que $f(1,1,0) = (2,-3)$ y $f(0,4,1) = (-4,6)$, entonces podemos concluir que f no es inyectiva, ya que transforma un conjunto de vectores linealmente independiente $\{(1,1,0),(0,4,1)\}$ en un conjunto linealmente dependiente $\{(2,-3),(-4,6)\}$.

Una aplicación lineal inyectiva entre espacios vectoriales también se denomina un **monomorfismo** de espacios vectoriales.

En el caso particular en el que $dim(V) = dim(V') = n$ se verifica:

Corolario 15. *Para dos espacios vectoriales V y V' sobre K, ambos de dimensión n, y una aplicación lineal $f : V \to V'$, son equivalentes:*

1. *f es inyectiva.*
2. *f es sobreyectiva.*
3. *f transforma una base para V en una base para V'.*
4. *f es un isomorfismo de espacios vectoriales.*

1.2. Aplicaciones lineales y matrices. Como veremos en esta sección, dada una aplicación lineal f, en cuanto fijamos una base para el dominio y otra base para el codominio, obtenemos una matriz la cual representa a la aplicación lineal f. El estudio de f se reduce al estudio de la matriz asociada.

Sean V y V' dos espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, de dimensiones 3 y 2, respectivamente. Supongamos que $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ es una base para V, y $\mathcal{B}' = \{v_1', v_2'\}$ es una base para V'. Ya sabemos que cualquier aplicación lineal de V en V' queda totalmente determinada en cuanto especificamos las imágenes de los vectores de una base para V. Sea f la única aplicación lineal de V en V' tal que

$$\begin{array}{l} f(v_1) = a_{1,1}v_1' + a_{2,1}v_2' \\ f(v_2) = a_{1,2}v_1' + a_{2,2}v_2' \\ f(v_3) = a_{1,3}v_1' + a_{2,3}v_2' \end{array}.$$

Dado un vector $v \in V$ tal que $v \overset{\mathcal{B}}{=} (x_1, x_2, x_3)$ y $f(v) \overset{\mathcal{B}'}{=} (y_1, y_2)$ vamos a derivar unas expresiones que relacionen las coordenadas x_i del vector v con las coordenadas y_j del vector imagen $f(v)$.

Ya que estamos suponiendo que $v = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3$, aplicamos f a ambos miembros y por la linealidad obtenemos que $f(v) = x_1f(v_1) + x_2f(v_2) + x_3f(v_3)$.

Reemplazando los $f(v_i)$ por las igualdades anteriores, resulta:

$$f(v) = x_1(a_{1,1}v'_1 + a_{2,1}v'_2) + x_2(a_{1,2}v'_1 + a_{2,2}v'_2) + x_3(a_{1,3}v'_1 + a_{2,3}v'_2).$$

Quitando paréntesis y sacando factor común cada v'_j, se obtiene:

$$f(v) = (x_1a_{1,1} + x_2a_{1,2} + x_3a_{1,3})v'_1 + (x_1a_{2,1} + x_2a_{2,2} + x_3a_{2,3})v'_2,$$

o equivalentemente

$$f(v) \overset{\mathcal{B}'}{=} (x_1a_{1,1} + x_2a_{1,2} + x_3a_{1,3},\ x_1a_{2,1} + x_2a_{2,2} + x_3a_{2,3}).$$

Pero estábamos suponiendo que $f(v) \overset{\mathcal{B}'}{=} (y_1, y_2)$, luego por la unicidad de las coordenadas de un vector respecto de una base se obtiene:

$$\left.\begin{array}{ccccccc} y_1 & = & a_{1,1}x_1 & + & a_{1,2}x_2 & + & a_{1,3}x_3 \\ y_2 & = & a_{2,1}x_1 & + & a_{2,2}x_2 & + & a_{2,3}x_3 \end{array}\right\},$$

que son las ecuaciones de la aplicación lineal f con respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$, y que nos permiten calcular las coordenadas en la base $\mathcal{B}'$ para $f(v)$, conocidas las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ para v. Otra forma de expresar dichas ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

con lo que resulta la expresión matricial de la aplicación lineal f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$.

La matriz

$$A(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(K)$$

se llama la matriz asociada a la aplicación lineal f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$. Cuando las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ se sobreentiendan, simplemente escribiremos A_f. Observar que:

- el número de columnas de $A_f = dim_K(V) = 3$, y
- el número de filas de $A_f = dim_K(V') = 2$.

El argumento dado es facilmente generalizable a espacios vectoriales de dimensiones finitas arbitrarias. En el caso particular en el que $V = V'$ y además $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, hablaremos simplemente de la matriz asociada a f respecto de la base $\mathcal{B}$.

Observar que las columnas de A_f son precisamente las coordenadas de los vectores $f(v_i)$ en la base $\mathcal{B}'$, es decir, son las coordenadas de las imágenes de una base para V (y por tanto de un sistema de generadores para V); como consecuencia, las columnas de A_f representan a vectores que generan al subespacio $Im(f)$. Recordando la definición de rango de una matriz, obtenemos

$$\boxed{dim_K(Im(f)) = rg(A_f)}$$

Proposición 16. *Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal entre dos espacios vectoriales tales que $dim_K(V) = n$ y $dim_K(V') = m$; sea $A_f \in \mathcal{M}_{m\times n}(K)$ la matriz asociada a f con respecto de ciertas bases para V y V'. Entonces:*

- *f es sobreyectiva $\Longleftrightarrow rg(A_f) = m$.*
- *f es inyectiva $\Longleftrightarrow rg(A_f) = n$.*
- *f es biyectiva $\Longleftrightarrow rg(A_f) = m = n$.*

Demostración.

1. f es sobreyectiva $\Longleftrightarrow Im(f) = V' \Longleftrightarrow dim_K(Im(f)) = dim_K(V') \Longleftrightarrow rg(A_f) = m$.
2. f es inyectiva $\Longleftrightarrow N(f) = \{\overrightarrow{0}\} \Longleftrightarrow dim_K(N(f)) = 0 \Longleftrightarrow$ (aplicando la Proposición 9) $dim_K(V) = dim_K(Im(f)) \Longleftrightarrow n = rg(A_f)$.
3. Es consecuencia de los dos apartados anteriores.

□

Observamos que si $m = n$ entonces A_f es una matriz cuadrada de orden n y rango n, lo cual equivale a que sea una matriz regular; por tanto podemos enunciar el siguiente corolario:

Corolario 17. *Con la misma notación que en la Proposición anterior, se verifica que f es un isomorfismo si y sólo si A_f es una matriz regular.*

Ejemplo 18. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y, z, t) = (x+y, y+z-t)$. Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ y $\mathcal{B}' = \{e'_1, e'_2\}$ son las bases canónicas de $\mathbb{R}^4$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, entonces

$$\left.\begin{array}{rcl} f(e_1) & = & (1,0) \\ f(e_2) & = & (1,1) \\ f(e_3) & = & (0,1) \\ f(e_4) & = & (0,-1) \end{array}\right\},$$

luego la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es

$$A(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}') = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $rg(A) = 2$, entonces $dim_K(Im(f)) = 2$, lo cual implica que f es una aplicación sobreyectiva. Al ser $n = 4 > m = 2$, f no puede ser inyectiva.

Ejemplo 19. Si suponemos que $V = V'$ y $\mathcal{B} = \mathcal{B}'$, entonces la matriz de la aplicación identidad en V (la cual es lineal) con respecto de cualquier base $\mathcal{B}$ de V, es justamente la matriz identidad de orden igual a $dim_K(V)$.

Ejemplo 20. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 - x_3, x_2 + x_3, -x_3)$. Si $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$, entonces

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

es la expresión matricial de f respecto de la base $\mathcal{B}$.

Luego la matriz de f respecto de la base canónica es

$$A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Como $rg(A) = 3 = dim(\mathbb{R}^3)$, entonces A_f es una matriz regular y deducimos por tanto que f es una aplicación lineal biyectiva, es decir, un isomorfismo de espacios vectoriales.

Ejemplo 21. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tal que $f(x, y) = (4x + 3y, 3x + 2y)$.

Entonces $A_f = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$, y ya que $|A_f| = -1 \neq 0$, deducimos que A_f es una matriz regular y por tanto f es un isomorfismo de espacios vectoriales. Además la matriz asociada a f^{-1} es $A_f^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$, y por tanto $f^{-1}(x, y) = (-2x + 3y, 3x - 4y)$.

La justificación de la definición tradicional para el producto de matrices está en la siguiente Proposición:

Proposición 22. *Sean V, V' y V'' tres espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K, y sean $\mathcal{B}$, $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ bases respectivas para los espacios anteriores. Entonces si $f : V \to V'$ y $g : V' \to V''$ son dos aplicaciones lineales tales que la matriz de f respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}'$ es A_f y la matriz de g respecto de las bases $\mathcal{B}'$ y $\mathcal{B}''$ es A_g, entonces la matriz de la aplicación lineal compuesta $g \circ f : V \to V''$ respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{B}''$ es $A_g \cdot A_f$.*

Como una ilustración de esta propiedad:

Ejemplo 23. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ del ejemplo anterior para la cual la matriz respecto de la base canónica $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^3$ era

$$A(f, \mathcal{B}, \mathcal{B}) = A_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Podemos afirmar que la matriz de la aplicación lineal compuesta $f^2 = f \circ f$ respecto de la base $\mathcal{B}$ es

$$A_{f^2} = A_f \cdot A_f = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 24. Sean $\mathcal{B}_1 = \{v_1, v_2, v_3\}$ y $\mathcal{B}'_1 = \{u_1, u_2\}$ bases para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente, con respecto de las cuales la matriz de una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es igual a

$$A(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix}$$

Sean $\mathcal{B}_2 = \{v'_1, v'_2, v'_3\}$ y $\mathcal{B}'_2 = \{u'_1, u'_2\}$, tales que $v'_1 = v_1 + v_3$, $v'_2 = v_1 + v_2$, $v'_3 = 2v_1 + v_2 + 2v_3$, y $u'_1 = u_1 - 3u_2$, $u'_2 = -2u_1 + 7u_2$. Es inmediato comprobar que $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}'_2$ son bases para $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$, respectivamente. Vamos a calcular $A(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2)$. Para ello planteamos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 & \\ & & & & \\ & \mathcal{B}_1 & \overset{A(f,\mathcal{B}_1,\mathcal{B}'_1)}{\longrightarrow} & \mathcal{B}'_1 & \\ P & \uparrow & & \uparrow & Q \\ & \mathcal{B}_2 & \overset{A(f,\mathcal{B}_2,\mathcal{B}'_2)}{\longrightarrow} & \mathcal{B}'_2 & \end{array}$$

siendo P la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$, y Q la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'_2$ a $\mathcal{B}'_1$. Entonces se verifica que

$$A(f, B_2, B'_2) = Q^{-1} \cdot A(f, \mathcal{B}_1, \mathcal{B}'_1) \cdot P$$

A partir de la información dada acerca de las bases obtenemos que:
$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $Q = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 7 \end{pmatrix}$, con lo cual $Q^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$. Por tanto

$$A(f, \mathcal{B}_2, \mathcal{B}'_2) = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 3 & 8 \\ 3 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46 & 5 & 105 \\ 20 & -8 & 35 \end{pmatrix}.$$

Por tanto la expresión de f respecto de las bases $\mathcal{B}_2$ y $\mathcal{B}'_2$ es

$$f(x, y, z) = (46x + 5y + 105z, 20x - 8y + 35z)$$

1.3. Ejercicios Propuestos.

1. Si V, V', V'' son tres espacios vectoriales sobre un mismo cuerpo K y $f : V \to V'$, $g : V' \to V''$ son aplicaciones lineales, demostrar que la aplicación compuesta $g \circ f : V \to V''$ es también una aplicación lineal.
2. Sea V un espacio vectorial de dimensión 3 sobre $\mathbb{Q}$ y $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$ una base para V. Comprobar que la información siguiente determina un único endomorfismo de V:

$$f(v_1 - v_2) = -7v_1 + v_3, \quad f(3v_1 + v_2 - v_3) = -v_1 + v_2, \quad f(v_1 + v_2 + 2v_3) = 4v_1 - v_3.$$

   A continuación calcular $f(5v_1 - 7v_2 + v_3)$.
3. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^4$, $f(x, y, z, u, v) = (y - 3z, x + z, -2x + y + u - v, -x + 2y - 2z + u - v)$ calcular una base para el núcleo y unas ecuaciones cartesianas para el subespacio imagen.

4. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^4 \to \mathbb{Q}^4$ definida por $f(x,y,z,t) = (x+y-z-t, x-y-z-t, 2x+4y-2z-2t, 2x-2z-2t)$, y los subespacios vectoriales $U = \{(x,y,z,t) \mid 3x+7y-5z+2t=0\}$ y $W = \langle (7,-1,5,14), (9,2,-1,-1), (14,-2,10,28) \rangle$ de $\mathbb{Q}^4$. Calcular:
   a) Base, ecuaciones implícitas y ecuaciones paramétricas para el subespacio $f_*(U)$.
   b) Base, ecuaciones implícitas y ecuaciones paramétricas para el subespacio $f_*(W)$.
5. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}[x]_3 \to \mathbb{R}[x]_3$ correspondiente a la "derivada". Obtener la expresión matricial de f con respecto a la base canónica. A continuación obtener la expresión matricial de f con respecto a la base $\{1, x-a, (x-a)^2, (x-a)^3\}$.
6. Probar que no existe ninguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verificando que $f(1,2,1) = f(4,5,2) = (0,0,0)$ y $f(1,5,3) = (6,7,8)$. Probar que sí existe una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verificando que $f(1,2,1) = f(4,5,2) = (0,0,0)$ y $f(1,5,-3) = (6,7,8)$.
7. Probar que no existe ninguna aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ verificando que $f(4,1,2) = f(3,7,8) = (0,0,0)$, $f(1,2,3) = (0,1,1)$, $f(1,1,1) = (0,0,1)$
8. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida como $f(x,y,z) = (x+7y, -x+4z)$. Calcular la expresión matricial de f respecto de las bases $\mathcal{B} = \{(1,1,1), (1,1,0), (0,1,0)\}$ y $\mathcal{B}' = \{(1,1), (1,0)\}$.
9. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$ definida por $f(x,y) = (\frac{3}{2}x - y,\ x + \frac{1}{3}y)$, calcular la expresión de la aplicación compuesta $f^4 = f \circ f \circ f \circ f$.
10. Construir una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ de manera que $(1,2,1) \in N(f)$ y $(4,0,-1), (5,1,0) \in Im(f)$. ¿Cuánto puede valer $dim(N(f) \cap Im(f))$?
11. Sea $h : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ definida por $h(x,y,z,t) = (2x+5y+t, y+z-t, 3x-a^2y+7z, x+ay+z+t)$. ¿Qué condición debe verificar a para que h sea un isomorfismo?
12. Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$f(x,y,z) = (a \cdot x + y + z, x + a \cdot y + z, x + y + a \cdot z)$$
tenga $N(f)$ de la máxima dimensión posible, y dar una base para $Im(f)$ en dicho caso.
13. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V. Probar que $f^2 = \mathbf{0}$ (el endomorfismo nulo) si y sólo si $Im(f) \subseteq N(f)$.
14. Determinar $a \in \mathbb{R}$ para que el endomorfismo f de $\mathbb{R}^3$ definido por
$$f(x,y,z) = (x + a^2 \cdot y + z, 7x + a \cdot y + z, x + y - 5z)$$
sea un isomorfismo.
15. Un endomorfismo $f : V \to V$ se llama un proyector si $f \circ f = f$. Probar que:
   a) f es un proyector si y sólo si $\mathbf{1}_V - f$ lo es.
   b) Si f es un proyector entonces $V = N(f) \oplus Im(f)$.
   c) Calcular todos los valores posibles para $a, b \in \mathbb{R}$ tales que el endomorfismo $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x,y) = (ax+by, bx+ay)$ es un proyector.
16. Calcular la matriz de la aplicación identidad para $\mathbb{R}^3$ con respecto de las bases $\{(2,1,-1), (-1,1,0), (1,2,-2)\}$ y $\{(-1,4,1), (1,1,1), (5,-1,3)\}$. ¿Qué es lo que hemos calculado en realidad?

17. Dar una interpretación geométrica para los endomorfismos de $\mathbb{R}^3$ definidos por las siguientes matrices:

$$(a)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (b)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (c)\ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (d)\ \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

18. Calcular la expresión respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^2$ de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que verifica $f(-1,1) = (8,-6)$ y $f(1,-2) = (23,-4)$.
19. Sea $f : V \to V'$ aplicación lineal. Si $\{v_1, \dots, v_r\}$ es una base para $N(f)$ y $\{v_1, \dots, v_r, v_{r+1}, \dots, v_n\}$ es una base para V, probar que el conjunto $\{f(v_{r+1}), \dots, f(v_n)\}$ es linealmente independiente.
20. Dada la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z) = (x-y, x+y+z, 2x+z)$, encontrar una base B para el dominio y otra B' para el codominio de modo que

$$A(f,B,B') = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(Sugerencia: partir de una base B para N(f) y ampliarla hasta una base para $\mathbb{R}^3$)
21. Hallar las ecuaciones implícitas del subespacio $U = \{(x,y,z) : x + 7y + 5z = 0\}$ de $\mathbb{Q}^3$ con respecto a la base $\mathcal{B} = \{v_1, v_2, v_3\}$, siendo $v_1 = (3,1,-4)$, $v_2 = (5,6,2)$, $v_3 = (1,-1,1)$.
22. Para una aplicación lineal $f : V \to V'$ y un subespacio vectorial U' de V', explicar cómo se puede calcular una base para el subespacio $f^*(U')$ de V. A continuación, calcular una base para el subespacio preimagen de $U' = \langle (1,0,-1), (0,1,1) \rangle$ mediante la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, $f(x,y,z,t) = (2x+3y-z+t, 4x-y-z-t, 7y-z+t)$.

2. Diagonalización

2.1. Definiciones, propiedades y ejemplos. Sea f un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n sobre un cuerpo K.

Un escalar $\lambda \in K$ se dice que es un autovalor o un valor propio de f si existe al menos un vector no nulo $v \in V$ tal que $f(v) = \lambda \cdot v$; a cada uno de tales vectores no nulos se les denomina un vector propio o autovector asociado al autovalor λ. El conjunto formado por todos los autovalores de un endomorfismo f se denomina el espectro de f, y se denota por $\sigma(f)$.

Ejemplo 25. Para la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y) = (6x-2y, 6x-y)$, se tiene que $\lambda = 3$ es un autovalor ya que existe el vector $v = (2,3)$ verificándose que $f(2,3) = (6,9) = 3 \cdot (2,3)$, es decir, $f(v) = \lambda \cdot v$. El vector $v = (2,3)$ es por tanto un autovector asociado al autovalor $\lambda = 3$.

Proposición 26. *Para todo endomorfismo $f : V \to V$ se verifican las siguientes propiedades:*

1. *Si λ es un valor propio de f, entonces el conjunto $V(\lambda) = \{v \in V : f(v) = \lambda \cdot v\}$ es un subespacio vectorial de V, llamado el* subespacio propio asociado *a λ (observar que aunque por definición el vector cero no es un vector propio asociado a λ, sin embargo sí pertenece a $V(\lambda)$).*
2. *Si λ_1 y λ_2 son dos autovalores distintos de f, entonces $V(\lambda_1) \cap V(\lambda_2) = \{\overrightarrow{0}\}$*
3. *Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ son autovalores distintos de f y $v_1, \ldots, v_r$ son autovectores asociados a $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$, respectivamente, entonces $\{v_1, \ldots, v_r\}$ es un conjunto linealmente independiente.*

El apartado (3) se demuestra por inducción sobre r. Los apartados (1) y (2) quedan propuestos para los ejercicios.

Si f y g son dos endomorfismos de V y $\alpha, \beta \in K$ entonces podemos definir un nuevo endomorfismo $\alpha \cdot f + \beta \cdot g$ de V, como

$$(\alpha \cdot f + \beta \cdot g)(v) = \alpha \cdot f(v) + \beta \cdot g(v) \text{ para todo } v \in V.$$

Observemos que si $\mathcal{B}$ es una base para V tal que $M(f, \mathcal{B}) = A_f$ y $M(g, \mathcal{B}) = A_g$, entonces $M(\alpha \cdot f + \beta \cdot g, \mathcal{B}) = \alpha \cdot A_f + \beta \cdot A_g$. Recordemos también que $\mathbf{1}_V$ representa la aplicación identidad de V, la cual es además una aplicación lineal. Con esta notación podemos enunciar:

Proposición 27. *Para un endomorfismo $f : V \to V$ y un escalar $\lambda \in K$ se verifica que λ es un autovalor de f si y sólo si el endomorfismo $f - \lambda \cdot \mathbf{1}_V$ no es inyectivo; además, $V(\lambda) = N(f - \lambda \cdot \mathbf{1}_V)$.*

Vamos a dar un método para calcular los valores propios de un endomorfismo. Sean V un espacio vectorial de dimensión n sobre K, $\mathcal{B}$ una base para V y $f : V \to V$ un endomorfismo de V. Supongamos que la matriz asociada a f con respecto a la base $\mathcal{B}$ es $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}_n(K)$ y por tanto la expresión matricial de f con respecto a $\mathcal{B}$ es $X' = A \cdot X$, siendo $X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$ y $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$, respectivamente, las matrices columna que representan las coordenadas de los vectores v y $f(v)$ con respecto a base $\mathcal{B}$.

De acuerdo con la Proposición anterior, λ es un autovalor de f si y sólo si el endomorfismo $f - \lambda \cdot \mathbf{1}_V$ no es inyectivo; la matriz asociada a este endomorfismo (con respecto a $\mathcal{B}$) es $A - \lambda \cdot I_n$, con lo cual obtenemos que λ es un autovalor de f si y sólo si la matriz $A - \lambda \cdot I_n$ no es regular, es decir, $|A - \lambda \cdot I_n| = 0$. La expresión $|A - x \cdot I_n|$ es un polinomio $p(x)$ de grado n en x con coeficientes en K, y se denomina el polinomio característico de f. La ecuación $p(x) = 0$ se llama ecuación característica de f.

Como ya notamos en el capítulo anterior, si f es un endomorfismo de un espacio vectorial V de dimensión n sobre K, para cada base $\mathcal{B}$ de V el endomorfismo f se representa mediante una matriz de $M_n(K)$ que denotábamos como $M(f, \mathcal{B})$. Además al elegir otra base $\mathcal{B}'$ para V entonces $M(f, \mathcal{B}') = P^{-1} \cdot M(f, \mathcal{B}) \cdot P$, siendo P la matriz del cambio de base de $\mathcal{B}'$ a $\mathcal{B}$.

En general, dadas dos matrices $A_1, A_2 \in M_n(K)$, se dice que A_1 es semejante a A_2 si existe una matriz regular $R \in M_n(K)$ tal que $A_1 = R^{-1} \cdot A_2 \cdot R$. Tal y como el ejercicio 2 propone, la semejanza de matrices es una relación de equivalencia por lo que simplemente diremos que A_1 y A_2 son semejantes. Por consiguiente el comentario del párrafo precedente significa que las matrices $M(f, \mathcal{B})$ y $M(f, \mathcal{B}')$ son semejantes. Esta correspondencia entre endomorfismos y matrices nos permite trasladar los conceptos ya definidos para endomorfismos tales como autovalor, autovector, polinomio característico, etc así como los siguientes para matrices cuadradas.

Según el ejemplo 1, la matriz asociada a f respecto de la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$, por lo que podemos decir que $\lambda = 3$ es un autovalor de la matriz A y el vector columna $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ es un vector propio asociado al autovalor $\lambda = 3$ de A. Además el polinomio característico de A es $p(x) = x^2 - 5x + 6$.

Proposición 28. *Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio caracteristico; dicho de otro modo, el polinomio característico de un endomorfismo f no depende de la base $\mathcal{B}$ elegida.*

Demostración. Supongamos dos matrices A y A' semejantes, es decir, tales que existe una matriz cuadrada regular P del mismo orden que las anteriores tal que $A' = P^{-1} \cdot A \cdot P$. Entonces

$$A' - xI_n = P^{-1} \cdot A \cdot P - xI_n = P^{-1} \cdot A \cdot P - xP^{-1} \cdot I_n \cdot P = P^{-1}(A - x \cdot I_n)P$$

y al tomar determinantes

$$|A' - xI_n| = |P^{-1}(A - x \cdot I_n)P| = |P^{-1}| \cdot |A - x \cdot I_n| \cdot |P| = |A - x \cdot I_n|.$$

□

Definimos el espectro de f como el conjunto de las raices de $p(x)$ que pertenecen a K. Si $\lambda \in K$ es un autovalor de f, se define la multiplicidad algebraica de λ como la multiplicidad de la raíz $x = \lambda$ en el polinomio $p(x)$, es decir, el mayor número natural m tal que $(x-\lambda)^m$ divide a $p(x)$. Escribiremos $ma(\lambda)$ para denotar la multiplicidad algebraica del autovalor λ. Si $ma(\lambda) = 1$ se dice que λ es un autovalor simple de f.

Por tanto ya tenemos los elementos suficientes para calcular todos los valores propios de un endomorfismo dado así como los vectores propios asociados a éstos.

Ejemplo 29. Para el endomorfismo $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definido por $f(x, y, z) = (5x + z, x + y, -7x + y)$, calcular sus valores propios y sus subespacios propios asociados.

La matriz asociada a f con respecto de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ es

$$A_f = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

con lo cual el polinomio característico de f es

$$|A_f - x \cdot I_3| = \begin{vmatrix} 5-x & 0 & 1 \\ 1 & 1-x & 0 \\ -7 & 1 & -x \end{vmatrix} = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8$$

Buscando las raices racionales y dividiendo por el método de Ruffini obtenemos que $p(x) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = -(x-2)^3$. Por tanto f tiene un único valor propio $\lambda = 2$ con multiplicidad algebraica $ma(\lambda) = 3$. El subespacio propio asociado a $\lambda = 2$ es el conjunto de soluciones del sistema lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes es $A - 2 \cdot I_3$, es decir

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo dicho sistema resulta $x_1 = \delta,\ x_2 = \delta,\ x_3 = -3\delta$. Por tanto una base para $V(2)$ es $\{(1, 1, -3)\}$.

Prosiguiendo con la notación anterior, puesto que $V(\lambda) = N(f - \lambda \cdot \mathbf{1}_V)$, entonces $dim(V(\lambda)) = dim(N(f - \lambda \cdot \mathbf{1}_V))$. Pero además $n = dim(V) = dim(N(f - \lambda \cdot \mathbf{1}_V)) + dim(Im(f - \lambda \cdot \mathbf{1}_V))$, con lo cual $dim(V(\lambda)) = n - dim(Im(f - \lambda \cdot \mathbf{1}_V))$. Recurriendo a la matriz asociada a f en la base $\mathcal{B}$ de V obtenemos finalmente que

$$dim(V(\lambda)) = n - rg(A - \lambda \cdot I_n).$$

Al valor de $dim(V(\lambda))$ se le denomina la **multiplicidad geométrica** del autovalor λ de f, y lo representaremos como $mg(\lambda)$.

Las multiplicidades algebraica y geométrica de un autovalor λ están siempre relacionadas como indica la siguiente proposición:

Proposición 30. *Si λ es un autovalor de un endomorfismo f, entonces* $1 \le mg(\lambda) \le ma(\lambda)$.

La idea de la demostración consiste en elegir una base para el subespacio $V(\lambda)$ y ampliarla hasta una base $\mathcal{B}$ para V. A continuación calcular $p(x)$ usando la matriz asociada a f respecto de $\mathcal{B}$.

Observar que en el ejemplo anterior se obtuvo $mg(\lambda) = 1 \le 3 = ma(\lambda)$.

Definición 31. Un endomorfismo $f : V \to V$ se dice **diagonalizable** cuando existe una base $\mathcal{B}$ para V en la cual su matriz asociada $M(f, \mathcal{B})$ es una matriz diagonal. De igual forma decimos que una matriz $A \in M_n(K)$ es diagonalizable si existe una matriz regular $P \in M_n(K)$ tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ es una matriz diagonal.

Las siguientes proposiciones dan un criterio práctico para saber cuando una matriz cuadrada (y por tanto un endomorfismo) es o no diagonalizable:

Proposición 32. *Una matriz $A \in M_n(K)$ es diagonalizable si y sólo si K^n posee una base $\mathcal{B}$ formada por vectores propios para la matriz A. En tal caso, una matriz P tal que $P^{-1} \cdot A \cdot P$ sea diagonal se obtiene escribiendo los n vectores de $\mathcal{B}$ por columnas.*

Proposición 33. *Sean $A \in M_n(K)$ y $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ los valores propios de A. Entonces A es diagonalizable si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $ma(\lambda_1) + \cdots + ma(\lambda_r) = n$
2. $ma(\lambda_i) = mg(\lambda_i)$ *para cada* i

La condición (1) de la Proposición anterior nos dice que todas las raices características de A han de pertenecer al cuerpo K. Si por ejemplo estamos considerando una matriz sobre $\mathbb{Q}$ cuyo polinomio característico es $p(x) = (x^2 - 2)(x^2 - 1)$ entonces dicha matriz no será diagonalizable sobre $\mathbb{Q}$ aunque sí sobre $\mathbb{R}$ (ver el corolario siguiente).

Corolario 34. *Si una matriz $A \in M_n(K)$ tiene n autovalores distintos, entonces A es diagonalizable.*

Ejemplos 35. Para cada uno de los siguientes endomorfismos, estudiar si es diagonalizable y en caso afirmativo encontrar una base que lo diagonalice.

1. $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (3x + z, x - y, -7y + y - 2z)$.

   La matriz de f en la base canónica es $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -7 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ y el polinomio característico es

$$\begin{vmatrix} 3 - x & 0 & 1 \\ 1 & -1 - x & 0 \\ -7 & 1 & -2 - x \end{vmatrix} = -x^3$$

   El espectro de f es $\sigma(f) = \{0\}$.

   Aplicando los resultados anteriores se obtiene $dimV(\lambda = 0) = 3 - rg(A - \lambda I_3) = 3 - rg(A) = 3 - 2 = 1$, con lo cual $mg(\lambda) = 1$. Debido a que $ma(\lambda) = 2$, la Proposición 33 nos dice que f (y por tanto A) no es diagonalizable.

2. $f : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q}^2$, $f(x, y) = (x + 4y, x)$

   El polinomio característico de f es $p(x) = x^2 - x - 4$, y las raices son $x = \frac{1 \pm \sqrt{17}}{2}$, las cuales no pertenecen al cuerpo $\mathbb{Q}$. Por tanto f no es diagonalizable. Observar que si el cuerpo hubiera sido $\mathbb{R}$ entonces f sí sería diagonalizable por el Corolario anterior.

3. $f : \mathbb{Q}^3 \to \mathbb{Q}^3$, $f(x, y, z) = (5x + 6y + z, -7y - 2z, 5z)$.

   La matriz asociada a f respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 1 \\ 0 & -7 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$$

   El polinomio característico es $p(x) = (5 - x)^2(-7 - x)$, con lo cual el espectro de f es $\sigma(f) = \{\lambda_1 = 5, \lambda_2 = -7\}$, y $ma(\lambda_1) = 2, ma(\lambda_2) = 1$.

   Calculamos una base para cada subespacio propio:

   $V(\lambda_1) = \{(x, y, z) : 6y + z = 0\}$. Entonces los vectores de $V(\lambda_1)$ son de la forma $(x, y, z) = (x, y, -6y)$, y $\mathcal{B}_{V(\lambda_1)} = \{(1, 0, 0), (0, 1, -6)\}$ es una base para $V(\lambda_1)$ y $mg(\lambda_1) = 2$.

   $V(\lambda_2) = \{(x, y, z) : -2x + 6y + z = 0,\ -2z = 0\}$. Entonces los vectores de $V(\lambda_2)$ son de la forma $(x, y, z) = (3y, y, 0)$, y $\mathcal{B}_{V(\lambda_2)} = \{(3, 1, 0)\}$ es una base para $V(\lambda_2)$ y $mg(\lambda_2) = 1$.

Por tanto según la Proposición 33, f es diagonalizable al considerar la base $\mathcal{B} = \{(1,0,0),(0,1,-6),(3,1,0)\}$. Además una matriz P que diagonaliza a la matriz A es $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -6 & 0 \end{pmatrix}$ verificándose que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 36. Comprobar que la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ es diagonalizable y encontrar una matriz P que la diagonalice.

El polinomio característico es $p(x) = (1-x)(x+4)(x-3)$ con lo cual los valores propios $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -4$ todos pertenecen a $\mathbb{R}$ y son simples. Por consiguiente A es diagonalizable.

Se calcula facilmente que $\mathcal{B}_{V(\lambda_1)} = \{(1,0,3)\}$, $\mathcal{B}_{V(\lambda_2)} = \{(3,2,-1)\}$ y $\mathcal{B}_{V(\lambda_3)} = \{(3,-5,-1)\}$.

Una matriz P que diagonaliza a la matriz A es $P = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ verificándose que

$$P^{-1} \cdot A \cdot P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

En ejemplos como este último, podemos afirmar que la matriz dada es diagonalizable sin tener que realizar ningun cálculo, ya que:

Proposición 37. *Si $A \in M_n(\mathbb{R})$ es una matriz simétrica, entonces todos los autovalores de A pertenecen a $\mathbb{R}$ y A es diagonalizable.*

2.2. Ejercicios.

1. Dar una demostración para los aparartados (1) y (2) en la Proposición 26.
2. Demostrar que la relación de semejanza de matrices es una relación de equivalencia en $M_n(K)$.
3. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_2(K)$ comprobar que el polinomio característico de A es igual a $p(x) = x^2 - tr(A) \cdot x + |A|$.
4. El **Teorema de Cayley-Hamilton** afirma que si $p(x)$ es el polinomio característico de la matriz cuadrada A, entonces $p(A) = \mathbf{0}$. Usar el resultado del ejercicio anterior constatar el Teorema de Cayley-Hamilton para $n = 2$.
5. Para una matriz cuadrada A, probar que las factorizaciones de los polinomios $p(x) = |A - x \cdot I|$ y $q(x) = |x \cdot I - A|$ se diferencian a lo sumo en un signo.

6. Diagonalizar la siguiente matriz con coeficientes en $\mathbb{Q}$:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Q})$, encontrar una fórmula lo más simple posible para A^n, siendo n un natural cualquiera.
8. Demostrar que $\lambda = 0$ es un autovalor de A si y sólo si A es una matriz singular.
9. Calcular el polinomio característico para la matriz identidad y para la matriz nula de orden n.
10. Sea A una matriz cuadrada cuyo polinomio característico es $p_A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$. Probar que $a_n = (-1)^n$, $a_{n-1} = (-1)^{n-1} \cdot tr(A)$ y $a_0 = |A|$. Deducir de aquí que $\lambda = 0$ es un valor propio de A si y sólo si A no es una matriz regular.
11. Probar que una matriz cuadrada y su traspuesta siempre tienen el mismo polinomio característico.
12. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ es el espectro de la matriz A, describir el espectro de las matrices siguientes:

    (a) A^t (b) $r \cdot A$ $(r \in \mathbb{R})$ (c) A^m $(m \in \mathbb{N})$ (d) A^{-1} (si A es regular)

13. Estudiar si la matriz $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ es diagonalizable, siendo $\alpha \in \mathbb{R}$.
14. Estudiar si la matriz $\begin{pmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ con coeficientes en $\mathbb{C}$ es diagonalizable. Contrastar el resultado obtenido con la Proposición 37.
15. Encontrar todos los valores $a, b \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 \\ a & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es diagonalizable
16. Sean $A, B \in M_n(K)$ tal que A es diagonalizable. Probar que A y B son matrices semejantes si y sólo si B es diagonalizable y tiene la misma forma diagonal que A.
17. Probar que las matrices siguientes no son semejantes:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{pmatrix}, \qquad A_1 = \begin{pmatrix} -3 & 1 & -1 \\ -7 & 5 & -1 \\ -6 & 6 & -2 \end{pmatrix}$$

18. Dados $a, b, c, d \in \mathbb{R}$, calcular el polinomio característico de la matriz siguiente:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -a & -b & -c & -d \end{pmatrix}$$

Dar una generalización de este hecho y deducir que todo polinomio de $K[x]$ de grado mayor o igual que 1 es el polinomio característico de alguna matriz cuadrada con coeficientes en K.

19. Dar una demostración de la Proposición 37 para el caso $n = 2$.
20. Sea $A \in M_n(K)$ una matriz diagonalizable tal que todos sus valores propios tienen una raíz cuadrada en K. Demostrar que existe una matriz $C \in M_n(K)$ tal que $C^2 = A$, es decir, A tiene una raíz cuadrada. Encontrar una matriz $C \in M_2(\mathbb{R})$ tal que $C^2 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.
21. Sea la aplicación $f : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ definida por $f(A) = \frac{A+A^t}{3}$. Entonces f es una aplicación lineal cuyo núcleo tiene dimensión:

    a) 1 b) 2 c) 3 d) 4

3. Ejercicios aparecidos en exámenes anteriores

1. Sea $f : (\mathbb{Z}_{13})^3 \to (\mathbb{Z}_{13})^3$ la aplicación lineal dada por:
$$f(x, y, z) = (7x + 12y + 4z, x + 6y + 3z, 5x + 6y + 12z).$$
    a) Hallar la matriz de f en la base canónica (llamémosla A).
    b) Estudiar si f es diagonalizable, y en caso afirmativo hallar una base de vectores propios.
    c) Calcular A^{2431}.
    d) Hallar $f^{2432}(1, 2, 3)$.
2. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por
$$f(x, y, z) = (x - y + 2z, x + y - z, 4x - 2y + 5z).$$
    Entonces
    a) los subespacios núcleo e imagen de f son iguales,
    b) $f^*(\{(-1, 1 - 2)\}) = \varnothing$,
    c) el subespacio núcleo de f tiene dimensión 0,
    d) el subespacio imagen de f tiene dimensión 2.
3. Sea la matriz
$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_5),$$
    sobre la cual se sabe que $\lambda = 3$ es un valor propio. Sea α la multiplicidad algebraica y d la multiplicidad geométrica de λ. Entonces
    a) $d = 2$ y $\alpha = 2$
    b) $d = 1$ y $\alpha = 1$
    c) $d = 1$ y $\alpha = 2$
    d) $d = 2$ y $\alpha = 1$

4. Sean A la matriz asociada a una aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de las bases canónicas. Supongamos que existe un número real a tal que $f(2u+v) = a^2 \cdot u + f(v)$ para cualesquiera $u, v \in \mathbb{R}^3$. Entonces
   a) la matriz A es diagonalizable independientemente del valor de a,
   b) la matriz A no es diagonalizable, sea cual sea el valor de a,
   c) la matriz A es diagonalizable sólo para un número finito de valores de a,
   d) los datos del enunciado son muy generales y a partir de ellos no se puede conocer si la matriz A es o no diagonalizable.
5. Sea $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la aplicación lineal definida por $f(x, y, z) = (x + y, 2x + 2y)$. La dimensión del núcleo de f es

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

6. Los valores propios de la matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & 7 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

   son

   a) $\{1, 3, 0\}$ b) $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ c) $\{0, 1, 2, 3\}$ d) No tiene valores propios

7. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_3)$$

   una matriz cuyos valores propios son 0 y 1. Los espacios propios de A tienen por ecuaciones
   a) $V_0 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x + y + 2z = 0\}$
   b) $V_0 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x + 2y = 0\}$ y $V_1 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x + y + 2z = 0\}$
   c) $V_0 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x + 2y = 0 \\ x + y + 2z = 0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid x + y + 2z = 0\}$
   d) $V_0 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x + 2y = 0 \\ z = 0 \end{smallmatrix}\right\}$ y $V_1 = \left\{(x, y, z) \in (\mathbb{Z}_3)^3 \mid \begin{smallmatrix} x + y = 0 \\ z = 0 \end{smallmatrix}\right\}$
8. Sea $A = \left(\begin{smallmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{smallmatrix}\right) \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Z}_p)$ con $\lambda_1 \neq \lambda_3$ (p es un número primo). Entonces
   a) A es diagonalizable y la base canónica es una base de vectores propios.
   b) A es diagonalizable y todos los vectores de $(\mathbb{Z}_p)^3$ son propios.
   c) A no es diagonalizable.
   d) A es diagonalizable si y sólo si $\lambda_1^2 + \lambda_2\lambda_3 = 0$.
9. Consideremos la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por $f(x, y, z) = (x + y, x + z, 2x + y + z)$. Entonces
   a) La dimensión de la imagen de f es 2.

b) La dimensión del núcleo de f es 2.
c) f es sobreyectiva.
d) f es inyectiva.

10. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{Z}_5),$$

a) A tiene dos valores propios de multiplicidades algebraicas 1 y 2 respectivamente.
b) A tiene tres valores propios.
c) A tiene un único valor propio de multiplicidad algebraica 3.
d) A tiene un único valor propio de multiplicidad algebraica 1.

11. La matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ \frac{-3}{2} & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{Q})$$

representa un endomorfismo de $\mathbb{Q}^3$ en $\mathbb{Q}^3$. Una base de $\mathbb{Q}^3$ formada por vectores propios de A es
a) $\{(0,1,1),(0,-1,1),(4,-3,1)\}$
b) $\{(0,4,1),(1,-1,1),(4,-3,1)\}$
c) $\{(0,1,1),(0,-1,1),(0,0,2)\}$
d) $\{(0,1,1),(0,-1,1),(1,-1,1)\}$

12. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ tal que $A^2 = 0$. Entonces:
a) $A = 0$,
b) A es regular,
c) 0 es el único valor propio de A,
d) todos los valores propios de A son estrictamente positivos.

13. Sea $f : \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^2$ una aplicación lineal no sobreyectiva tal que $(1,0,0,0) \in \mathrm{Ker}(f)$, $(0,1,2,0) \in \mathrm{Ker}(f)$ y $(1,1) \in \mathrm{Im}(f)$. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa?
a) $\dim \mathrm{Ker}(f) = 3$
b) $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$
c) $(0,0,1,1) \in \mathrm{Ker}(f)$ y $(0,0,0,2) \in \mathrm{Ker}(f)$
d) $(2,2,1,0) \in \ker(f)$ y $(0,0,0,1) \in \mathrm{Ker}(f)$

14. Sea $f : \mathbb{Z}_5^4 \to \mathbb{Z}_5^4$ la aplicación lineal cuya matriz con respecto de la base canónica es

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 1 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una de las siguientes afirmaciones es falsa:
a) $(3,3,2,4)$ es un vector propio de valor propio 0,

b) $(1,4,1,0)$ es un vector propio de valor propio 4,
c) f tiene dos valores propios,
d) f tiene tres vectores propios.

15. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{Z}_7^4 \to \mathbb{Z}_7^3$ definida por

$$f(x,y,z,t) = (x+y+t, x-z-t, 2x+y-z).$$

Entonces la dimensión del núcleo de f es igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

16. Sea $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ una matriz triangular superior con coeficientes en $\mathbb{Z}$ y tal que $|A| = 5$. Entonces:
a) A no es diagonalizable,
b) A sólo es diagonalizable si es simétrica,
c) A tiene como máximo tres valores propios distintos,
d) A tiene exactamente tres valores propios distintos.

17. Sea $f : \mathbb{Z}_3^4 \to \mathbb{Z}_3^2$ una aplicación lineal no sobreyectiva. ¿Cuál de las siguientes afirmaciones es necesariamente falsa?
a) $(2,2,1,0) \in \ker(f)$ y $(0,0,0,1) \in \mathrm{Ker}(f)$,
b) $(2,2,1,0) \in \ker(f)$, $(0,0,0,1) \in \mathrm{Ker}(f)$ y $(1,2) \in \mathrm{Im}(f)$,
c) $\dim \mathrm{Ker}(f) = 2$,
d) $\dim \mathrm{Im}(f) = 1$.

18. Sea A la matriz

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

¿Cuál de las siguientes afirmaciones es falsa?
a) A es diagonalizable.
b) Los valores propios de A son 0 y 3.
c) 3 es valor propio de A con multiplicidad algebraica igual a 2.
d) Las multiplicidades geométricas de todos los valores propios de A valen 1.

19. Sea la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x,y,z) = (x+y,\ x-z)$. Entonces la dimensión del núcleo de f es igual a:

a) 3 b) 0 c) 2 d) 1

20. Sea A una matriz cuadrada con coeficientes en $\mathbb{R}$ y con determinante igual a cero. Entonces:
a) A no es diagonalizable,
b) A solo es diagonalizable si es simétrica,
c) el producto de los valores propios de A vale cero,
d) $\lambda = 0$ es el único valor propio de A.

21. Sea $f : V \to V'$ una aplicación lineal inyectiva y $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ una base para V. Entonces $\{f(v_1), f(v_2), \ldots, f(v_n)\}$...

a) es una base para V'.
b) es un sistema de generadores para V'.
c) es un conjunto de vectores linealmente independientes.
d) es un conjunto de vectores linealmente dependientes.