Tema 1: Magnitudes físicas, unidades y patrones

Conceptos previos

La física estudia la naturaleza, el mundo material, usando el **método científico**:

1. Observación (examen crítico y cuidadoso de los fenómenos, notando y analizando los factores y circunstancias que parecen influirlos)

2. Experimentación (observación de fenómenos en condiciones preparadas y controladas ya que en la naturaleza no siempre ofrecen la suficiente variación o flexibilidad para explorar todas las posibilidades)

3. Establecimiento de un modelo teórico (a partir del experimento se pueden deducir nuevos conocimientos de forma teórica y establecer un modelo teórico para el fenómeno observado que permita hacer predicciones de fenómentos no observados o verificar relaciones entre procesos).

4. Comprobación del mismo (mediante la realización de nuevos experimentos se comprueba la validez y las limitaciones del modelo teórico propuesto)

Observación: El observador analiza ciertos entes o fenómenos (*Observables*) que se caracterizan por ciertos efectos y que son percibidos directa o indirectamente (mediante instrumentos) por los sentidos. La física sólo se va a ocupar por aquellos observables que son *comparables*. Dados dos observables (A_1) y (A_2) decimos que son observables comparables si podemos definir *operacionalmente* y *universalmente* una razón entre ellos:

$$\frac{(A_1)}{(A_2)} = n \Longleftrightarrow (A_1) = n(A_2) \qquad (A_1) \quad \text{es } n \text{ veces } (A_2)$$

- Operacionalmente: Tenemos que decir el procedimiento experimental, el método y el instrumento utilizado para compararlos y definir dicha razón.
- Universalmente: La razón debe ser independiente del instrumento utilizado para realizar la comparación y del observador.
- Definida la razón podemos definir suma, producto, resta, división entre observables (A_i).

Hay otros observables que no sabemos comparar: dolor, belleza, etc. Estos observables no son objetos de la física[2].

Magnitud: Conjunto de todos los observables que son comparables entre sí. Es algo abstracto, lo concreto son cada uno de los observables que constituyen esa magnitud. P.e. todos los observables longitud son comparables entre sí, lo que nos lleva a definir el concepto de magnitud "longitud".

Cantidad: Cada uno de los observables (A_1),(A_2), ... correspondientes a una determinada magnitud A. Una vez definida la razón entre dos observables podemos definir suma, producto, resta, división entre entre cantidades de observables (A_i).

Supongamos dados $(A_0), (A_1), (A_2)$... tal que

$$\frac{(A_1)}{(A_0)} = n_1; \quad \frac{(A_2)}{(A_0)} = n_2; \quad \frac{(A_3)}{(A_0)} = n_3$$

es decir, todas las hemos comparado con una misma cantidad. Se tiene que

$$n_1 = n_2 \Longrightarrow (A_1) = (A_2); \qquad n_3 = n_1 + n_2 \Longrightarrow (A_3) = (A_1) + (A_2)$$

[2]Hoy en día algunos observables que se consideraban no comparables podrían considerarse comparables mediante otros observables asociados a ellos, por ejemplo, un rostro se considera bello cuando sigue determinadas proporciones que sí pueden ser comparadas con las de otro rostro, o bien cuando se definen determinados patrones de belleza.

$\Rightarrow$ podemos operar entre observables comparables sin más que tener en cuenta la relación entre razones. Esta comparación frente a (A_0) permite definir el concepto de *unidad de una magnitud.*

Unidad de una magnitud: Es una cantidad U_A de dicha magnitud, elegida arbitrariamente, respecto a la que se compara cualquier otra candidad de la misma magnitud:

$$\frac{(A)}{U_A} = n \Longleftrightarrow (A) = nU_A$$

n me indica las veces que la cantidad (A) contiene la unidad U_A y a ese número lo llamamos medida.

Medida: Razón que se obtiene al comparar una cantidad (A) con la unidad U_A:

$$(A) = nU_A$$
$$cantidad = medida \times unidad$$

Si tenemos otra unidad U'_A para comparar la (A) la nueva medida va a ser distinta:

$$\frac{(A)}{U'_A} = n' \Longrightarrow \frac{n}{n'} = \frac{(U'_A)}{(U_A)}$$

es decir el cociente de las medidas es igual a la razón inversa del cociente de las unidades.

Las magnitudes se clasifican en:

- Primarias: Aquellas que no vienen definidas a través de otras magnitudes mediante relación o fórmula.
- Secundarias: Vienen definidas a partir de otras a través de fórmulas.

Ejemplo:

Una partícula se mueve en el espacio con una aceleración $a = 5m/s^2$:

Magnitud: aceleración

Cantidad: la aceleración de esa partícula $5m/s^2$

Unidad: $1m/s^2$

Medida: 5

Fórmulas de las leyes físicas

- Tras la observación de los fenómenos y la comparación de los observables, los físicos buscan encontrar patrones y principios que los relacionen, y que constituyen las teorías físicas.
- Cuando están muy bien establecidas y contrastadas experimentalmente se denominan leyes y principios físicos.
- Una teoría bien establecida puede ser falseada por nuevas observaciones o observaciones más precisas $\Rightarrow$ concepto de rango de validez de una teoría física.
- Las leyes fundamentales de la física se escriben generalmente de la forma,

$$(y) \propto (x_1)^{\beta_1}(x_2)^{\beta_2}...(x_n)^{\beta_n} \text{ (producto de n monomios)}$$

  una relación de proporcionalidad entre cantidades de distintas magnitudes elevadas a ciertos exponentes. Los $\beta_{1,}\beta_2...\beta_n$ caracterizan la ley física de que se trata. Los $(y), (x_1), ..., (x_n)$ son las cantidades de las magnitudes que entran en juego en dicha ley.

  - Esta forma de expresar una ley física fundamental tiene el carácter de **Universalidad** pues es independiente del sistema de unidades elegido al usar cantidades y no medidas.

- Desde un punto de vista matemático y más práctico interesa trabajar con medidas y no con cantidades. Debemos de pasar de esa relación de proporcionalidad entre cantidades a una igualdad entre medidas $\Rightarrow$ hay que utilizar un sistema de unidades:

$$y = x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_n^{\beta_n} \qquad (medidas).$$

Al cambiar el sistema de unidades aparecerán otros valores de las medidas $\Rightarrow$no se cumpliría el requisito de universalidad de la ley física. Tenemos que introducir una constante de proporcionalidad C de forma que C cambie de manera conveniente (al cambiar de sistema de unidades) para que siempre el primer miembro sea igual al segundo, es decir

$$y = C x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_n^{\beta_n}$$

[3]

Las constantes las podemos clasificar en

- Constantes características: dependen de la naturaleza de los cuerpos que intervienen en el fenómeno y del medio en el que se produce. P.e. las constantes y los módulos de elasticidad (Ley de Hooke).

[3] Ejemplo: La 2ª ley de Newton se escribe $(f) \sim (m_i)\ (a) \Rightarrow f = m\ a$. En el sistema internacional de unidades, S.I., $(U_f = 1N, U_{m_i} = 1kg, U_a = 1m/s^2)$, si tenemos las cantidades

$$(f) = 2N$$
$$(m) = 2kg$$
$$(a) = 1m/s^2$$

la relacion entre medidas es $2 = 2 \times 1$ es decir $f = m\ a \Rightarrow$ si usamos otro sistema de unidades tal que $U_f = 1N, U_m = 2kg, U_a = 1m/s^2$, la relacion entre cantidades anterior implica ahora $2 \neq 1 \times 1$, es decir tenemos que introducir una contante C=2 para que se mantenga la igualdad entre medidas, es decir ahora $f = C\ m\ a$. Se tendrá por tanto que $C = 1$ para el primer sistema de unidades y $C = 2$ para el segundo.

- Universales: No dependen de la naturaleza de los cuerpos ni del medio: $G, k_B, h, R, N_A, c, \epsilon_0 ...$

En definitiva tenemos

$$(y) \propto (x_1)^{\beta_1}(x_2)^{\beta_2}...(x_n)^{\beta_n} \Rightarrow y = C x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_n^{\beta_n} \Rightarrow C = \frac{y}{x_1^{\beta_1} x_2^{\beta_2} ... x_n^{\beta_n}}$$

Si cambia el sistema de unidades el valor de C cambiará pues cambian las medidas de las cantidades $\Rightarrow$ a cada ecuación fundamental le deberíamos de asignar una constante de proporcionalidad. ¿Podemos hacer que NO aparezcan las constantes en las leyes físicas, es decir tener $C = 1$.? Existe algún sistema de unidades tal que sean 1 todas las constantes que aparecen en todas las ecuaciones fundamentales que constituyen las leyes físicas (estas constantes han de ser universales, no tiene sentido esta pregunta en las características pues éstas dependen del material). La respuesta a esta pregunta es que *NO EXISTE NINGÚN SISTEMA DE UNIDADES QUE HAGA SIMULTÁNEAMENTE 1 TODAS LAS CONSTANTES UNIVERSALES:*

Ejemplo: la mecánica

$$(f) \sim (m)(a) \Rightarrow f = C\, m_i\, a$$

construimos un sistema de unidades tal $C = 1$. Elegimos arbitrariamente las unidades de masa inercial, espacio y tiempo,$U_{m_i} U_e, U_t$. En este caso no conozco la unidad de fuerza f y C :

- Primera posibilidad: Elijo arbitrariamente $U_f \Rightarrow C = \frac{f}{m_i a}$ viene condicionada a U_{m_i}, U_e, U_t, U_f.
- Segunda posibilidad: Impongo que $C = 1 \Rightarrow f$ tiene un valor condicionado a ese valor de C y por lo tanto como $f = \frac{(f)}{U_f}$ se tiene que U_f está condicionada a $C = 1$. Es decir si imponemos un valor a la constante ya no podemos elegir arbitrariamente todas las unidades. Con este sistema de unidades la 2ª ley de Newton se escribe

$$f = m_i a.$$

- Tenemos otra ley fundamental (Gravitación):

$$f = \alpha \frac{m_g m'_g}{r^2}$$

donde m_g es la masa gravitatoria. En general $m_g = \beta m_i$ (son proporcionales) $\Rightarrow$

$$f = \alpha \beta^2 \frac{m_i m'_i}{r^2} \equiv G \frac{m_i m'_i}{r^2}.$$

Utilizando ahora nuestro sistema de unidades tenemos determinados f, m_i, m'_i, r de forma que G no puede tomar cualquier valor sino que

$$G = \frac{f\, r^2}{m_i m'_i}$$

valor condicionado. Con este sistema de unidades G no va a valer 1. Debemos seguir manteniendo G en esta segunda ecuación. No podemos encontrar un S.U. que nos haga simultáneamente $C = G = 1$.

En el sistema de ecs. fundamentales de la Física, vamos a trabajar con S.U. que hagan 1 algunas constantes pero otras van a permanecer con valores determinados. En el ejemplo anterior el valor de G no condiciona el valor de α y β sino del producto $\alpha\beta^2$. Si $\alpha = 1$ entonces $\beta = \sqrt{G}$ luego $m_g = \sqrt{G} m_i$ y se tiene

$$f = \frac{m_g m'_g}{r^2} \quad \text{y} \quad f = G \frac{m_i m'_i}{r^2}.$$

Por el contrario si hacemos $\beta = 1$ entonces $G = \alpha$ y por lo tanto $m_g = m_i$ (son medidas). En este caso se tiene

$$f = G \frac{m_g m'_g}{r^2} \quad \text{y} \quad f = G \frac{m_i m'_i}{r^2}.$$

Esta segunda elección es la que se hace en Mecánica $\Rightarrow$ las medidas de m_g y de m_i son iguales $\Rightarrow$ una vez elegida la unidad de masa inercial, la unidad de masa gravitatoria será la masa gravitatoria que tiene un cuerpo que tenga una masa inercial igual a la unidad de masa inercial.

Las constantes que se han mantenido en las ecs. fudamentales de la física por no poder hacerse simultáneamente igual a 1 todas ellas son:

- Constante de la gravitación universal G
- Número de Avogrado N_A
- Velocidad de la luz en el vacío c
- Constante de Planck h
- Constante de Boltzmann k_B
- Permitividad eléctrica del vacío ϵ_0

También cualquier producto de las anteriores:

- Permeabilidad magnética en el vacío $\mu_0 = \frac{1}{c^2 \epsilon_0}$
- Constante de los gases $R = k_B N_A$

A estas constantes que no pueden hacerse 1 todas ellas simultáneamente las llamamos constantes universales *ineludibles.* Las restantes las llamamos constantes universales *supérfluas.*

Sistema coherente de unidades (SCU)

- Dado un sistema de ecs. diremos que un sistema de unidades es coherente respecto a dichas ecuaciones cuando haga 1 todas las constantes universales supérfluas que hay en las ecuaciones. Ejemplo:

  Sea $f = m\ a$ y sea $(U_f = 1N, U_{m_i} = 1kg, U_e = 1m, U_t = 1s)$. ¿Es coherente este sistema de unidadeses respecto a la 2ª ley de Newton?

  $$f\ (N) = m\ (kg)\ a\ (m/s^2)$$

  Se cumple esta relación pues $1N = 1kg \times 1m/s^2$. En cambio si $(U_f = 1N, U_{m_i} = 1T_m, U_e = 1m, U_t = 1s)$ no se cumpliría pues $1N \neq 1T_m \times 1m/s^2$ y tendríamos $f = C\ m\,a$ con $C = 10^{-3} \Rightarrow$ este segundo sistema de unidades no es coherente con la 2ª ley de Newton.

- Los sistemas de unidades más utilizados en física son el sistema internacional de unidades (S.I.), caracterizado por las unidades (mecánicas) $1m$, $1kg$, $1seg$, a los que hay que unir las unidades no mecánicas $1K$, $1A$, $1mol$, $1cd$ (candela) y el sistema c.g.s caracterizado por las unidades mecánicas $1cm$, $1gr$, $1seg$.

  - 1 segundo: tiempo necesario para que se produzcan $9, 192, 631, 770$ ciclos de la radición de microondas emitida en la transición entre los dos niveles más bajos del espectro de energía del isótopo Cs^{133} a $0°K$.
  - 1 metro: distancia que recorre la luz en el vacío durante 1/299,792,458 de segundo.

- $1\,kg$: masa que tiene el prototipo internacional (aleación de platino e iridio) que se guarda en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas (BIPM) en Sèvres, cerca de París (Francia) (no hay una definición a nivel atómico).

- En cuanto a los prefijos de las unidades físicas éstos significan:

Múltiplos	Submúltiplos
$Yotta = 10^{24}$	$deci = 10^{-1}$
$Zetta = 10^{21}$	$centi = 10^{-2}$
$Exa = 10^{18}$	$mili = 10^{-3}$
$Peta = 10^{15}$	$micro = 10^{-6}$
$Tera = 10^{12}$	$nano = 10^{-9}$
$Giga = 10^{9}$	$pico = 10^{-12}$
$Mega = 10^{6}$	$fento = 10^{-15}$
$Kilo = 10^{3}$	$atto = 10^{-18}$
$Hecto = 10^{2}$	$zepto = 10^{-21}$
$Deca = 10^{1}$	$yocto = 10^{-24}$

Concepto de dimensión

- El valor de una constante cambia al cambiar de sistema de unidades. ¿Cómo depende el valor de una constante cuando cambia el sistema coherente de unidades. Dado un sistema coherente de unidades cómo podemos construir otro sistema coherente de unidades respecto de las mismas ecuaciones.

- Al cambiar de sistema coherente de unidades, cual es el número de unidades que podemos coger arbitrariamente ahora para que las constantes sean 1. Supongamos que tenemos un sistema de unidades coherente para un determinado número m de ecs. físicas,

$$\text{Sist. Uni. Coh. } \{U_i\} = U_1, U_2 ... \qquad \prod_i x_i^{\beta_{ij}} = 1 \quad \begin{array}{c} i = 1...n \\ j = 1..., m \end{array} \quad \text{(m ecuaciones)}$$

x_i = medidas de magnitudes, constantes universales ineludibles o constantes características. β_{ij} =números adimensionales. Queremos construir un 2º sistema de unidades coherente, $\{U'_i\} = U'_1, U'_2...$ $\Rightarrow$ la forma de las ecs. no se modificarán sino sólo las medidas. Se cumple pues

$$\prod_i x_i'^{\beta_{ij}} = 1.$$

- Para relacionar las medidas en ambos sistemas de unidades coherentes definimos $[x_i] \equiv \frac{x_i}{x'_i} = \frac{U'_i}{U_i}$ (pues la magnitud es la misma). Sustituyendo x_i en el primer sistema de ecs. tenemos $\prod_i [x_i]^{\beta_{ij}} x_i'^{\beta_{ij}} = 1$, pero como $\prod_i x_i'^{\beta_{ij}} = 1$ se tiene trivialmente que cumplir

$$\prod_i [x_i]^{\beta_{ij}} = 1 \tag{1}$$

condición que tienen que cumplir los corchetes $[x_i]$ para que el nuevo sistema de unidades sea coherente $\Rightarrow$ una condiciones que deben de cumplir las nuevas unidades U'_i.

- Ejemplo la segunda ley de Newton:

$$\{U_i\} \text{ coherente } \Rightarrow f = m\ a$$
$$\text{Si } \{U_i'\} \text{ es coherente } \Rightarrow f' = m'\ a'$$

Introduciendo $[f] = \frac{f}{f'}$, $[m] = \frac{m}{m'}$, $[a] = \frac{a}{a'}$ en $f = m\ a$ se llega a

$$f'[f] = m'[m]\ a'[a] \Rightarrow f' = \frac{[m][a]}{[f]} m'\ a'$$

de forma que para que se cumpla $f' = m'\ a'$ se tiene necesariamente que la condición $\frac{[m][a]}{[f]} = 1$ ha de cumplirse. Es decir así se escribiría la condición (1) para el caso de la 2ª ley de Newton.

- Tomamos ahora logaritmos neperianos en (1). Se tiene:

$$\sum_i \beta_{ij} \ln[x_i] = 0 \quad \begin{array}{l} i = 1...n \\ j = 1..., m \end{array}$$

sistema de m ecuaciones (homogéneo) con n incógnitas ($\ln[x_i]$) y coeficientes constantes (β_{ij}). Puede ocurrir que todas las ecs. no sean independientes $\Rightarrow$ calculamos el rango de la matriz $\text{ran}(\beta_{ij}) = r \Rightarrow$ da el número de ecuaciones independientes[4]. El número de incógnitas que podemos elegir arbitrariamente es pues $k = n - r$. Como $[x_i] = \frac{U_i'}{U_i} \Rightarrow$ puedo tomar arbitrariamente k unidades de magnitudes en el nuevo sistema de unidades. Estas k magnitudes cuyas

[4]El rango de una matriz A se define como el número de filas (o columnas) que son linealmente independientes y es igual a la dimensión de la matriz cuadrada más grande que se puede formar a partir de A con determinante distinto de 0.

unidades puedo elegir arbitrariamente se llama *base dimensional* del sistema de la teoría física que estoy considerando; k se llama multiplicidad de la base. Es decir,

$$\begin{array}{l} [x_1], [x_2] ... [x_k] [x_{k+1}] ... [x_n] \\ \downarrow \quad \downarrow \quad\quad ... \downarrow \\ U'_1, \; U'_2 \; ... U'_k \end{array}$$

Las magnitudes que forman la base las llamamos fundamentales. Las restantes magnitudes derivadas. Podemos obtener el valor de los $r = n - k$ restantes:

$$[x_l] = \prod_i [x_i]^{\alpha_{il}} \quad \begin{array}{l} i = 1...k \\ l = 1...r \end{array} \tag{2}$$

Los exponentes α_{il} son la dimensión de la magnitud x_l en función de la base escogida. La fórmula dimensional (2) de una magnitud representa la dependencia, respecto de la base del sistema de unidades coherente escogido, de los valores de una cierta magnitud o de los valores de una cierta constante. Nos dice cual ha de ser la nueva unidad U'_l de x_l al cambiar de sistema de unidades para que esa nueva unidad U'_l pertenezca a un sistema de unidades coherente.

Ejemplo: dado el sistema de unidades $(U_m, U_l, U_t, U_\theta, U_q)$ (masa, longitud, tiempo, temperatura, carga eléctrica) definimos

$$\begin{array}{ccccc} [m] & [l] & [t] & [\theta] & [q] \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ M & L & T & \Theta & Q \end{array}$$

la **fórmula dimensional** para la magnitud genérica (x_r) en este sistema de unidades es

$$[x_r] = M^{\alpha_{1r}} L^{\alpha_{2r}} T^{\alpha_{3r}} \Theta^{\alpha_{4r}} Q^{\alpha_{5r}}$$

$$[x_r] = \frac{U'_{x_r}}{U_{x_r}} = \left(\frac{U'_m}{U_m}\right)^{\alpha_{1r}} \left(\frac{U'_l}{U_l}\right)^{\alpha_{2r}} \left(\frac{U'_t}{U_t}\right)^{\alpha_{3r}} \left(\frac{U'_\theta}{U_\theta}\right)^{\alpha_{4r}} \left(\frac{U'_q}{U_q}\right)^{\alpha_{5r}} \tag{3}$$

Si aquí, por ejemplo, $\alpha_{1r} = 0$ entonces el valor del primer factor no se modifica si hacemos un cambio en las unidades de masa. Queremos elegir un nuevo sistema de unidades coherente. En este podemos elegir arbitrariamente las unidades de la base, es decir $(U'_m, U'_l, U'_t, U'_\theta, U'_q)$. ¿Cual ha de ser la nueva unidad U'_{x_r} para que este sistema sea coherente?$\Rightarrow$ Despejamos U'_{x_r} en (3). En el caso de las contantes universales (que carecen de unidad propia) tenemos la misma situación:

$$[C] = M^{\alpha_{1r}} L^{\alpha_{2r}} T^{\alpha_{3r}} \Theta^{\alpha_{4r}} Q^{\alpha_{5r}}$$

$$\frac{C}{C'} = \left(\frac{U'_m}{U_m}\right)^{\alpha_{1r}} \left(\frac{U'_l}{U_l}\right)^{\alpha_{2r}} \left(\frac{U'_t}{U_t}\right)^{\alpha_{3r}} \left(\frac{U'_\theta}{U_\theta}\right)^{\alpha_{4r}} \left(\frac{U'_q}{U_q}\right)^{\alpha_{5r}} \tag{4}$$

y despejando C' tenemos el valor de la contante en el nuevo sistema coherente de unidades.

Análisis dimensional: Teorema de Π

Leyes físicas tienen que ser invariantes al pasar de un sistema de unidades coherente a otro.$\Rightarrow$ homogeneidad dimensional y matemática.

- Una ec. física es **homogéna dimensionalmente** hablando cuando todos los términos de la ec. tienen la misma dimensión o fórmula dimensional.

$$A = B \Rightarrow [A] = [B]$$
$$A = B + C \Rightarrow [A] = [B] = [C]$$

- Una ec. física ha de ser **matemáticamente homogénea:** Sea $y = f(x_1, x_2, ..., x_n)$ si se cumple que

$$f(\lambda_1 x_1, \lambda_2 x_2, ..., \lambda_n x_n) = \varphi(\lambda_1, ..., \lambda_n)\ f(x_1, ..., x_n)$$

entonces decimos que f es una *función homogénea.* Si se tiene $f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ y cambiamos de sistema de unidades y el nuevo sistema es coherente para que en el nuevo sistema se tenga $f(x'_1, x'_2, ..., x'_n) = 0$, esto se cumple si la función es homogéna desde el punto de vista matemático:

$$[x_i] = \frac{x_i}{x'_i} \qquad f(x'_i, ..., x'_n) = f(\tfrac{x_1}{[x_i]}, ..., \tfrac{x_n}{[x_n]}) \quad \text{(utilizando hogeneidad de } f\text{)}$$
$$= \varphi(\tfrac{1}{[x_i]}, ..., \tfrac{1}{[x_n]})\ \underbrace{f(x_i, ..., x_n)}_{0} = 0$$

El teorema de Π se basa en la construcción de ciertos monomios (llamados monomios π) de la siguiente forma: Si tenemos tres variables $x_1, x_2, x_3, \Rightarrow \pi = x_1^2 x_2^3 x_3^{-1}$ sería un monomio π. Es decir, los momonios π son productos de las variables que intervienen en un fenómeno físico elevados a ciertos exponentes:

- Monomios, o magnitudes, de dimensión cero o nula: los exponentes dimensionales son cero:

$$[x_i] = M^0 L^0 T^0 \Theta^0 Q^0 = 1$$
$$[\pi] = M^0 L^0 T^0 \Theta^0 Q^0 = 1$$

- Monomios π dimensionalmente independientes: Sean π_1, π_2 y hacemos

$$\prod_i \pi_i^{\omega_i} = 1 \begin{cases} \omega_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow \text{dimensionalmente independientes} \\ \exists j \quad \omega_j \neq 0 \Rightarrow \text{dimensionalmente dependientes} \end{cases}$$

o lo que es lo mismo, si tenemos un conjunto de magnitudes $x_1, x_2, ...$ hacemos el producto de los corchetes elevados a ciertos exponentes y lo igualamos a 1:

$$\prod_i [x_i]^{\omega_i} = 1 \begin{cases} \omega_i = 0 \quad \forall i \Rightarrow \text{dimensionalmente independientes} \\ \exists j \quad \omega_j \neq 0 \Rightarrow \text{dimensionalmente dependientes.} \end{cases}$$

La condición de independencia la han de cumplir las magnitudes que forman la base dimensional. Por tanto a la hora de elegir la base dimensional:

1. Elegir tantas magnitudes como indique la multiplicidad de la base
2. Ver que estas magnitudes sean dimensionalmente independientes

Si fueran dimensionalmente dependientes tendríamos un [ ] en función de otro de forma que no podríamos elegir arbitrariamente todos los corchetes de esas magnitudes.

TEOREMA DE Π:

"La forma más general de una ec. física homogénea $f(x_1, ..., x_n) = 0$ es $F(\pi_1, ..., \pi_s) = 0$ donde F es una función indeterminada y donde $\pi_1 ... \pi_s$ son s monomios π construidos con las magnitudes (constantes también) $x_1 ... x_n$ que intervienen en el fenómeno".

Estos monomios π han de satisfacer 2 condiciones:

1. Han de ser de dimensión nula y 2. Han de ser dimensionalmente independientes.

Su número $s = n - r$ donde $r = \text{ran}(\alpha_{ij})$ es el rango o característica de la matriz de los exponentes dimensionales de las magnitudes $x_1 ... x_n$:

$$\pi = \prod_i x_i^{\epsilon_i} = x_1^{\epsilon_1} x_2^{\epsilon_2} ... x_n^{\epsilon_n} \quad \text{¿cómo encontramos los } \epsilon_i\text{?}$$

$$\begin{aligned}
&[\pi] = \textstyle\prod_i [x_i]^{\epsilon_i} = 1 \\
&[x_i] = M^{\alpha_{1i}} L^{\alpha_{2i}} T^{\alpha_{3i}} \Theta^{\alpha_{4i}} Q^{\alpha_{5i}} \\
&[\pi] = \textstyle\prod_i M^{\alpha_{1i}\epsilon_i} L^{\alpha_{2i}\epsilon_i} T^{\alpha_{3i}\epsilon_i} \Theta^{\alpha_{4i}\epsilon_i} Q^{\alpha_{5i}\epsilon_i} = 1 \\
&[\pi] = M^{\Sigma_i \alpha_{1i}\epsilon_i} L^{\Sigma_i \alpha_{2i}\epsilon_i} T^{\Sigma_i \alpha_{3i}\epsilon_i} \Theta^{\Sigma_i \alpha_{4i}\epsilon_i} Q^{\Sigma_i \alpha_{5i}\epsilon_i} = 1
\end{aligned}$$

$\Rightarrow$ se debe verificar (notad que que también implica que tengan dimensión nula)

$$\sum_i \alpha_{ji}\epsilon_i = 0 \; \begin{array}{l} i = 1...n \\ j = 1..,5 \end{array} \tag{5}$$

sistema de 5 ecuaciones homogéneas donde las incógnitas son las ϵ_i. El rango $r = \text{ran}(\alpha_{ji})$ me da el número de ecuaciones independientes $\Rightarrow$ puedo elegir $s = n - r$ incógnitas $(\epsilon_1 ... \epsilon_s)$ arbitrariamente y el número de monomios π adimensionales (es decir de dimensión nula) y dimensionalmente independientes que puedo elegir arbitrariamente. El resto de incógnitas $(\epsilon_{s+1} ... \epsilon_n)$ las construyo a partir de los anteriores. Por ejemplo, cogemos los $\epsilon_1 ... \epsilon_s$ de forma arbitraria pero de la forma más sencilla (tomando valores 0 o 1):

$$\begin{array}{cccccc} \epsilon_1 & \epsilon_2 & \dots & \epsilon_s & & \\ 1 & 0 & \dots & 0 & \rightarrow & \pi_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & \rightarrow & \pi_2 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \rightarrow & \pi_s \end{array}$$

con la primera fila de valores arbitrarios me voy a (5) y calculo los restantes $n - s$ ϵ_i y con éstos calculo el primer monomio π_1 que puedo construir arbitrariamente. Con las siguientes elecciones de $(\epsilon_1 ... \epsilon_s)$ construyo los restantes monomios $\pi_2 ... \pi_s$. Eligiéndolos de esta forma se garantiza que son dimensionalmente independientes.
Ejemplo: determinar la dependencia de una cierta magnitud con las otras:

$$x_1 = g(x_2, ..., x_n)$$

$x_2 ... x_n$ han de ser magnitudes independientes, que influyan en la x_1 al igual que constantes características o supérfluas que influyan sobre x_1 :

$$[x_i] \Rightarrow \alpha_{ji} \qquad \begin{array}{c|cccc} & x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \hline M & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1n} \\ L & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2n} \\ T & \alpha_{31} & \alpha_{32} & \dots & \alpha_{3n} \\ \Theta & \alpha_{41} & \alpha_{42} & \dots & \alpha_{4n} \\ Q & \alpha_{51} & \alpha_{52} & \dots & \alpha_{5n} \end{array}$$

calculamos $r = \text{ran}(\alpha_{ji})$ asignamos los r ϵ_i arbitrarios y utilizando $\sum_i \alpha_{ji}\epsilon_i = 0$ calculamos los restantes y construimos los s monomios $\pi_1 ... \pi_s$. Una vez los hemos construido obtenemos la dependencia de la variable x_1 de esta forma:

$$F(\pi_1, ..., \pi_s) = 0 \Rightarrow \pi_1 = \varphi(\pi_2, ..., \pi_s)$$

En $\pi_1$está la variable que queremos despejar, la x_1. El caso más interesante es cuando $s = 1$, es decir sólo tenemos que construir un monopio π. Por simplicidad $\pi = C$:

- Por ejemplo, si tenemos en función de las otras magnitudes $\pi = \frac{x\,y^2}{z} \Rightarrow \frac{x\,y^2}{z} = C \Rightarrow x = C\frac{z}{y^2}$
- Si tenemos x_1, x_2, x_3 tal que $[x_2] = [x_3] \Rightarrow \frac{x_2}{x_3}$ tiene dimensión nula pues $[\frac{x_2}{x_3}] = \frac{[x_2]}{[x_3]} = 1$. En este caso ese cociente constituye un monomio π que se llama factor de forma ω. Puedo en este caso eliminar una de las variables que intervienen en el factor de forma. Si tengo otro factor de forma α entonces $\omega = \alpha$ pues tienen la misma fórmula dimensional.

Para acabar vamos a ilustrar todo lo dicho con el ejemplo del péndulo simple: Determinación de la dependencia del periodo de un péndulo simple con las magnitudes que intervienen en el fenómeno, es decir $T = T(l, m, g, \theta_0)$. Elegimos como base dimensional (M, L, T) en esa base θ_0 tiene dimensión nula por lo que constituye un factor de forma $\omega = \theta_0$ que introduciremos al final:

	T	l	m	g
M	0	0	1	0
L	0	1	0	1
T	1	0	0	-2

luego se tiene $r = 3$ y por lo tanto $s = n - r = 4 - 3 = 1$ factores π que podemos construir o coeficientes ϵ_i que podemos coger arbitrariamente. Como tengo $\epsilon_T, \epsilon_l, \epsilon_m, \epsilon_g$ tal que $\sum_i \alpha_{ji}\epsilon_i = 0$

nos queda:

$$\left.\begin{array}{c} 1\times\epsilon_m = 0 \\ 1\times\epsilon_l + 1\times\epsilon_g = 0 \\ 1\times\epsilon_T - 2\times\epsilon_g = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \text{Elegimos arbitrariamente } \epsilon_T = 1 \\ \Longrightarrow \epsilon_g = 1/2 \\ \Longrightarrow \epsilon_l = -1/2 \end{array}$$

luego el correspondiente monomio π queda: $\pi = T^{\epsilon_T} l^{\epsilon_l} m^{\epsilon_m} g^{\epsilon_g} = T l^{-1/2} g^{1/2} = T\sqrt{\frac{g}{l}}$. Como $F(\pi,\omega) = 0$ (por el teorema de Π) entonces $\pi = \varphi(\omega) = \varphi(\theta_0) \Rightarrow T\sqrt{\frac{g}{l}} = \varphi(\theta_0) \Longrightarrow T = \sqrt{\frac{l}{g}}\varphi(\theta_0)$. Esta expresión es útil, por ejemplo para construir un péndulo con un determinado periodo construyendo otro (modelo) y trabajando con él: el monomio π obtenido no depende de propiedades del péndulo entonces

$$\pi = \varphi(\omega)_{modelo} = \varphi(\omega)_{péndulo}$$

que despues de sustituir nos da

$$T^2_{péndulo} = l_{péndulo}\frac{T^2_{modelo}}{l_{modelo}}.$$

En general si se puede conseguir que los $(\pi_j)_{modelo} = (\pi_j)_{prototipo}$ $\;j = 2,..s \Longrightarrow (\pi_1)_{modelo} = (\pi_1)_{prototipo}$ donde aparece la variable que queremos determinar en el prototipo.

Precisión y cifras significativas.

Al medir una magnitud física,

- Siempre se cometen errores (Errores instrumentales).
- *Exactitud* con la que medimos una magnitud física: lo cerca que la medida está de su valor real.

$$a_{real} = a_{medida} \pm \Delta a$$

- Precisión de una medida: [5]lo mínimo que podemos discernir en el valor de la medida

$$(200 \pm 2)mm$$
$$(20{,}0 \pm 0{,}2)cm$$
$$200(2)$$
$$200 \pm 1\,\%$$

- Nunca el error en la medida indirecta puede ser menor que el de las medidas a partir de las cuales se obtiene. Ejemplo circunferencia $\pi = l/d = 3{,}141592654$. Medimos $l = 424 \pm 1$ y $d = 135 \pm 1 \Rightarrow \pi = 3{,}14074074$. Aquí las últimas 6 cifras no tiene sentido. Se habla entonces de cifras significativas $\pi = 3{,}14$. La teoría de errores muestra cómo calcular las cifras significativas y el error asociado a medidas indirectas
  - Error absoluto: (Valor real) -(Valor medido)
  - Error relativo: (Error absoluto)/(valor real)

[5]No confundir exactitud con precisión: un reloj puede ser preciso en el sentido que mide hasta los segundos pero puede no ser exacto, se adelanta o se atrasa.