Relación 4

1. Demostrar que para sistemas integrables dos trayectorias próximas en el espacio de las fases no se separan exponencialmente. (Ayuda: utilizar el formalismo de variables acción-ángulo)

2. Simular numéricamente las ecuaciones de Lorentz y analizar toda la fenomenología y complegidad estudiada en clase: puntos fijos y estabilidad local (tipos de puntos fijos), ciclos límites, atractor extraño, puntos de bifurcación, exponentes de lyapunov en función de algún parámetro del sistema, ver la sensibilidad a las condiciones iniciales, dibujar el diagrama de bifurcaciones, mapa de Lorentz, etc.

3. Estudiar la dinámica del modelo de Lotka-Volterra:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x(a - by) \\ \frac{dy}{dt} &= y(cx - d) \end{aligned} \tag{1}$$

   donde a, b, c, d son constantes positivas. Encontrar un cambio de variables que reduzcan el numero de parámetros de 4 a 1. Estudiar los puntos fijos, la estabilidad local de las soluciones (puntos fijos y ciclos límite) del sistema resultante en función del parámetro relevante. Razona la respuesta. Integrar las ecuaciones numéricamente y dibujar las trayectorias en el espacio de las fases.

4. Demostrar que el sistema de la noria explicado en clase es equivalente al sistema de Lorentz. Para ello encontrar un cambio de variables que transforme las variables dinámicas para la noria en las variables dinámicas para el sistema de Lorentz. Demostrar que los modos de oscilación a_n y $b_n \forall n \neq 1$, se hacen cero en el estado estacionario. Qué condiciones deben cumplir los parámetros del sistema de Lorentz para que dicha equivalencia sea posible?

5. Estudiar la evolución de volúmenes en el espacio de las fases para el atractor de Rossler:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -y - z \\ \frac{dy}{dt} &= x + ay \\ \frac{dz}{dt} &= b + z(x - c) \end{aligned} \tag{2}$$

   Calcular su exponentes de lyapunov y diagrama de órbitas en función de c.

6. Sea el sistema dinámico descrito por las ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= x - x^3 \\ \frac{dy}{dt} &= -y \end{aligned} \tag{3}$$

   y se el intervalo $I = [-1 \leq x \leq 1, y = 0]$. Es I un atractor de la dinámica del sistema anterior?

7. Estudiar numéricamente el sistema de Lorentz para $\sigma = 10$ y $b = 8/3$ en los casos siguientes:

   - $r = 28$
   - $r = 21$

- $r = 166.3$
- $145 \leq r \leq 166$
- $r = 350$
- $r = 24.4 + sen(wt)$ con $w \ll w_c$ donde w_c es la frecuencia típica en el atractor.

8. Determinar puntos fijos y estabilidad de los mapas $x_{n+1} = x_n^2$, $x_{n+1} = sen(x_n)$, y $x_n = cos(x_n)$.

9. Estudiar la dinámica del mapa logísitico (mapa de May) $x_{n+1} = rx(1-x)$: puntos fijos, estabilidad global, diagrama de órbitas, exponente de lyapunov en función de r, intermitencia. Determinad numéricamente el valor de las constantes universales α y δ. Mostrar graficamente la convergencia de dichas ctes. a los valores analíticos calculados por Feigenbaum.

10. Estudiar analítica y numéricamente el mapa carpa de Lozi:

$$x_{n+1} = a(1 - 2|x_n - 1/2|)$$

con $0 < a \leq 1$ para $0 \leq x_n \leq 1$. Dibujar el diagrama de órbitas. Por qué no aparece desdoblamiento del periodo?. Determinar analíticamente las curvas límites $r_1(a)$ y $r_2(a)$ del diagrama de órbitas: