Curvas planas: equisingularidad y polares

Víctor González Alonso
Leibniz Universität Hannover

(colaboración con Maria Alberich Carramiñana)

II Congreso de Jóvenes Investigadores
Universidad de Sevilla, 19 de Septiembre de 2013

- **Problema:** Estudiar la topología de una **singularidad de curva plana** (reducida) usando sus **curvas polares**.

- **Problema:** Estudiar la topología de una **singularidad de curva plana** (reducida) usando sus **curvas polares**.
- **Respuesta:** Método (**algoritmo**) para determinar los puntos singulares de la curva a partir del clúster de **puntos base** de sus polares.

- **Problema:** Estudiar la topología de una **singularidad de curva plana** (reducida) usando sus **curvas polares**.
- **Respuesta:** Método (**algoritmo**) para determinar los puntos singulares de la curva a partir del clúster de **puntos base** de sus polares.
- **Corolario:** La clase de equisingularidad (equivalencia topológica) de una singularidad de curva plana está determinada por la clase de equisingularidad de sus polares genéricas y los puntos lisos compartidos por todas ellas.

- $O \in S$ punto liso de una superficie compleja.
- $\mathcal{O}_{S,O} \equiv$ **anillo local** en O: funciones holomorfas en un entorno.
- $\xi : f = 0$ (germen de) curva (en O) de ecuación $f \in \mathcal{O}_{S,O}$.
- $e_O(\xi) = ord_O(f)$ **multiplicidad** de ξ.

- $O \in S$ punto liso de una superficie compleja.
- $\mathcal{O}_{S,O} \equiv$ **anillo local** en O: funciones holomorfas en un entorno.
- $\xi : f = 0$ (germen de) curva (en O) de ecuación $f \in \mathcal{O}_{S,O}$.
- $e_O(\xi) = ord_O(f)$ **multiplicidad** de ξ.

Definición (Equivalencia topológica/analítica)

Dos curvas ξ_1, ξ_2 son **topológicamente (analíticamente) equivalentes** *si existen entornos U_1, U_2 de O y un homeomorfismo (isomorfismo analítico) $\varphi : U_1 \longrightarrow U_2$, $\varphi(O) = O$, de manera que*

$$\varphi(U_1 \cap \xi_1) = U_2 \cap \xi_2.$$

$\xi : f = 0$ curva reducida, $\eta : g = 0$ curva **lisa** $(e_O(\eta) = 1)$.

Definición

La g-**polar** *de* ξ *respecto de la ecuación* f *es la curva*

$$\zeta = P_g(f) : \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

$\xi : f = 0$ curva reducida, $\eta : g = 0$ curva **lisa** $(e_O(\eta) = 1)$.

Definición

*La g-**polar** de ξ respecto de la ecuación f es la curva*

$$\zeta = P_g(f) : \frac{\partial(f,g)}{\partial(x,y)} = \det \begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix} = 0.$$

Ejemplo

$$g = y \to \zeta : \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \qquad g = x \to \zeta : \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

- Es independiente de las coordenadas (x, y).
- Depende de las ecuaciones f i g.

- Ideal jacobiano: $\mathbf{J}(\xi) = \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \subseteq \mathcal{O}_{S,O}$. Es independiente de la ecuación f.
- Sistema jacobiano: $\mathcal{J}(\xi) = \{\zeta : h = 0 \,|\, h \in \mathbf{J}(\xi)\}$. Contiene todas las polares.

Teorema

Polares genéricas son **topológicamente** *equivalentes.*

- Ideal jacobiano: $\mathbf{J}(\xi) = \left(f, \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \subseteq \mathcal{O}_{S,O}$. Es independiente de la ecuación f.
- Sistema jacobiano: $\mathcal{J}(\xi) = \{\zeta : h = 0 \,|\, h \in \mathbf{J}(\xi)\}$. Contiene todas las polares.

Teorema

Polares genéricas son **topológicamente** *equivalentes.*

Teorema (Mather-Yau)

Dos curvas ξ_1 y ξ_2 son analíticamente equivalentes si y sólo si

$$\mathcal{O}_{S,O}/\mathbf{J}(\xi_1) \cong \mathcal{O}_{S,O}/\mathbf{J}(\xi_2).$$

¿Qué información es topológica?

¿Qué invariantes de las polares de ξ permiten recuperar su clase topológica? **¿Cómo?**

¿Qué información es topológica?

¿Qué invariantes de las polares de ξ permiten recuperar su clase topológica? **¿Cómo?**

Posibles invariantes:

- Invariantes polares.
- Clase topológica genérica de las polares.
- Puntos base (infinitamente cercanos) de las polares: $BP(\mathcal{J}(\xi))$.

Definición (Invariante polar (Teissier))

ξ curva, ζ polar genérica, γ rama de ζ. El **invariante polar** *asociado es*

$$I_\gamma = \frac{[\xi.\gamma]_O}{e_O(\gamma)}.$$

Definición (Invariante polar (Teissier))

ξ curva, ζ polar genérica, γ rama de ζ. El **invariante polar** *asociado es*

$$I_\gamma = \frac{[\xi.\gamma]_O}{e_O(\gamma)}.$$

Teorema (Lê-Michel-Weber)

El conjunto $\mathcal{I}(\xi)$ de invariantes polares de ξ es invariante topológico.

$$\text{Clase topológica de } \xi \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{I}(\xi)$$

¿Y al revés?

Teorema (Merle)

Si ξ *es* **irreducible***, su clase topológica está determinada por la multiplicidad* $e_O(\xi)$ *y los invariantes polares* $\mathcal{I}(\xi)$.

Teorema (Merle)

Si ξ *es* **irreducible**, *su clase topológica está determinada por la multiplicidad* $e_O(\xi)$ *y los invariantes polares* $\mathcal{I}(\xi)$.

Contraejemplo (Eggers)

Las curvas definidas por

$$(y^4 - 2x^3y^2 + x^6 - 4x^9y - x^{15})(x^4 - 2x^2y^5 + y^{10} - 4xy^9 - y^{13}) = 0$$

$$(y^4 - 2x^3y^2 + x^6 - 4x^{10}y - x^{17})(x^4 - 2x^2y^5 - 4xy^8 + y^{10} - y^{11}) = 0$$

NO *son topológicamente equivalentes, pero...*

Teorema (Merle)

Si ξ es **irreducible***, su clase topológica está determinada por la multiplicidad $e_O(\xi)$ y los invariantes polares $\mathcal{I}(\xi)$.*

Contraejemplo (Eggers)

Las curvas definidas por

$$(y^4-2x^3y^2+x^6-4x^9y-x^{15})(x^4-2x^2y^5+y^{10}-4xy^9-y^{13})=0$$

$$(y^4-2x^3y^2+x^6-4x^{10}y-x^{17})(x^4-2x^2y^5-4xy^8+y^{10}-y^{11})=0$$

NO *son topológicamente equivalentes, pero...*

- *tienen los mismos invariantes polares*

Teorema (Merle)

Si ξ es **irreducible**, *su clase topológica está determinada por la multiplicidad $e_O(\xi)$ y los invariantes polares $\mathcal{I}(\xi)$.*

Contraejemplo (Eggers)

Las curvas definidas por

$$(y^4 - 2x^3y^2 + x^6 - 4x^9y - x^{15})(x^4 - 2x^2y^5 + y^{10} - 4xy^9 - y^{13}) = 0$$

$$(y^4 - 2x^3y^2 + x^6 - 4x^{10}y - x^{17})(x^4 - 2x^2y^5 - 4xy^8 + y^{10} - y^{11}) = 0$$

NO *son topológicamente equivalentes, pero...*

- *tienen los mismos invariantes polares*
- *y polares genéricas topológicamente equivalentes!!!*

Problema: no sabemos qué invariante polar **corresponde** a qué rama.

Problema: no sabemos qué invariante polar **corresponde** a qué rama.

Teorema (Alberich, G.)

Conociendo

- *el tipo topológico de una polar genérica* ζ, *y*
- *el invariante polar* I_γ *que corresponde* **a cada rama** γ *de* ζ,

se puede determinar el tipo topológico de la curva orginal ξ.

Observación

Conocer $BP(\mathcal{J}(\xi))$ *equivale a nuestra hipótesis:*

$$I_\gamma = \frac{[BP(\mathcal{J}(\xi)).\gamma]_O}{e_O(\gamma)} + 1.$$

Observación

Conocer $BP(\mathcal{J}(\xi))$ *equivale a nuestra hipótesis:*

$$I_\gamma = \frac{[BP(\mathcal{J}(\xi)).\gamma]_O}{e_O(\gamma)} + 1.$$

Y ya se sabía...

Teorema (Casas-Alvero)

$$BP(\mathcal{J}(\xi_1)) = BP(\mathcal{J}(\xi_2)) \quad \Longrightarrow \quad \xi_1 \sim_{top} \xi_2$$

Observación

Conocer $BP(\mathcal{J}(\xi))$ *equivale a nuestra hipótesis:*

$$I_\gamma = \frac{[BP(\mathcal{J}(\xi)).\gamma]_O}{e_O(\gamma)} + 1.$$

Y ya se sabía...

Teorema (Casas-Alvero)

$$BP(\mathcal{J}(\xi_1)) = BP(\mathcal{J}(\xi_2)) \quad \Longrightarrow \quad \xi_1 \sim_{top} \xi_2$$

Novedad: Demostración constructiva, algoritmo explícito.

Definición (Puntos infinitamente cercanos a O)

Puntos p obtenidos mediante blow-ups *sucesivos sobre O.*

- $\pi_p : S_p \to S$ mínima composición de *blow-ups* que hace aparecer p.
- E_p divisor excepcional del *blow-up* en p.
- Orden natural (parcial): $p \leqslant q \Leftrightarrow \pi_q : S_q \to S_p \xrightarrow{\pi_p} S$
- Representación: grafo dual o diagrama de Enriques.
- Orden alternativo $\prec$: según la posición de E_p en el grafo dual.

Definición (Transformadas, multiplicidades, valores)

- **Transformada total** *de* ξ *en* p: $\bar{\xi}_p = \left\{\pi_p^*(f) = f \circ \pi_p = 0\right\}$. **Valor** *de* ξ *en* p: $v_p(\xi) = e_p(\bar{\xi}_p)$.
- **Transformada estricta** *de* ξ *en* p: $\tilde{\xi}_p = \overline{\bar{\xi}_p - \pi_p^{-1}(O)}$ **Multiplicidad** *de* ξ *en* p: $e_p(\xi) = e_p(\tilde{\xi}_p)$.

Definición (Transformadas, multiplicidades, valores)

- **Transformada total** *de* ξ *en* p: $\bar{\xi}_p = \{\pi_p^*(f) = f \circ \pi_p = 0\}$.
  Valor *de* ξ *en* p: $v_p(\xi) = e_p(\bar{\xi}_p)$.
- **Transformada estricta** *de* ξ *en* p: $\tilde{\xi}_p = \overline{\bar{\xi}_p - \pi_p^{-1}(O)}$
  Multiplicidad *de* ξ *en* p: $e_p(\xi) = e_p(\tilde{\xi}_p)$.

Definición (Proximidad)

- p *es* **próximo** *a* q $(p \to q)$ *si* $p \in E_q$.
- p *es* **libre/satélite** *si es próximo a un/dos punto/s.*
- p *es* **satélite de** q *si* q *es el último punto libre que precede* p.

$$v_p(\xi) = e_p(\xi) + \sum_{p \to q} v_q(\xi).$$

Definición (Puntos singulares)

p es **singular** *de ξ si $\bar{\xi}_p$ no tiene cruzamientos normales.*

$$\begin{aligned}\mathcal{S}(\xi) &\equiv \text{puntos singulares de } \xi \text{ con multiplicidades/valores}\\ &\equiv \text{resolución minimal}\end{aligned}$$

Definición (Puntos singulares)

p *es* **singular** *de* ξ *si* $\bar{\xi}_p$ *no tiene cruzamientos normales.*

$\mathcal{S}(\xi) \equiv$ puntos singulares de ξ con multiplicidades/valores
$\equiv$ resolución minimal

Definición (Equisingularidad)

ξ_1, ξ_2 *son* **equisingulares** *si existe una biyección*

$$\mathcal{S}(\xi_1) \stackrel{\phi}{\leftrightarrow} \mathcal{S}(\xi_2)$$

preservando $\leq$*, la proximidad y las multiplicidades (o valores).*

Definición (Puntos singulares)

*p es **singular** de ξ si $\bar{\xi}_p$ no tiene cruzamientos normales.*

$\mathcal{S}(\xi) \equiv$ puntos singulares de ξ con multiplicidades/valores
$\equiv$ resolución minimal

Definición (Equisingularidad)

*ξ_1, ξ_2 son **equisingulares** si existe una biyección*

$$\mathcal{S}(\xi_1) \overset{\phi}{\leftrightarrow} \mathcal{S}(\xi_2)$$

preservando $\leq$, la proximidad y las multiplicidades (o valores).

Teorema (Brauner, Burau, Zariski)

Equivalencia topológica $\equiv$ equisingularidad.

Objetivo:

$$BP(\mathcal{J}(\xi)) \rightarrow \{(\gamma, I_\gamma)\} \dashrightarrow \mathcal{R}(\xi) \dashrightarrow \mathcal{S}(\xi)$$

Objetivo:

$$BP(\mathcal{J}(\xi)) \to \{(\gamma, I_\gamma)\} \dashrightarrow \mathcal{R}(\xi) \dashrightarrow \mathcal{S}(\xi)$$

Definición (Puntos de ruptura)

p *es* **de ruptura** *de* ξ *si* $\bar{\xi}_p$ *tiene al menos tres tangentes diferentes.*

$\mathcal{R}(\xi) \equiv$ puntos de ruptura de ξ.
$\mathcal{R}^p(\xi) \equiv$ puntos de ruptura de ξ satélites de p.

Objetivo:

$$BP(\mathcal{J}(\xi)) \to \{(\gamma, I_\gamma)\} \dashrightarrow \mathcal{R}(\xi) \dashrightarrow \mathcal{S}(\xi)$$

Definición (Puntos de ruptura)

p *es* **de ruptura** *de* ξ *si* $\bar{\xi}_p$ *tiene al menos tres tangentes diferentes.*

$\mathcal{R}(\xi) \equiv$ puntos de ruptura de ξ.
$\mathcal{R}^p(\xi) \equiv$ puntos de ruptura de ξ satélites de p.

Los puntos maximales de $\mathcal{S}(\xi)$ son puntos de ruptura.
$\Longrightarrow$ recuperando $\mathcal{R}(\xi)$ recuperamos $\mathcal{S}(\xi)$ sin multiplicidades.

Definición

Para cualquier p, **no necesariamente sobre** ξ, *definimos*

$$n_p = \begin{cases} 1 & \textit{si } p = O, \\ \displaystyle\sum_{p \to q} n_q & \textit{si } p \neq O \end{cases} \qquad I_\xi(p) = I(p) = \frac{v_p(\xi)}{n_p}.$$

Definición

Para cualquier p, **no necesariamente sobre** ξ, *definimos*

$$n_p = \begin{cases} 1 & \text{si } p = O, \\ \sum_{p \to q} n_q & \text{si } p \neq O \end{cases} \qquad I_\xi(p) = I(p) = \frac{v_p(\xi)}{n_p}.$$

Teorema (Lê-Michel-Weber revisited)

Dada una curva ξ y una polar genérica ζ, se tiene

$$\{I(q) \mid q \in \mathcal{R}(\xi)\} = \mathcal{I}(\xi) = \{I_\gamma\}$$

donde γ recorre todas las ramas de ζ.

Definición

Para cualquier p, **no necesariamente sobre** ξ, *definimos*

$$n_p = \begin{cases} 1 & \textit{si } p = O, \\ \sum_{p \to q} n_q & \textit{si } p \neq O \end{cases} \qquad I_\xi(p) = I(p) = \frac{v_p(\xi)}{n_p}.$$

Teorema (Lê-Michel-Weber revisited, Casas-Alvero)

Dada una curva ξ y una polar genérica ζ, se tiene

$$\{I(q) \mid q \in \mathcal{R}^p(\xi)\} = \mathcal{I}^p(\xi) = \{I_\gamma\}$$

donde γ recorre todas las ramas de ζ tal que p es su último punto libre en común con ξ.

$\prec$ permite estudiar con mucho detalle los cocientes $I(p)$:

Proposición

Si $p \prec q$, *entonces*

$$I(p) \leqslant I(q),$$

con la igualdad muy bien caracterizada.

Generalización a puntos **no necesariamente sobre** ξ resultados similares (Lê, Michel y Weber; Delgado; Casas-Alvero; García-Barroso; ...).

$\prec$ permite estudiar con mucho detalle los cocientes $I(p)$:

Proposición

Si $p \prec q$, entonces

$$I(p) \leqslant I(q),$$

con la igualdad muy bien caracterizada.

Generalización a puntos **no necesariamente sobre** ξ resultados similares (Lê, Michel y Weber; Delgado; Casas-Alvero; García-Barroso; ...).

Proposición

Para cada rama γ de una polar genérica ζ existe exactamente un punto de ruptura q_γ tal que

- *es satélite de p_γ, el último punto libre común a ξ y γ, y*
- $I_\gamma = I(q_\gamma)$.

Nueva estrategia:

$$(\gamma, I_\gamma) \dashrightarrow p_\gamma \dashrightarrow q_\gamma$$

Utilizando los $I(p)$, (teorema anterior y variaciones).

Nueva estrategia:

$$(\gamma, I_\gamma) \dashrightarrow p_\gamma \dashrightarrow q_\gamma$$

Utilizando los $I(p)$, (teorema anterior y variaciones).

Problemas:

- No conocemos los $v_p(\xi) \Rightarrow$ no conocemos $I(p)$.
- Conocer los $v_p\,(\xi)$ equivale a conocer $\mathcal{S}\,(\xi)$!!!

Nueva estrategia:

$$(\gamma, I_\gamma) \dashrightarrow p_\gamma \dashrightarrow q_\gamma$$

Utilizando los $I(p)$, (teorema anterior y variaciones).

Problemas:

- No conocemos los $v_p(\xi) \Rightarrow$ no conocemos $I(p)$.
- Conocer los $v_p(\xi)$ equivale a conocer $\mathcal{S}(\xi)$!!!

Solución: Aproximar los valores $v_p(\xi)$ por nuevos invariantes.

Definición

Dada una polar genérica ζ de ξ, definimos

$$m_p = \begin{cases} e_O(\zeta) + 1 & \textit{si } p = O, \\ e_p(\zeta) + m_q + 1 & \textit{si } p \to q, \\ e_p(\zeta) + m_q + m_{q'} & \textit{si } p \to q, q'. \end{cases}$$

Definición

Dada una polar genérica ζ de ξ, definimos

$$m_p = \begin{cases} e_O(\zeta) + 1 & \textit{si } p = O, \\ e_p(\zeta) + m_q + 1 & \textit{si } p \to q, \\ e_p(\zeta) + m_q + m_{q'} & \textit{si } p \to q, q'. \end{cases}$$

Teorema

Para puntos de $BP(\mathcal{J}(\xi))$ y sus satélites se tiene

$$v_p(\xi) \leqslant m_p,$$

con igualdad bien caracterizada (en particular, si $p \in \mathcal{R}(\xi)$).

$$(\gamma, I_\gamma) \longrightarrow p_\gamma \longrightarrow q_\gamma$$

Proposición (Recuperar p_γ)

El punto p_γ es próximo a p'_γ, el último punto de γ tal que

- $\frac{m_p}{n_p} < I_\gamma$ *y*
- *el punto de γ en su primer entorno es libre.*

$$(\gamma, I_\gamma) \longrightarrow p_\gamma \longrightarrow q_\gamma$$

Proposición (Recuperar p_γ)

El punto p_γ es próximo a p'_γ, el último punto de γ tal que

- $\frac{m_p}{n_p} < I_\gamma$ *y*
- *el punto de γ en su primer entorno es libre.*

Algoritmo (Recuperar q_γ)

- *A partir de $q = p_\gamma$ y mientras $I_\gamma \neq \frac{m_q}{n_q}$*
  - *Si $\frac{m_q}{n_q} < I_\gamma$ cambiamos q por su "satélite mayor".*
  - *Si $\frac{m_q}{n_q} > I_\gamma$ cambiamos q por su "satélite menor".*
- *Cuando $\frac{m_q}{n_q} = I_\gamma$, tomamos $q_\gamma = q$.*

$$BP(\mathcal{J}(\xi)) \to \mathcal{I}(\xi) \to \mathcal{R}(\xi) \longrightarrow \mathcal{S}(\xi)$$

Una vez tenemos $\mathcal{R}\left(\xi\right)$, y por tanto $\mathcal{S}\left(\xi\right)$, queremos recuperar sus multiplicidades, o equivalentemente, los valores $v_p(\xi)$.

$$BP(\mathcal{J}(\xi)) \to \mathcal{I}(\xi) \to \mathcal{R}(\xi) \longrightarrow \mathcal{S}(\xi)$$

Una vez tenemos $\mathcal{R}(\xi)$, y por tanto $\mathcal{S}(\xi)$, queremos recuperar sus multiplicidades, o equivalentemente, los valores $v_p(\xi)$.

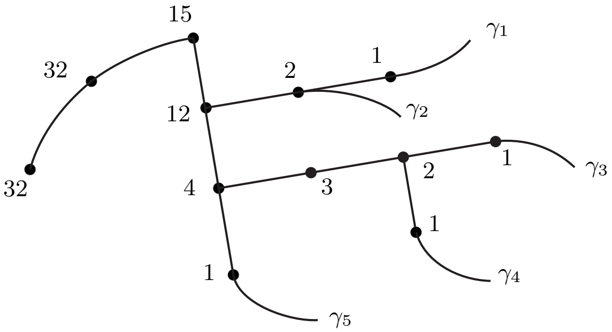
Algoritmo (Recuperando los valores)

- *En los puntos de ruptura, y en muchos otros, tenemos directamente* $v_p(\xi) = m_p$.
- *En los puntos que faltan tenemos que mirar* q*, el "máximo satélite en su grupo", y poner*

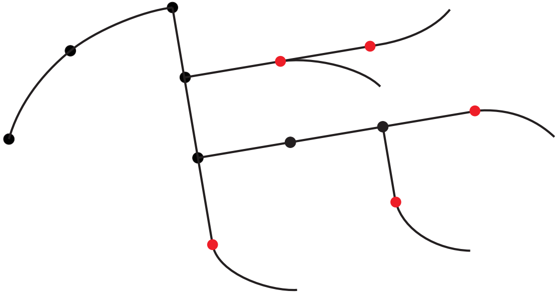
$$v_p(\xi) \in \left[\frac{n_p}{n_q} v_q(\xi), \frac{n_p}{n_q} v_q(\xi) + 1 \right).$$

Ejemplo:

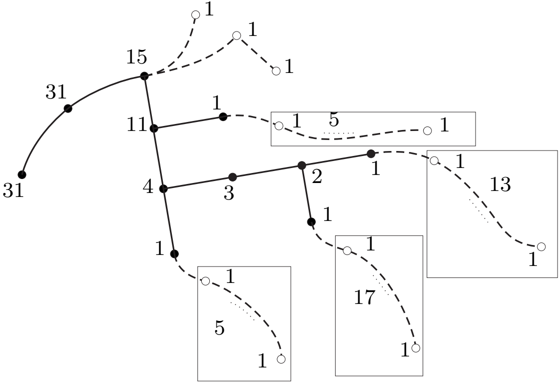
$$\xi : (y^4 - \alpha_1 x^{11})(y^3 - \alpha_2 x^8)(y^9 - \alpha_3 x^{22})(y^{12} - \alpha_4 x^{29})(y^4 - \alpha_5 x^9) = 0$$



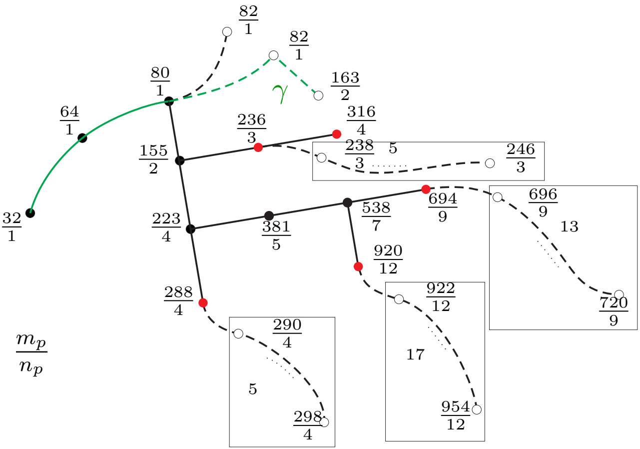
$$\mathcal{S}(\xi), e_p(\xi)$$



$$\mathcal{S}(\xi), \mathcal{R}(\xi)$$



$BP(\mathcal{J}(\xi))$ / polar genérica



$$I_\gamma = \frac{[BP(\mathcal{J}(\xi)).\gamma]_O}{e_O(\gamma)} + 1 = \frac{31 \cdot 2 + 31 \cdot 2 + 15 \cdot 2 + 1^2 + 1^2}{2} + 1 = 79$$

¡Gracias!