

EL TORO DE CLIFFORD COMO SUPERFICIE AUTOCONTRÁCTIL

Ana M. Lerma Fernández
(trabajo conjunto con Ildefonso Castro)



UNIVERSIDAD DE JAÉN

Congreso de jóvenes investigadores RSME
Sevilla, 16-20 septiembre 2013

Índice

- 1 Flujo de la curvatura media
- 2 Contexto lagrangiano
- 3 El toro de Clifford como superficie autocontráctil

Índice

1 Flujo de la curvatura media

2 Contexto lagrangiano

3 El toro de Clifford como superficie autocontráctil

Flujo de la curvatura media (FCM)

Flujo de la curvatura media (FCM)

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable, M compacta

FCM con condición inicial F_0

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F_t = F(\cdot, t)$

$$\left(\frac{dF}{dt}(p, t) \right)^\perp = H(p, t), \quad p \in M, \quad t \geq 0; \quad F(\cdot, 0) = F_0 \quad (\text{FCM})$$

Flujo de la curvatura media (FCM)

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable, M compacta

FCM con condición inicial F_0

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F_t = F(\cdot, t)$

$$\left(\frac{dF}{dt}(p, t) \right)^\perp = H(p, t), \quad p \in M, \quad t \geq 0; \quad F(\cdot, 0) = F_0 \quad (\text{FCM})$$

$M_t = F(M, t)$, $0 \leq t < T < \infty$

Flujo de la curvatura media (FCM)

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable, M compacta

FCM con condición inicial F_0

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F_t = F(\cdot, t)$

$$\frac{dF}{dt}(p, t) = H(p, t), \quad p \in M, \quad t \geq 0; \quad F(\cdot, 0) = F_0 \quad (\text{FCM})$$

$M_t = F(M, t)$, $0 \leq t < T < \infty$

Flujo de la curvatura media (FCM)

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable, M compacta

FCM con condición inicial F_0

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$, $F_t = F(\cdot, t)$

$$\frac{dF}{dt}(p, t) = H(p, t), \quad p \in M, \quad t \geq 0; \quad F(\cdot, 0) = F_0 \quad (\text{FCM})$$

$M_t = F(M, t)$, $0 \leq t < T < \infty$



Resultados destacados

Resultados destacados

[**Gage & Hamilton**, J. Diff. Geom. 1986]

[**Grayson**, J. Diff. Geom. 1987]

C_0 curva plana, cerrada y simple

Bajo el FCM (flujo de “acortamiento” de curvas), C_0 se transforma en convexa y se contrae a un punto con forma límite circular.

Resultados destacados

[Gage & Hamilton, J. Diff. Geom. 1986]

[Grayson, J. Diff. Geom. 1987]

C_0 curva plana, cerrada y simple

Bajo el FCM (flujo de “acortamiento” de curvas), C_0 se transforma en convexa y se contrae a un punto con forma límite circular.



Fuente: Sigurd Angenent (youtube)

Resultados destacados

[**Huisken**, J. Diff. Geom. 1984]

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M compacta y uniformemente convexa

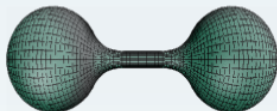
Bajo el FCM, F_0 se contrae a un punto *redondo* en tiempo finito

Resultados destacados

[**Huisken**, J. Diff. Geom. 1984]

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M compacta y uniformemente convexa

Bajo el FCM, F_0 se contrae a un punto *redondo* en tiempo finito



Resultados destacados

[**Huiskens**, J. Diff. Geom. 1984]

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M compacta y uniformemente convexa

Bajo el FCM, F_0 se contrae a un punto *redondo* en tiempo finito



Resultados destacados

[**Huiskens**, J. Diff. Geom. 1984]

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M compacta y uniformemente convexa

Bajo el FCM, F_0 se contrae a un punto *redondo* en tiempo finito



Resultados destacados

[**Huiskens**, J. Diff. Geom. 1984]

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M compacta y uniformemente convexa

Bajo el FCM, F_0 se contrae a un punto *redondo* en tiempo finito



Resultados destacados

[**Huisken**, J. Diff. Geom. 1984]

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M compacta y uniformemente convexa

Bajo el FCM, F_0 se contrae a un punto *redondo* en tiempo finito



Resultados destacados

[**Huisken**, J. Diff. Geom. 1984]

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M compacta y uniformemente convexa

Bajo el FCM, F_0 se contrae a un punto *redondo* en tiempo finito



[**Andrews & Baker**, J. Diff. Geom. 2010]

$F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M compacta, $H \neq 0$

$$|\sigma|^2 \leq c|H|^2, \quad c \leq \frac{4}{3n} \text{ si } 2 \leq n \leq 4, \quad c \leq \frac{1}{n-1} \text{ si } n \geq 4$$

Bajo el FCM, F_0 se contrae a un punto *redondo* en tiempo finito

Singularidades del FCM

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta

$$M_t = F(M, t), \quad 0 \leq t < T < \infty$$

Singularidades del FCM

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta

$$M_t = F(M, t), \quad 0 \leq t < T < \infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{M_t} |\sigma|^2 = \infty$$

Singularidades del FCM

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta

$$M_t = F(M, t), \quad 0 \leq t < T < \infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{M_t} |\sigma|^2 = \infty$$

Definición

■ $q \in \mathbb{R}^m$ punto “blow-up” si $\exists p \in M$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow T} F(p, t) = q, \quad \lim_{t \rightarrow T} |\sigma(p, t)| = \infty$$

Singularidades del FCM

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta

$$M_t = F(M, t), \quad 0 \leq t < T < \infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{M_t} |\sigma|^2 = \infty$$

Definición

- $q \in \mathbb{R}^m$ punto “blow-up” si $\exists p \in M$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow T} F(p, t) = q, \quad \lim_{t \rightarrow T} |\sigma(p, t)| = \infty$$

- M desarrolla una singularidad de Tipo I si $\exists c > 0$ tal que

$$\max_{M_t} |\sigma|^2 \leq \frac{c}{T - t}, \quad \forall t \in [0, T)$$

Singularidades del FCM

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta

$$M_t = F(M, t), \quad 0 \leq t < T < \infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{M_t} |\sigma|^2 = \infty$$

Definición

- $q \in \mathbb{R}^m$ punto “blow-up” si $\exists p \in M$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow T} F(p, t) = q, \quad \lim_{t \rightarrow T} |\sigma(p, t)| = \infty$$

- M desarrolla una singularidad de Tipo I si $\exists c > 0$ tal que

$$\max_{M_t} |\sigma|^2 \leq \frac{c}{T-t}, \quad \forall t \in [0, T)$$

En caso contrario, singularidad de Tipo II.

Singularidades del FCM

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta

$$M_t = F(M, t), \quad 0 \leq t < T < \infty$$

$$\limsup_{t \rightarrow T} \max_{M_t} |\sigma|^2 = \infty$$

Definición

- $q \in \mathbb{R}^m$ punto “blow-up” si $\exists p \in M$ tal que

$$\lim_{t \rightarrow T} F(p, t) = q, \quad \lim_{t \rightarrow T} |\sigma(p, t)| = \infty$$

- M desarrolla una singularidad de Tipo I si $\exists c > 0$ tal que

$$\max_{M_t} |\sigma|^2 \leq \frac{c}{T-t}, \quad \forall t \in [0, T)$$

En caso contrario, singularidad de Tipo II.

$$\max_{M_t} |\sigma|^2 \geq \frac{\tilde{c}}{T-t}, \quad \forall t \in [0, T)$$

Reescalamiento de Huisken [**Huisken**, J. Diff. Geom. 1990]

Reescalamiento de Huisken [Huisken, J. Diff. Geom. 1990]

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta
 $q \in \mathbb{R}^m$ punto “blow-up” de Tipo I

Reescalamiento de Huisken [Huisken, J. Diff. Geom. 1990]

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta

$q \in \mathbb{R}^m$ punto “blow-up” de Tipo I

$$\tilde{F} : M \times [-1/2 \log T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\tilde{F}(\cdot, s) = \frac{1}{(2(T-t))^{1/2}} (F(\cdot, t) - q), \quad s(t) = -\frac{1}{2} \log(T-t)$$

Reescalamiento de Huisken [Huisken, J. Diff. Geom. 1990]

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta
 $q \in \mathbb{R}^m$ punto “blow-up” de Tipo I

$$\tilde{F} : M \times [-1/2 \log T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\tilde{F}(\cdot, s) = \frac{1}{(2(T-t))^{1/2}} (F(\cdot, t) - q), \quad s(t) = -\frac{1}{2} \log(T-t)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{F} = \tilde{H} + \tilde{F}$$

Reescalamiento de Huisken [Huisken, J. Diff. Geom. 1990]

$F : M \times [0, T) \rightarrow \mathbb{R}^m$ solución de (FCM), M compacta
 $q \in \mathbb{R}^m$ punto “blow-up” de Tipo I

$$\tilde{F} : M \times [-1/2 \log T, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$\tilde{F}(\cdot, s) = \frac{1}{(2(T-t))^{1/2}} (F(\cdot, t) - q), \quad s(t) = -\frac{1}{2} \log(T-t)$$

$$\frac{d}{ds} \tilde{F} = \tilde{H} + \tilde{F}$$

Supongamos que $q = 0 \in \mathbb{R}^m$. Para cualquier sucesión s_j , existe una parcial s_{j_k} tal que $\tilde{M}_{s_{j_k}} := \tilde{F}(M, s_{j_k})$ converge diferenciablemente a una subvariedad límite no vacía $\tilde{M}_\infty$ inmersa, que satisface $\tilde{H} + \tilde{F}^\perp = 0$

Singularidades y soluciones tipo solitón del FCM

Singularidades y soluciones tipo solitón del FCM

- ☒ Singularidades de Tipo I: soluciones autosemejantes del FCM

Singularidades y soluciones tipo solitón del FCM

⊠ Singularidades de Tipo I: soluciones autosemejantes del FCM

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable

ϕ *solución autosemejante* del FCM si $H = \varepsilon \phi^\perp$, $\varepsilon = \pm 1$

Singularidades y soluciones tipo solitón del FCM

⊠ Singularidades de Tipo I: soluciones autosemejantes del FCM

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable

ϕ *solución autosemejante* del FCM si $H = \varepsilon \phi^\perp$, $\varepsilon = \pm 1$

■ ϕ *autocontráctil* si $H = -\phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1 - 2t} \phi(p)$, $0 \leq t < 1/2$, solución de (FCM)

Singularidades y soluciones tipo solitón del FCM

⊠ Singularidades de Tipo I: soluciones autosemejantes del FCM

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable

ϕ *solución autosemejante* del FCM si $H = \varepsilon \phi^\perp$, $\varepsilon = \pm 1$

- ϕ *autocontráctil* si $H = -\phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1 - 2t} \phi(p)$, $0 \leq t < 1/2$, solución de (FCM)

- ϕ *autoexpansiva* si $H = \phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1 + 2t} \phi(p)$, $t \geq 0$, solución de (FCM)

Singularidades y soluciones tipo solitón del FCM

⊠ Singularidades de Tipo I: soluciones autosemejantes del FCM

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable

ϕ *solución autosemejante* del FCM si $H = \varepsilon \phi^\perp$, $\varepsilon = \pm 1$

- ϕ *autocontráctil* si $H = -\phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1 - 2t} \phi(p)$, $0 \leq t < 1/2$, solución de (FCM)

- ϕ *autoexpansiva* si $H = \phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1 + 2t} \phi(p)$, $t \geq 0$, solución de (FCM)

⊠ Ejemplos de singularidades de Tipo II: solitones de traslación del FCM

Singularidades y soluciones tipo solitón del FCM

⊠ Singularidades de Tipo I: soluciones autosemejantes del FCM

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable

ϕ *solución autosemejante* del FCM si $H = \varepsilon \phi^\perp$, $\varepsilon = \pm 1$

- ϕ *autocontráctil* si $H = -\phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1-2t} \phi(p)$, $0 \leq t < 1/2$, solución de (FCM)

- ϕ *autoexpansiva* si $H = \phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1+2t} \phi(p)$, $t \geq 0$, solución de (FCM)

⊠ Ejemplos de singularidades de Tipo II: solitones de traslación del FCM

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión

ϕ *solitón de traslación* del FCM si $H = \mathbf{e}^\perp$, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ ($\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0)$)

$F_t(p) = \phi(p) + t \mathbf{e}$, $t \in \mathbb{R}$, solución de (FCM)

Singularidades y soluciones tipo solitón del FCM

⊠ Singularidades de Tipo I: soluciones autosemejantes del FCM

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión diferenciable

ϕ *solución autosemejante* del FCM si $H = \varepsilon \phi^\perp$, $\varepsilon = \pm 1$

- ϕ *autocontráctil* si $H = -\phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1-2t} \phi(p)$, $0 \leq t < 1/2$, solución de (FCM)

- ϕ *autoexpansiva* si $H = \phi^\perp$

$F_t(p) = \sqrt{1+2t} \phi(p)$, $t \geq 0$, solución de (FCM)

⊠ Ejemplos de singularidades de Tipo II: solitones de traslación del FCM

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ inmersión

ϕ *solitón de traslación* del FCM si $H = \mathbf{e}^\perp$, $\mathbf{e} \in \mathbb{R}^m$ ($\mathbf{e} = (1, 0, \dots, 0)$)

$F_t(p) = \phi(p) + t \mathbf{e}$, $t \in \mathbb{R}$, solución de (FCM)

Índice

1 Flujo de la curvatura media

2 Contexto lagrangiano

3 El toro de Clifford como superficie autocontráctil

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle,$

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

$$H = J\nabla\beta, \quad \alpha_H = -d\beta$$

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

$$H = J\nabla\beta, \quad \alpha_H = -d\beta$$

ϕ **especial lagrangiana**

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

$$H = J\nabla\beta, \quad \alpha_H = -d\beta$$

ϕ **especial lagrangiana** $\Leftrightarrow H = 0 \Leftrightarrow \beta$ constante

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

$$H = J\nabla\beta, \quad \alpha_H = -d\beta$$

ϕ **especial lagrangiana** $\Leftrightarrow H = 0 \Leftrightarrow \beta$ constante

ϕ **estacionaria hamiltoniana**

[Oh, Math. Z. 1993]

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

$$H = J\nabla\beta, \quad \alpha_H = -d\beta$$

ϕ **especial lagrangiana** $\Leftrightarrow H = 0 \Leftrightarrow \beta$ constante

ϕ **estacionaria hamiltoniana** $\Leftrightarrow \text{div } JH = 0 \Leftrightarrow \beta$ armónica
[Oh, Math. Z. 1993]

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

$$H = J\nabla\beta, \quad \alpha_H = -d\beta$$

ϕ **especial lagrangiana** $\Leftrightarrow H = 0 \Leftrightarrow \beta$ constante

ϕ **estacionaria hamiltoniana**
[Oh, Math. Z. 1993] $\Leftrightarrow \text{div } JH = 0 \Leftrightarrow \beta$ armónica

ϕ **clase de Maslov trivial** si $[\alpha_H] \equiv 0$, $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

$$H = J\nabla\beta, \quad \alpha_H = -d\beta$$

ϕ **especial lagrangiana** $\Leftrightarrow H = 0 \Leftrightarrow \beta$ constante

ϕ **estacionaria hamiltoniana** $\Leftrightarrow \text{div } JH = 0 \Leftrightarrow \beta$ armónica
[Oh, Math. Z. 1993]

ϕ **clase de Maslov trivial** si $[\alpha_H] \equiv 0$, $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$

ϕ **casi calibrada** si $\cos \beta \geq \delta > 0$

Subvariedades lagrangianas en $\mathbb{C}^n$

$(\mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle, J)$ espacio euclídeo complejo, $\omega(\cdot, \cdot) = \langle J\cdot, \cdot \rangle = \frac{1}{2}d\lambda$

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ **lagrangiana** si $\phi^*\omega = 0 \Leftrightarrow J : TM \cong T^\perp M$

Forma curvatura media: $\alpha_H := \langle JH, \cdot \rangle$, $d\alpha_H = 0$, $[\alpha_H]$ clase de Maslov

$$\phi^*(dz_1 \wedge \cdots \wedge dz_n) = e^{i\beta} \text{vol}_M$$

$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ aplicación ángulo lagrangiano

$$H = J\nabla\beta, \quad \alpha_H = -d\beta$$

ϕ **especial lagrangiana** $\Leftrightarrow H = 0 \Leftrightarrow \beta$ constante

ϕ **estacionaria hamiltoniana** $\Leftrightarrow \text{div } JH = 0 \Leftrightarrow \beta$ armónica
[Oh, Math. Z. 1993]

ϕ **clase de Maslov trivial** si $[\alpha_H] \equiv 0$, $\beta : M \rightarrow \mathbb{R}$

ϕ **casi calibrada** si $\cos \beta \geq \delta > 0$

ϕ **monótona** si $[\phi^*\lambda] = c[\alpha_H]$, $c > 0$

Flujo *lagrangiano* de la curvatura media

Flujo *lagrangiano* de la curvatura media

[Smoczyk, 1996]

$\phi = F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$ lagrangiana

$\Rightarrow F_t$, solución de (FCM), lagrangiana, $\forall t \in [0, T)$

Flujo *lagrangiano* de la curvatura media

[Smoczyk, 1996]

$\phi = F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$ lagrangiana

$\Rightarrow F_t$, solución de (FCM), lagrangiana, $\forall t \in [0, T)$

H. Anciaux, S. Brendle, A. Chau, J. Chen, K. Groh, X. Han, W. He, D. Joyce, S. Jun, Y.-I. Lee, H. Li, J. Li, J. D. Lotay, A. Neves, R. Schoen, M. Schwarz, K. Smoczyk, G. Tian, M.-P. Tsui, M.-T. Wang, J. Wolfson, S.-T. Yau, Y. Yuan, K. Zehmisch

Flujo *lagrangiano* de la curvatura media

[Smoczyk, 1996]

$\phi = F_0 : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$ lagrangiana

$\Rightarrow F_t$, solución de (FCM), lagrangiana, $\forall t \in [0, T]$

H. Ancliaux, S. Brendle, A. Chau, J. Chen, K. Groh, X. Han, W. He, D. Joyce, S. Jun, Y.-I. Lee, H. Li, J. Li, J. D. Lotay, A. Neves, R. Schoen, M. Schwarz, K. Smoczyk, G. Tian, M.-P. Tsui, M.-T. Wang, J. Wolfson, S.-T. Yau, Y. Yuan, K. Zehmisch

Clases preservadas bajo el FCM lagrangiano:

clase de Maslov trivial
casi calibradas
monótonas

Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp$$

Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

Producto de curvas planas $\alpha_1 \times \alpha_2$

$\alpha_1 = \alpha_1(t) \in \mathbb{C}$, $\alpha_2 = \alpha_2(s) \in \mathbb{C}$, ambas p.p.a.

$$\phi(t, s) = (\alpha_1(t), \alpha_2(s))$$

$$H = \kappa_{\alpha_1} J\phi_t + \kappa_{\alpha_2} J\phi_s$$

Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \text{ autosemejante} \Leftrightarrow \overrightarrow{\kappa_{\alpha_i}} = \pm \alpha_i^\perp, \quad i = 1, 2$$

Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \text{ autosemejante} \Leftrightarrow \overrightarrow{\kappa_{\alpha_i}} = \pm \alpha_i^\perp, \quad i = 1, 2$$

Ejemplos autocontráctiles: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$

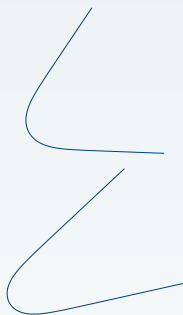
Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \text{ autosemejante} \Leftrightarrow \overrightarrow{\kappa_{\alpha_i}} = \pm \alpha_i^\perp, i = 1, 2$$

Ejemplos autocontráctiles: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$

$$\overrightarrow{\kappa_\alpha} = \alpha^\perp$$



Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \text{ autosemejante} \Leftrightarrow \overrightarrow{\kappa_{\alpha_i}} = \pm \alpha_i^\perp, i = 1, 2$$

Ejemplos autocontráctiles: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$

$$\overrightarrow{\kappa_\alpha} = -\alpha^\perp$$

[Abresch & Langer,
J. Diff. Geom. 1986]



Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \text{ autosemejante} \Leftrightarrow \overrightarrow{\kappa_{\alpha_i}} = \pm \alpha_i^\perp, i = 1, 2$$

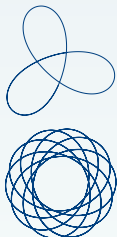
Ejemplos autocontráctiles: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$

$$\overrightarrow{\kappa_\alpha} = -\alpha^\perp$$

[Abresch & Langer,
J. Diff. Geom. 1986]

Literatura:

[Anciaux, Geom. Dedicata. 2006]



Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \text{ autosemejante} \Leftrightarrow \overrightarrow{\kappa_{\alpha_i}} = \pm \alpha_i^\perp, i = 1, 2$$

Ejemplos autocontráctiles: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$

$$\overrightarrow{\kappa_\alpha} = -\alpha^\perp$$

[Abresch & Langer,
J. Diff. Geom. 1986]



Literatura:

[Anciaux, Geom. Dedicata. 2006]

[Lee & Wang, J. Diff. Geom. 2009]

[Lee & Wang, Trans. Amer. Math. Soc. 2010]

Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

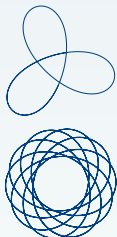
$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \text{ autosemejante} \Leftrightarrow \overrightarrow{\kappa_{\alpha_i}} = \pm \alpha_i^\perp, i = 1, 2$$

Ejemplos autocontráctiles: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$

$$\overrightarrow{\kappa_\alpha} = -\alpha^\perp$$

[Abresch & Langer,
J. Diff. Geom. 1986]



Literatura:

[Anciaux, Geom. Dedicata. 2006]

[Lee & Wang, J. Diff. Geom. 2009]

[Lee & Wang, Trans. Amer. Math. Soc. 2010]

[Joyce, Lee & Tsui, J. Diff. Geom. 2010]

Soluciones autosemejantes del FCM lagrangiano

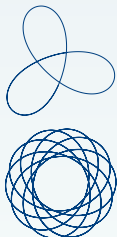
$$H = \pm \phi^\perp \Leftrightarrow \alpha_H = \pm \phi^* \lambda$$

$$\alpha_1 \times \alpha_2 \text{ autosemejante} \Leftrightarrow \overrightarrow{\kappa_{\alpha_i}} = \pm \alpha_i^\perp, i = 1, 2$$

Ejemplos autocontráctiles: $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \subset \mathbb{C}^2$, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{C}^2$

$$\overrightarrow{\kappa_\alpha} = -\alpha^\perp$$

[Abresch & Langer,
J. Diff. Geom. 1986]



Literatura:

[Anciaux, Geom. Dedicata. 2006]

[Lee & Wang, J. Diff. Geom. 2009]

[Lee & Wang, Trans. Amer. Math. Soc. 2010]

[Joyce, Lee & Tsui, J. Diff. Geom. 2010]

[Lotay & Neves, Geom. Topol.]

Subvariedades lagrangianas autocontráctiles

[Smoczyk, 2000]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ subvariedad autocontráctil lagrangiana

M compacta y orientable $\Rightarrow [\alpha_H] \neq 0$

Subvariedades lagrangianas autocontráctiles

[Smoczyk, 2000]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ subvariedad autocontráctil lagrangiana

M compacta y orientable $\Rightarrow [\alpha_H] \neq 0$

Idea:

$$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta\beta = \frac{1}{2} \langle \nabla\beta, \nabla|\phi|^2 \rangle$$

Subvariedades lagrangianas autocontráctiles

[Smoczyk, 2000]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{C}^n$ subvariedad autocontráctil lagrangiana

M compacta y orientable $\Rightarrow [\alpha_H] \neq 0$

Idea:

$$\beta : M \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Delta\beta = \frac{1}{2} \langle \nabla\beta, \nabla|\phi|^2 \rangle$$

Cuestión abierta de Neves

Encontrar alguna condición sobre un toro lagrangiano de $\mathbb{C}^2$ que implique que el flujo lagrangiano de la curvatura media $(F_t)_{0 \leq t < T}$ con condición inicial dicho toro, se extinga en tiempo T y, tras reescalamiento, F_t converja al toro de Clifford.

Índice

1 Flujo de la curvatura media

2 Contexto lagrangiano

3 El toro de Clifford como superficie autocontráctil

Soluciones autocontráctiles: noción y ejemplos

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *autocontráctil* if $H = -\phi^\perp$ ($H = \text{traza } \sigma$)

Soluciones autocontráctiles: noción y ejemplos

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *autocontráctil* if $H = -\phi^\perp$ ($H = \text{traza } \sigma$)

Esfera

$$\mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, |\sigma|^2 \equiv 1$$

Soluciones autocontráctiles: noción y ejemplos

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *autocontráctil* if $H = -\phi^\perp$ ($H = \text{traza } \sigma$)

Esfera

$$\mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, |\sigma|^2 \equiv 1$$

Clifford

$$\mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}, n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 + n_2 = n, |\sigma|^2 \equiv 2$$

Soluciones autocontráctiles: noción y ejemplos

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *autocontráctil* if $H = -\phi^\perp$ ($H = \text{traza } \sigma$)

Esfera

$$\mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, |\sigma|^2 \equiv 1$$

Clifford

$$\mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}, n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 + n_2 = n, |\sigma|^2 \equiv 2$$

Producto de n círculos

$$\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}, |\sigma|^2 \equiv n, \text{ lagrangiana en } \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$$

Soluciones autocontráctiles: noción y ejemplos

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ *autocontráctil* if $H = -\phi^\perp$ (H = traza σ)

Esfera

$$\mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+1}, |\sigma|^2 \equiv 1$$

Clifford

$$\mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+2}, n_1, n_2 \in \mathbb{N}, n_1 + n_2 = n, |\sigma|^2 \equiv 2$$

Producto de n círculos

$$\mathbb{S}^1 \times \dots \times \mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^{2n}, |\sigma|^2 \equiv n, \text{ lagrangiana en } \mathbb{R}^{2n} \equiv \mathbb{C}^n$$

Producto de un círculo y una $(n-1)$ -esfera

$$\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}, (e^{it}, (x_1, \dots, x_n)) \mapsto \sqrt{n} e^{it} (x_1, \dots, x_n) \\ |\sigma|^2 \equiv (3n-2)/n, \text{ lagrangiana en } \mathbb{C}^n \equiv \mathbb{R}^{2n}$$

Resultados de clasificación y rigidez, $n \geq 2$

Resultados de clasificación y rigidez, $n \geq 2$

[Huisken, J. Diff. Geom. 1990]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M autocontráctil compacta

$$H \geq 0 \Rightarrow M^n \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n})$$

Resultados de clasificación y rigidez, $n \geq 2$

[Huisken, J. Diff. Geom. 1990]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M autocontráctil compacta
 $H \geq 0 \Rightarrow M^n \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n})$

[Smoczyk, Int. Math. Res. Not. 2005]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, M autocontráctil compacta
 $|H| > 0$; $\nabla^\perp \nu = 0$, $\nu = H/|H|$
 $\Updownarrow$
 M^n esférica: $M^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}(\sqrt{n})$, $\hat{H} = 0$

Resultados de clasificación y rigidez, $n \geq 2$

[Huisken, J. Diff. Geom. 1990]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, M autocontráctil compacta
 $H \geq 0 \Rightarrow M^n \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n})$

[Smoczyk, Int. Math. Res. Not. 2005]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, M autocontráctil compacta
 $|H| > 0$; $\nabla^\perp \nu = 0$, $\nu = H/|H|$
 $\Updownarrow$
 M^n esférica: $M^n \rightarrow \mathbb{S}^{m-1}(\sqrt{n})$, $\hat{H} = 0$

[Le & Sesum, Comm. Anal. Geom. 2011]

[Cao & Li, Calc. Var. PDE 2012]

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, M autocontráctil compacta
 $|\sigma|^2 \leq 1 \Rightarrow |\sigma|^2 \equiv 1$, $M^n \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

Resultados de clasificación y rigidez, $n \geq 2$

[Li & Wei, J. Math. Soc. Japan 2012]

- $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, M autocontráctil compacta

$$|H| > 0; \nabla^\perp \nu = 0, \nu = H/|H| \quad 1 \leq |\sigma|^2 \leq 2$$

1 o $|\sigma|^2 \equiv 1$, $M \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$

2 o $|\sigma|^2 \equiv 2$, $M \equiv \mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n_1 + n_2 = n$

Resultados de clasificación y rigidez, $n \geq 2$

[Li & Wei, J. Math. Soc. Japan 2012]

- $\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+2}$, M autocontráctil compacta
 $|H| > 0$; $\nabla^\perp \nu = 0$, $\nu = H/|H|$ $1 \leq |\sigma|^2 \leq 2$
 - 1 o $|\sigma|^2 \equiv 1$, $M \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$
 - 2 o $|\sigma|^2 \equiv 2$, $M \equiv \mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n_1 + n_2 = n$

- $\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^{2+p}$, M autocontráctil compacta
 $|H| > 0$; $\nabla^\perp \nu = 0$, $\nu = H/|H|$ $1 \leq |\sigma|^2 \leq \frac{5}{3}$
 - 1 o $|\sigma|^2 \equiv 1$, $M \equiv \mathbb{S}^2(\sqrt{2}) \subset \mathbb{R}^3$
 - 2 o $|\sigma|^2 \equiv 5/3$, $M \equiv \mathbb{S}^2(\sqrt{6}) \rightarrow \mathbb{S}^4(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ Veronese $|H| > 0$; $\nabla^\perp \nu = 0$, $\nu = H/|H|$ $\frac{5}{3} \leq |\sigma|^2 \leq \frac{11}{6}$
 - 1 o $|\sigma|^2 \equiv 5/3$, $M \equiv \mathbb{S}^2(\sqrt{6}) \rightarrow \mathbb{S}^4(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^5$ Veronese
 - 2 o $|\sigma|^2 \equiv 11/6$, $M \equiv \mathbb{S}^2(\sqrt{12}) \rightarrow \mathbb{S}^6(\sqrt{2}) \hookrightarrow \mathbb{R}^7$ Boruvka

Nuestra contribución (dimensión y codimensión arbitrarias)

Nuestra contribución (dimensión y codimensión arbitrarias)

Teorema

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M autocontráctil compacta

Nuestra contribución (dimensión y codimensión arbitrarias)

Teorema

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M autocontráctil compacta

$|H|^2$ constante o $|H|^2 \leq n$ o $|H|^2 \geq n$

Nuestra contribución (dimensión y codimensión arbitrarias)

Teorema

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M autocontráctil compacta

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq n \text{ o } |H|^2 \geq n$$

$$|\sigma|^2 \leq \frac{3p-4}{2p-3}$$

Nuestra contribución (dimensión y codimensión arbitrarias)

Teorema

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M autocontráctil compacta

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq n \text{ o } |H|^2 \geq n$$

$$|\sigma|^2 \leq \frac{3p-4}{2p-3}$$

Entonces:

$$\textbf{1} \text{ o } |\sigma|^2 \equiv 1, M \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{n+1} \text{ } [p = 1]$$

Nuestra contribución (dimensión y codimensión arbitrarias)

Teorema

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M autocontráctil compacta

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq n \text{ o } |H|^2 \geq n$$

$$|\sigma|^2 \leq \frac{3p-4}{2p-3}$$

Entonces:

1 o $|\sigma|^2 \equiv 1$, $M \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ [$p = 1$]

2 o $|\sigma|^2 \equiv \frac{3p-4}{2p-3}$,

(i) o $M \equiv \mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n_1 + n_2 = n$, (con $|\sigma|^2 \equiv 2$)
[$p = 2$]

(ii) o Veronese $M \equiv \mathbb{S}^2(\sqrt{6}) \subset \mathbb{R}^5$ (con $|\sigma|^2 \equiv 5/3$) [$n = 2$, $p = 3$]

Nuestra contribución (dimensión y codimensión arbitrarias)

Teorema

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M autocontráctil compacta

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq n \text{ o } |H|^2 \geq n$$

$$|\sigma|^2 \leq \frac{3p-4}{2p-3}$$

Entonces:

1 o $|\sigma|^2 \equiv 1$, $M \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ [$p = 1$]

2 o $|\sigma|^2 \equiv \frac{3p-4}{2p-3}$,

(i) o $M \equiv \mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n_1 + n_2 = n$, (con $|\sigma|^2 \equiv 2$)
[$p = 2$]

(ii) o Veronese $M \equiv \mathbb{S}^2(\sqrt{6}) \subset \mathbb{R}^5$ (con $|\sigma|^2 \equiv 5/3$) [$n = 2$, $p = 3$]

Corolario

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, M autocontráctil compacta (codimensión $n \geq 2$)

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq n \text{ o } |H|^2 \geq n \quad |\sigma|^2 \leq \frac{3n-4}{2n-3}$$

Nuestra contribución (dimensión y codimensión arbitrarias)

Teorema

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, M autocontráctil compacta

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq n \text{ o } |H|^2 \geq n$$

$$|\sigma|^2 \leq \frac{3p-4}{2p-3}$$

Entonces:

1 o $|\sigma|^2 \equiv 1$, $M \equiv \mathbb{S}^n(\sqrt{n}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ [$p = 1$]

2 o $|\sigma|^2 \equiv \frac{3p-4}{2p-3}$,

(i) o $M \equiv \mathbb{S}^{n_1}(\sqrt{n_1}) \times \mathbb{S}^{n_2}(\sqrt{n_2}) \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $n_1 + n_2 = n$, (con $|\sigma|^2 \equiv 2$)
[$p = 2$]

(ii) o Veronese $M \equiv \mathbb{S}^2(\sqrt{6}) \subset \mathbb{R}^5$ (con $|\sigma|^2 \equiv 5/3$) [$n = 2$, $p = 3$]

Corolario

$\phi : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$, M autocontráctil compacta (codimensión $n \geq 2$)

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq n \text{ o } |H|^2 \geq n \quad |\sigma|^2 \leq \frac{3n-4}{2n-3}$$

Entonces $n = 2$, $|\sigma|^2 \equiv 2$, $M \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4$ toro de Clifford

Toros autocontráctiles en $\mathbb{R}^4$

(i) *Toros de Abresch-Langer*, producto de dos curvas de Abresch-Langer

(ii) *Toros de Anciaux* [Anciaux, *Geom. Dedicata* 2006]

$$\phi_{p,q}(t, s) = \gamma_{p,q}(t)(\cos s, \sin s), \quad p, q \in \mathbb{N}, \quad (p, q) = 1, \quad p/q \in (\tfrac{1}{4}, \tfrac{1}{2})$$

$$\kappa_\gamma = \frac{\langle \gamma', i\gamma \rangle}{|\gamma|^2} (|\gamma|^2 - 1)$$

(iii) *Toros de Lee-Wang* [Lee & Wang, *Trans. Amer. Math. Soc.* 2010]

$$\mathcal{T}_{m,n} \equiv \Psi_{m,n}(s, t) = \sqrt{m+n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cos s e^{i\sqrt{\frac{n}{m}}t}, \frac{1}{\sqrt{m}} \sin s e^{i\sqrt{\frac{m}{n}}t} \right), \\ m, n \in \mathbb{N}, \quad (m, n) = 1, \quad m \leq n$$

(iv) *Toros de Lawson* [Lawson, *Ann. of Math.* 1970]

$$\Phi_\alpha(s, t) = \sqrt{2} (\cos s e^{i\alpha t}, \sin s e^{it}), \quad \alpha \in \mathbb{Q}, \quad \alpha \geq 1$$

Toro de Clifford: $\Psi_{1,1}(s, t) = \Phi_1(s, t) = \sqrt{2} e^{it}(\cos s, \sin s)$, embebido

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil lagrangiana compacta

$|H|^2$ constante o $|H|^2 \leq 2$ o $|H|^2 \geq 2$

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil lagrangiana compacta

$|H|^2$ constante o $|H|^2 \leq 2$ o $|H|^2 \geq 2$

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$H = -\phi^\perp \Rightarrow \Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2)$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil lagrangiana compacta

$|H|^2$ constante o $|H|^2 \leq 2$ o $|H|^2 \geq 2$

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$H = -\phi^\perp \Rightarrow \Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow 0 = \int_M (2 - |H|^2) d\mu$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil lagrangiana compacta

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq 2 \text{ o } |H|^2 \geq 2$$

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$H = -\phi^\perp \Rightarrow \Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow 0 = \int_M (2 - |H|^2) d\mu$$

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq 2 \text{ o } |H|^2 \geq 2 \Rightarrow |H|^2 \equiv 2$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil lagrangiana compacta

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq 2 \text{ o } |H|^2 \geq 2$$

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$H = -\phi^\perp \Rightarrow \Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow 0 = \int_M (2 - |H|^2) d\mu$$

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq 2 \text{ o } |H|^2 \geq 2 \Rightarrow |H|^2 \equiv 2 \Rightarrow |\phi|^2 \equiv 2$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil lagrangiana compacta

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq 2 \text{ o } |H|^2 \geq 2$$

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$H = -\phi^\perp \Rightarrow \Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow 0 = \int_M (2 - |H|^2) d\mu$$

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq 2 \text{ o } |H|^2 \geq 2 \Rightarrow |H|^2 \equiv 2 \Rightarrow |\phi|^2 \equiv 2$$

$$\stackrel{\text{Smoczyk}}{\Rightarrow} \nabla^\perp H = 0 \stackrel{\phi \text{ Lagr.}}{\Rightarrow} JH \text{ paralelo}$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil lagrangiana compacta

$|H|^2$ constante o $|H|^2 \leq 2$ o $|H|^2 \geq 2$

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$H = -\phi^\perp \Rightarrow \Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow 0 = \int_M (2 - |H|^2) d\mu$$

$$|H|^2 \text{ constante o } |H|^2 \leq 2 \text{ o } |H|^2 \geq 2 \Rightarrow |H|^2 \equiv 2 \Rightarrow |\phi|^2 \equiv 2$$

$$\stackrel{\text{Smoczyk}}{\Rightarrow} \nabla^\perp H = 0 \stackrel{\phi \text{ Lagr.}}{\Rightarrow} JH \text{ paralelo} \stackrel{\text{Urbano}}{\Rightarrow} M^2 \equiv \mathbb{S}^1(r_1) \times \mathbb{S}^1(r_2)$$

$$\stackrel{H=-\phi^\perp}{\Rightarrow} M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$$



Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$\Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2)$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$\Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow \int_M |H|^2 d\mu = 2 \text{Área}(M)$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$\Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow \int_M |H|^2 d\mu = 2 \text{Área}(M)$$

Ecuación de Gauss: $2K = |H|^2 - |\sigma|^2$

Gauss-Bonnet:

$$8\pi(1 - \text{gen}(M)) = \int_M (|H|^2 - |\sigma|^2) d\mu = \int_M (2 - |\sigma|^2) d\mu$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$\Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow \int_M |H|^2 d\mu = 2 \text{Área}(M)$$

Ecuación de Gauss: $2K = |H|^2 - |\sigma|^2$

Gauss-Bonnet:

$$0 \geq 8\pi(1 - \text{gen}(M)) = \int_M (|H|^2 - |\sigma|^2) d\mu = \int_M (2 - |\sigma|^2) d\mu$$

M no puede ser una esfera (resultado de Smoczyk)

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$\Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow \int_M |H|^2 d\mu = 2 \text{Área}(M)$$

Ecuación de Gauss: $2K = |H|^2 - |\sigma|^2$

Gauss-Bonnet:

$$0 \geq 8\pi(1 - \text{gen}(M)) = \int_M (|H|^2 - |\sigma|^2) d\mu = \int_M (2 - |\sigma|^2) d\mu \geq 0$$

M no puede ser una esfera (resultado de Smoczyk)

$$|\sigma|^2 \leq 2$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$\Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow \int_M |H|^2 d\mu = 2 \text{Área}(M)$$

Ecuación de Gauss: $2K = |H|^2 - |\sigma|^2$

Gauss-Bonnet:

$$0 \geq 8\pi(1 - \text{gen}(M)) = \int_M (|H|^2 - |\sigma|^2) d\mu = \int_M (2 - |\sigma|^2) d\mu \geq 0$$

M no puede ser una esfera (resultado de Smoczyk)

$$|\sigma|^2 \leq 2 \Rightarrow M \text{ toro}, |\sigma|^2 \equiv 2$$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

$$\Delta|\phi|^2 = 2(2 - |H|^2) \Rightarrow \int_M |H|^2 d\mu = 2 \text{Área}(M)$$

Ecuación de Gauss: $2K = |H|^2 - |\sigma|^2$

Gauss-Bonnet:

$$0 \geq 8\pi(1 - \text{gen}(M)) = \int_M (|H|^2 - |\sigma|^2) d\mu = \int_M (2 - |\sigma|^2) d\mu \geq 0$$

M no puede ser una esfera (resultado de Smoczyk)

$$|\sigma|^2 \leq 2 \Rightarrow M \text{ toro}, |\sigma|^2 \equiv 2, \quad 2K = |H|^2 - 2$$

$$K \geq 0 \text{ o } K \leq 0 \Rightarrow |H|^2 \geq 2 \text{ o } |H|^2 \leq 2 \Rightarrow M \text{ toro de Clifford}$$



Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Entonces $|\sigma|^2 \equiv 2$, M toro

Si, además, $K \geq 0$ o $K \leq 0$, entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Conjetura I

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ lagrangiana compacta orientable autocontráctil $|\sigma|^2 \leq 2$

Si, además, ~~$K \geq 0$ o $K \leq 0$~~ , entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil compacta

ϕ embebimiento lagrangiano estacionario hamiltoniano

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil compacta

ϕ embebimiento lagrangiano estacionario hamiltoniano

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

[Castro & -, Proc. Amer. Math. Soc., 2010]

Los toros $\mathcal{T}_{m,n}$ son las únicas superficies compactas orientables autocontráctiles lagrangianas estacionarias hamiltonianas en el plano euclídeo complejo.

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil compacta

ϕ embebimiento lagrangiano estacionario hamiltoniano

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

[Castro & -, Proc. Amer. Math. Soc., 2010]

Los toros $\mathcal{T}_{m,n}$ son las únicas superficies compactas orientables autocontráctiles lagrangianas estacionarias hamiltonianas en el plano euclídeo complejo.

Toro de Clifford $\mathcal{T}_{1,1}$
único embebido

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil compacta

ϕ embebimiento lagrangiano estacionario hamiltoniano

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Demostración:

[Castro & -, Proc. Amer. Math. Soc., 2010]

Los toros $\mathcal{T}_{m,n}$ son las únicas superficies compactas orientables autocontráctiles lagrangianas estacionarias hamiltonianas en el plano euclídeo complejo.

Toro de Clifford $\mathcal{T}_{1,1}$
único embebido

[Nemirovski & Shevchishin, 2009]

Las botellas de Klein no admiten embebimientos lagrangianos en $\mathbb{C}^2$

Nuestra contribución en el contexto lagrangiano

Teorema

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil compacta

ϕ embebimiento lagrangiano estacionario hamiltoniano

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

Conjetura II

$\phi : M^2 \rightarrow \mathbb{R}^4$ autocontráctil compacta

ϕ embebimiento lagrangiano estacionario hamiltoniano

Entonces $M^2 \equiv \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$

¡Muchas gracias!