Valoraciones de Minkowski en espacios Hermíticos

Judit Abardia

Goethe-Universität Frankfurt

Congreso de Jóvenes Investigadores de la RSME

Sevilla, 19 de septiembre de 2013

Algunos teoremas de clasificación en geometría convexa.
(Ver pizarra.)

Función soporte

K: conjunto no vacío compacto convexo de $\mathbb{R}^n$.

Definición

La **función soporte** $h_K(u)$ *de* K *en la dirección* $u \in \mathbb{R}^n$ *está dada por*

$$h_K(u) = \max\{\langle x, u\rangle \mid x \in K\},$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *denota el producto estándard euclidiano.*

Ejemplo

$$h_{[-v,v]}(u) = |\langle u, v\rangle|.$$

$$h_{B_1}(u) = 1, \forall u \in S^{n-1}.$$

Propiedades de la función soporte

1. $K_1 \subset K_2 \iff h_{K_1} \leq h_{K_2}$. Un convexo K queda determinado por h.
2. Homogeneidad para $c \geq 0$:
$$h_K(cx) = ch_K(x), \ \forall x \in \mathbb{R}^n, \ c \in \mathbb{R}^+.$$
3. Convexidad:
$$h_K(x+y) \leq h_K(x) + h_K(y), \ \forall x, y \in \mathbb{R}^n.$$
4. Toda función que satisface (2) y (3) es función soporte.

Otras propiedades de la función soporte

Definición

Sean K_1, $K_2 \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos convexos y $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$. La suma vectorial

$$t_1 K_1 + t_2 K_2 = \{t_1 x_1 + t_2 x_2 \,|\, x_i \in K_i\}$$

es llamada **suma de Minkowski**.

Propiedades

- $h_{t_1 K_1 + t_2 K_2}(x) = t_1 h_{K_1}(x) + t_2 h_{K_2}(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$.
- $h_{K+x}(u) = h_K(u) + \langle x, u \rangle$, $\forall u \in S^{n-1}$.
- $h_{\phi K}(x) = h_K(\phi^t x)$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\phi \in GL(n, \mathbb{R})$.

Definición

Sea $(A, +)$ *un semi-grupo abeliano. Un funcional* $\varphi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to (A, +)$ *tal que*

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

para todo A, $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *con* $A \cup B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *se llama* **valoración**.

Valoraciones

Definición

Sea $(A,+)$ *un semi-grupo abeliano. Un funcional* $\varphi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to (A,+)$ *tal que*

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

para todo A*,* $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *con* $A \cup B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *se llama* **valoración**.

Casos Particulares:

- Valoraciones con valores reales. $(A,+) = (\mathbb{R},+)$.

Valoraciones

Definición

Sea $(A, +)$ *un semi-grupo abeliano. Un funcional* $\varphi : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow (A, +)$ *tal que*

$$\varphi(A \cup B) + \varphi(A \cap B) = \varphi(A) + \varphi(B)$$

para todo A*,* $B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *con* $A \cup B \in \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$ *se llama* **valoración**.

Casos Particulares:

- Valoraciones de Minkowski. $(A, +) = (\mathcal{K}(\mathbb{R}^n), +)$, donde $+$ denota la suma de Minkowski.

Algunas propiedades de valoraciones

- **Invarianza por translaciones:** $Z : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to (A, +)$

$$Z(K + x) = Z(K), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Algunas propiedades de valoraciones

- **Invarianza por translaciones:** $Z : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to (A, +)$

$$Z(K + x) = Z(K), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

- **Homogeneidad de grado** r**:** $Z : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to (A, +)$

$$Z(\lambda K) = \lambda^r Z(K), \quad \lambda > 0.$$

Algunas propiedades de valoraciones

- **Invarianza por translaciones:** $Z : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to (A, +)$
$$Z(K + x) = Z(K), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
- **Homogeneidad de grado** r**:** $Z : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to (A, +)$
$$Z(\lambda K) = \lambda^r Z(K), \quad \lambda > 0.$$
- $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$**-covarianza:** $Z : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$
$$Z(gK) = gZK, \quad g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}).$$
- $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$**-contravarianza:** $Z : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$
$$Z(gK) = g^{-T} ZK, \quad g \in \mathrm{SL}(n, \mathbb{R}).$$

VALORACIONES DE MINKOWSKI COVARIANTES

Cuerpo diferencia

Definition

El **operador cuerpo diferencia** está dado por

$$\begin{array}{rccc} \mathrm{D}: & \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) & \longrightarrow & \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \\ & K & \mapsto & K+(-K). \end{array}$$

a) Invariante por translaciones.
b) $\mathrm{SL}(n,\mathbb{R})$-covariante.
c) Valoración de Minkowski continua (métrica de Hausdorff).

Caracterización del cuerpo diferencia (Ludwig)

Si el operador $Z : \mathcal{K}(\mathbb{R}^n) \to \mathcal{K}(\mathbb{R}^n)$, $n \geq 2$ es

a) invariante por translaciones,

b) $\mathrm{SL}(n, \mathbb{R})$-covariante,

c) valoración continua de Minkowski,

entonces $Z = \lambda(\mathrm{Id} + (-\mathrm{Id}))$, $\lambda > 0$.

El recíproco también es cierto.

Cuerpo diferencia complejo (A.)

Sea el operador $Z : \mathcal{K}(\mathbb{C}^m) \to \mathcal{K}(\mathbb{C}^m)$, $m \geq 3$,

a) invariante por translaciones,

b') $\mathrm{SL}(m, \mathbb{C})$-covariante,

c) valoración continua de Minkowski.

Cuerpo diferencia complejo (A.)

Sea el operador $Z : \mathcal{K}(\mathbb{C}^m) \to \mathcal{K}(\mathbb{C}^m)$, $m \geq 3$,

a) invariante por translaciones,

b') $\mathrm{SL}(m, \mathbb{C})$-covariante,

c) valoración continua de Minkowski.

Entonces $Z = \mathrm{D}_C$, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$, está dado por

$$h(\mathrm{D}_C K, \xi)$$

Cuerpo diferencia complejo (A.)

Sea el operador $Z : \mathcal{K}(\mathbb{C}^m) \to \mathcal{K}(\mathbb{C}^m)$, $m \geq 3$,

a) invariante por translaciones,
b') $\mathrm{SL}(m, \mathbb{C})$-covariante,
c) valoración continua de Minkowski.

Entonces $Z = \mathrm{D}_C$, $C \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$, está dado por

$$h(\mathrm{D}_C K, \xi) = \int_{S^1} h(\alpha K, \xi) dS(C, \alpha), \quad \xi \in W^*.$$

C es único salvo translaciones.

El recíproco también se cumple para todo $C \in \mathcal{K}(\mathbb{C})$.

$C = \mathit{Intervalo}$: Recuperamos el cuerpo diferencia (o un rotado). $\mathrm{D}K$ es origen simétrico para todo K.

$C = \mathit{Cuadrado}$: $\mathrm{D}_C K = K - K + iK - iK$, donde i denota la estructura compleja.

$C = \mathit{Bola}$: $\mathrm{D}_C K$ es S^1-invariante para todo K.

¡Muchas gracias por vuestra atención!