# Curvas en $C^{(2)}$

Meritxell Sáez Cornellana

Universitat de Barcelona

16 de septiembre de 2013
Sevilla

$S/\mathbb{C}$ superficie proyectiva lisa.

$q(S) = \dim\ H^0(S, \Omega^1_S) = \dim\ H^1(S, \mathcal{O}_S)$

$S/\mathbb{C}$ superficie proyectiva lisa.

$q(S) = \dim\, H^0(S, \Omega^1_S) = \dim\, H^1(S, \mathcal{O}_S)$

$S$ es de tipo general cuando su divisor canónico $K_S$ es big.

$S/\mathbb{C}$ superficie proyectiva lisa.

$q(S) = \dim\ H^0(S, \Omega^1_S) = \dim\ H^1(S, \mathcal{O}_S)$

$S$ es de tipo general cuando su divisor canónico $K_S$ es big.

La variedad de Albanese de $S$ es $\mathrm{Alb}(S) = H^0(\Omega^1_S)^\vee / H_1(S, \mathbb{Z})$.
Fijado $p \in S$, el morfismo de Albanese es

$$\begin{array}{ccc} S & \xrightarrow{a_p} & \mathrm{Alb}(S) \\ x & \longrightarrow & \int_p^x \end{array}$$

La dimensión de $a(S)$ es la dimensión de Albanese de $S$.

**Definición**

*Sea $C$ una curva lisa e irreducible. El segundo producto simétrico de $C$, que denotaremos $C^{(2)}$, es el cociente del producto cartesiano de la curva consigo misma, $C \times C$, por la acción del grupo simétrico, $S_2$, que actúa intercambiando los factores.*

## Definición

*Sea $C$ una curva lisa e irreducible. El segundo producto simétrico de $C$, que denotaremos $C^{(2)}$, es el cociente del producto cartesiano de la curva consigo misma, $C \times C$, por la acción del grupo simétrico, $S_2$, que actúa intercambiando los factores.*

Tenemos de manera natural un morfismo cociente

$$\pi : \begin{array}{ccc} C \times C & \rightarrow & C^{(2)} \\ (x, y) & \rightarrow & x + y \end{array}$$

**Definición**

*Sea $C$ una curva lisa e irreducible. El segundo producto simétrico de $C$, que denotaremos $C^{(2)}$, es el cociente del producto cartesiano de la curva consigo misma, $C \times C$, por la acción del grupo simétrico, $S_2$, que actúa intercambiando los factores.*

Tenemos de manera natural un morfismo cociente

$$\pi : \begin{array}{ccc} C \times C & \to & C^{(2)} \\ (x, y) & \to & x + y \end{array}$$

$C^{(2)}$ es una superficie lisa con $q(C^{(2)}) = h^0(C^{(2)}, \Omega^1_{C^{(2)}}) = g(C)$.

$C^{(2)}$ es de tipo general cuando $g(C) \geq 3$.

Fijado $p \in C$

$$\begin{array}{ccc} C^{(2)} & \xrightarrow{a} & J(C) \cong Pic^0(C) \\ x+y & \longrightarrow & x+y-2p \end{array}$$

Fijado $p \in C$

$$\begin{array}{ccc} C^{(2)} & \xrightarrow{a} & J(C) \cong Pic^0(C) \\ x+y & \longrightarrow & x+y-2p \end{array}$$

Si $C$ es no hiperelíptica $a$ es inyectiva, con diferencial inyectiva, es decir, un isomorfismo en su imagen.
Si $C$ es hiperelíptica $a$ contrae la curva dada por la $g_2^1$ y es inyectiva en el resto de puntos.

Fijado un punto $p \in C$ tenemos un morfismo

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & C^{(2)} \\ x & \rightarrow & p + x \end{array}$$

Fijado un punto $p \in C$ tenemos un morfismo

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & C^{(2)} \\ x & \to & p + x \end{array}$$

la imagen de este morfismo es una curva en $C^{(2)}$ que parametriza los divisores de grado 2 en $C$ que pasan por $p$.

Fijado un punto $p \in C$ tenemos un morfismo

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & C^{(2)} \\ x & \rightarrow & p + x \end{array}$$

la imagen de este morfismo es una curva en $C^{(2)}$ que parametriza los divisores de grado 2 en $C$ que pasan por $p$.

**Definición**

*Llamaremos a esta curva* **curva coordenada** *y la denotaremos por* $C_p$.

Fijado un punto $p \in C$ tenemos un morfismo

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & C^{(2)} \\ x & \rightarrow & p + x \end{array}$$

la imagen de este morfismo es una curva en $C^{(2)}$ que parametriza los divisores de grado 2 en $C$ que pasan por $p$.

**Definición**

*Llamaremos a esta curva* **curva coordenada** *y la denotaremos por* $C_p$.

- Todas las curvas coordenadas son algebraicamente equivalentes (en particular numéricamente).

Fijado un punto $p \in C$ tenemos un morfismo

$$\begin{array}{ccc} C & \hookrightarrow & C^{(2)} \\ x & \rightarrow & p + x \end{array}$$

la imagen de este morfismo es una curva en $C^{(2)}$ que parametriza los divisores de grado 2 en $C$ que pasan por $p$.

**Definición**

*Llamaremos a esta curva* **curva coordenada** *y la denotaremos por* $C_p$.

- Todas las curvas coordenadas son algebraicamente equivalentes (en particular numéricamente).
- $C_p$ es un divisor amplio.

# Motivación

## Teorema

*(Mendes-Lopes, Pardini, Pirola) Sea $S$ una superficie de tipo general con dimensión de Albanese máxima. Si existe una curva $B \subset S$ con $p_a(B) = q(S)$, 2-conectada, tal que $B^2 > 0$ entonces $S$ es birracional al segundo producto simétrico de una curva.*

# Motivación

## Teorema

*(Mendes-Lopes, Pardini, Pirola) Sea $S$ una superficie de tipo general con dimensión de Albanese máxima. Si existe una curva $B \subset S$ con $p_a(B) = q(S)$, 2-conectada, tal que $B^2 > 0$ entonces $S$ es birracional al segundo producto simétrico de una curva.*

## Observación

*Si una curva $B$ en una superficie irregular $S$ es tal que $g(B) < q(S)$ entonces $B^2 \leq 0$.*

# Motivación

## Teorema

*(Mendes-Lopes, Pardini, Pirola) Sea $S$ una superficie de tipo general con dimensión de Albanese máxima. Si existe una curva $B \subset S$ con $p_a(B) = q(S)$, 2-conectada, tal que $B^2 > 0$ entonces $S$ es birracional al segundo producto simétrico de una curva.*

## Observación

*Si una curva $B$ en una superficie irregular $S$ es tal que $g(B) < q(S)$ entonces $B^2 \leq 0$.*

## Pregunta

*(Mendes-Lopes, Pardini, Pirola) ¿Existen ejemplos de curvas $B$ contenidas en una superficie irregular $S$ con $B^2 > 0$ y $q(S) < p_a(B) < 2q(S) - 1$?*

## Lema

*Sea $f : C \to B$ un morfismo no constante de grado 2 con $B$ una curva lisa e irreducible. Entonces la curva $\Sigma := \{f^{-1}(q) : q \in B\} \subset C^{(2)}$ satisface*

- $C_p \cdot \Sigma = 1.$
- $\Delta_C \cdot \Sigma = 2g(C) - 2 - 2(2g(B) - 2)$, *i.e. el grado del divisor de ramificación de $f$.*

### Lema

*Sea $f : C \to B$ un morfismo no constante de grado 2 con $B$ una curva lisa e irreducible. Entonces la curva $\Sigma := \{f^{-1}(q) : q \in B\} \subset C^{(2)}$ satisface*

- $C_p \cdot \Sigma = 1$.
- $\Delta_C \cdot \Sigma = 2g(C) - 2 - 2(2g(B) - 2)$, *i.e. el grado del divisor de ramificación de $f$.*

### Lema

*Sea $B \subset C^{(2)}$ una curva tal que:*

i) $B \not\subset Supp(C_p)\ \forall p \in C$
ii) $B \cdot C_p = 1$

*Entonces $B$ es lisa y existe un recubrimiento de grado 2, $f : C \to B$ tal que $B \cong \{f^{-1}(q) : q \in B\} \subset C^{(2)}$.*

## Definición

*Diremos que un diagrama de curvas*
$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "(n:1)"] \arrow[d, "(d:1)"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$
**reduce** *si existen curvas $F, H$ tales que existe un diagrama ($k > 1$)*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "(n:1)"] \arrow[d, dotted, "(k:1)"] \arrow[dd, bend right=60, "(d:1)"'] & B \arrow[d, dotted, "(k:1)"] \\ F \arrow[r, dotted, "(n:1)"'] \arrow[d, dotted] & H \\ C & \end{tikzcd}$$

*Cuando $k = d$ diremos que el diagrama* **completa** *($F = C$).*

### Teorema

*Sea $\overline{B}$ una curva irreducible, $B$ su normalización, tal que no existen morfismos $B \to C$.*
*Un morfismo de grado 1 de $B$ en $C^{(2)}$ existe, con imagen $\tilde{B}$ y $\tilde{B} \cdot C_p = d \geq 2$ si, y sólo si, existe una curva lisa e irreducible $D$ y un diagrama*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "(2:1)"] \arrow[d, "(d:1)"'] & B \\ C & \end{tikzcd}$$

*que no reduce.*

## Proposición

*Sea $D$ una curva lisa e irreducible con la acción de un grupo finito $G$. Sean $\alpha, \beta \in G$ con $|\alpha| = d \geq 2$ y $|\beta| = e \geq 2$. Consideremos el diagrama*

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "(e:1)"] \arrow[d, "(d:1)"] & D/_{\langle\beta\rangle} = B \\ D/_{\langle\alpha\rangle} = C & \end{tikzcd}$$

1. *Si el orden de $\langle\alpha, \beta\rangle$ es igual a $e \cdot d$ entonces el diagrama completa.*
2. *Si el orden de $\langle\alpha, \beta\rangle$ es estrictamente mayor que $e \cdot d$ entonces el diagrama no completa.*

Vamos a estudiar con detalle el caso $\tilde{B} \subset C^{(2)}$ con $C_p \cdot \tilde{B} = 2$.

Vamos a estudiar con detalle el caso $\tilde{B} \subset C^{(2)}$ con $C_p \cdot \tilde{B} = 2$.

O bien tenemos la acción de un grupo dihedral en la curva $D$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "(2:1)"] \arrow[d, "(2:1)"] & D/\langle i \rangle = B \quad \langle i, j \rangle = D_n \\ D/\langle j \rangle = C & \end{tikzcd}$$

Vamos a estudiar con detalle el caso $\tilde{B} \subset C^{(2)}$ con $C_p \cdot \tilde{B} = 2$.

O bien tenemos la acción de un grupo dihedral en la curva $D$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "(2{:}1)"] \arrow[d, "(2{:}1)"] & D/\langle i \rangle = B \quad \langle i, j \rangle = D_n \\ D/\langle j \rangle = C & \end{tikzcd}$$

O bien $\tilde{B} = \{x + \iota(x) : \ x \in C\}$ con $\iota$ un automorfismo de $C$.

Vamos a estudiar con detalle el caso $\tilde{B} \subset C^{(2)}$ con $C_p \cdot \tilde{B} = 2$.

O bien tenemos la acción de un grupo dihedral en la curva $D$

$$\begin{tikzcd} D \arrow[r, "(2:1)"] \arrow[d, "(2:1)"] & D/\langle i\rangle = B \quad \langle i, j\rangle = D_n \\ D/\langle j\rangle = C & \end{tikzcd}$$

O bien $\tilde{B} = \{x + \iota(x) : \ x \in C\}$ con $\iota$ un automorfismo de $C$.

**Teorema**

*No existen curvas $\tilde{B} \subset C^{(2)}$ con $q(C^{(2)}) < p_a(\tilde{B}) < 2q(C^{(2)}) - 1$, tal que $\tilde{B}^2 > 0$ y $\tilde{B} \cdot C_p = 2$.*

**Teorema (Clasificación)**

*Todos los pares de curvas lisas* $(C, B)$ *con* $B \stackrel{1:1}{\to} C^{(2)}$ *con imagen* $\tilde{B}$, *tal que* $p_a(\tilde{B}) \geq 2q(C^{(2)}) - 1$, $\tilde{B}^2 > 0$ *y* $\tilde{B} \cdot C_p = 2$ *estan considerados en uno de los siguientes casos:*

**Teorema (Clasificación)**

*Todos los pares de curvas lisas $(C, B)$ con $B \stackrel{1:1}{\to} C^{(2)}$ con imagen $\tilde{B}$, tal que $p_a(\tilde{B}) \geq 2q(C^{(2)}) - 1$, $\tilde{B}^2 > 0$ y $\tilde{B} \cdot C_p = 2$ estan considerados en uno de los siguientes casos:*

$C$ una curva de género 2 con la acción de un automorfismo de orden 10, $\iota$, tal que, $\nu(\iota) = 1$, $\nu(\iota^2) = 3$ y $\nu(\iota^5) = 6$; con $\tilde{B}$ la simetrización del grafo de $\iota$ y $B = C$.

Por la acción de un dihedral en una curva $D$:

**$D_n = D_{10}$**

- $g(C) = 2$.
- $B, C$ hiperelípticas.
- $p_a(\tilde{B}) = 2g(C) - 1$.
- $\tilde{B}^2 = 1$
- Tres tipos topológicos de acciones en $D$.

## $D_n = D_6$

- $g(C) = 2$ o $g(C) = 3$.
- $B, C$ bielípticas.
- $p_a(\tilde{B}) = 2g(C) - 1$.
- $\tilde{B}^2 = 1$ or $\tilde{B}^2 = 2$.
- Nueve tipos topológicos de acciones en $D$.

## $D_n = D_6$

- $g(C) = 2$ o $g(C) = 3$.
- $B, C$ bielípticas.
- $p_a(\tilde{B}) = 2g(C) - 1$.
- $\tilde{B}^2 = 1$ or $\tilde{B}^2 = 2$.
- Nueve tipos topológicos de acciones en $D$.

## $D_n = D_4$

- Cualquier $g(C)$.
- $C$ hiperelíptica.
- $p_a(\tilde{B}) = 2g(C)$.
- $\tilde{B}^2 = 4$.
- Tres familias de tipos topológicos de acciones en $D$.

# Bibliografia


- M.Mendes Lopes, R.Pardini, and G. P. Pirola, **A characterization of the symmetric square of a curve**, *International Mathematics Research Notices* (2011).
- M.Mendes Lopes, R.Pardini, and G. P. Pirola, **Brill-Noether loci for divisors on irregular varieties**, to appear in *Journal of the European Mathematical Society (JEMS)*.

Gracias.

¿Alguna pregunta?