Un espacio de Banach con ω estructuras complejas

Wilson A. Cuéllar Carrera

Universidade de São Paulo
ICMAT- Madrid

Septiembre 16, 2013

Estructuras Complejas

Definición

Un espacio de Banach real X *admite una* *estructura compleja* *si existe un operador lineal y continuo* $I : X \to X$ *tal que* $I^2 = -Id$.

Estructuras Complejas

Definición

Un espacio de Banach real X admite una estructura compleja si existe un operador lineal y continuo $I : X \to X$ tal que $I^2 = -Id$. Esto permite definir una estructura $\mathbb{C}$-lineal en X mediante la multiplicación por escalar:

$$(\lambda + i\mu).x = \lambda x + \mu I(x) \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R} \ , \forall x \in X).$$

Estructuras Complejas

Definición

Un espacio de Banach real X admite una estructura compleja si existe un operador lineal y continuo $I : X \to X$ tal que $I^2 = -Id$. Esto permite definir una estructura $\mathbb{C}$-lineal en X mediante la multiplicación por escalar:

$$(\lambda + i\mu).x = \lambda x + \mu I(x) \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R}\ , \forall x \in X).$$

Equipando X con la norma equivalente:

$$|||x||| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \| \cos\theta x + \sin\theta I(x) \|$$

Estructuras Complejas

Definición

Un espacio de Banach real X admite una estructura compleja si existe un operador lineal y continuo $I : X \to X$ tal que $I^2 = -Id$. Esto permite definir una estructura $\mathbb{C}$-lineal en X mediante la multiplicación por escalar:

$$(\lambda + i\mu).x = \lambda x + \mu I(x) \ (\lambda, \mu \in \mathbb{R} \ , \forall x \in X).$$

Equipando X con la norma equivalente:

$$|||x||| = \sup_{0 \leq \theta \leq 2\pi} \| \cos\theta x + \sin\theta I(x) \|$$

obtenemos un espacio de Banach complejo que denotaremos como X^I.

Sea X un espacio de Banach complejo, $\overline{X}$ denota el espacio complejo conjugado de X, i. e., $\overline{X}$ tiene los mismos vectores que X y la multiplicación por escalar está dada por:

$$\lambda.x = \overline{\lambda}x \quad (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in X)$$

Sea X un espacio de Banach complejo, $\overline{X}$ denota el espacio complejo conjugado de X, i. e., $\overline{X}$ tiene los mismos vectores que X y la multiplicación por escalar está dada por:

$$\lambda.x = \overline{\lambda}x \ \ (\forall\lambda \in \mathbb{C}, \forall x \in X)$$

- X y $\overline{X}$ son $\mathbb{R}$-linealmente isométricos.

Sea X un espacio de Banach complejo, $\overline{X}$ denota el espacio complejo conjugado de X, i. e., $\overline{X}$ tiene los mismos vectores que X y la multiplicación por escalar está dada por:

$$\lambda.x = \overline{\lambda}x \ \ (\forall \lambda \in \mathbb{C}, \, \forall x \in X)$$

- X y $\overline{X}$ son $\mathbb{R}$-linealmente isométricos.
- J. Bourgain (1986) y N. Kalton (1995) Construyeron ejemplos de espacios de Banach no isomorfos a sus respectivos conjugados.

Definición (Estructuras complejas equivalentes)

Dos estructuras complejas I *y* J *de un espacio de Banach real* X *son equivalentes se existe un isomorfismo* R*-lineal* $T : X \to X$ *tal que* $TI = JT$.

Definición (Estructuras complejas equivalentes)

Dos estructuras complejas I y J de un espacio de Banach real X son equivalentes se existe un isomorfismo R-lineal $T : X \to X$ tal que $TI = JT$.

- I y J son equivalentes $\Leftrightarrow$ X^I y X^J son $\mathbb{C}$-linealmente isomorfos.

Definición (Estructuras complejas equivalentes)

Dos estructuras complejas I y J de un espacio de Banach real X son equivalentes se existe un isomorfismo R-lineal $T : X \to X$ tal que $TI = JT$.

- I y J son equivalentes $\Leftrightarrow$ X^I y X^J son $\mathbb{C}$-linealmente isomorfos.
- Si $I - J$ es estrictamente singular, entonces I y J son equivalentes.

Ejemplos (Espacios de Banach sin estructura compleja)

- *Espacios de dimensión finita impar.*

Ejemplos (Espacios de Banach sin estructura compleja)

- *Espacios de dimensión finita impar.*
- *Espacio de James. J. Dieudonné (1952).*

Ejemplos (Espacios de Banach sin estructura compleja)

- *Espacios de dimensión finita impar.*
- *Espacio de James. J. Dieudonné (1952).*
- *S. Szarek (1986): Existe un espacio de Banach real uniformemente convexo sin estructura compleja.*

Ejemplos (Espacios de Banach sin estructura compleja)

- *Espacios de dimensión finita impar.*
- *Espacio de James. J. Dieudonné (1952).*
- *S. Szarek (1986): Existe un espacio de Banach real uniformemente convexo sin estructura compleja.*
- *El espacio hereditariamente indescomponible de W. T. Gowers y B. Maurey (1993)*

Ejemplos (Espacios de Banach sin estructura compleja)

- *Espacios de dimensión finita impar.*
- *Espacio de James. J. Dieudonné (1952).*
- *S. Szarek (1986): Existe un espacio de Banach real uniformemente convexo sin estructura compleja.*
- *El espacio hereditariamente indescomponible de W. T. Gowers y B. Maurey (1993)*
- *Espacios de Banach reales tales que todo operador es una perturbación estrictamente singular de un múltiplo de la identidad.*

Ejemplos (Espacios de Banach con estructura compleja única)

- *Kalton: Sea X espacio de Banach real tal que el complexificado de X es primario, entonces X posee a lo más una estructura compleja.*

Ejemplos (Espacios de Banach con estructura compleja única)

- *Kalton: Sea X espacio de Banach real tal que el complexificado de X es primario, entonces X posee a lo más una estructura compleja.*
- c_0, ℓ_p $(1 \leq p \leq \infty)$ *y* $C[0,1]$ *poseen estructura compleja única.*

Ejemplos (Espacios de Banach con un número finito de estructuras complejas)

- V. Ferenczi *(2007): Existe un espacio de Banach real $X(\mathbb{C})$ hereditariamente indescomponible que admite exactamente dos estructuras complejas salvo isomorfismo.*

Ejemplos (Espacios de Banach con un número finito de estructuras complejas)

- *V. Ferenczi (2007): Existe un espacio de Banach real $X(\mathbb{C})$ hereditariamente indescomponible que admite exactamente dos estructuras complejas salvo isomorfismo.*
- *El espacio $X(\mathbb{C})^n$ posee exactamente $n+1$ estructuras complejas.*

Ejemplos (Espacios de Banach con un número finito de estructuras complejas)

- *V. Ferenczi (2007): Existe un espacio de Banach real $X(\mathbb{C})$ hereditariamente indescomponible que admite exactamente dos estructuras complejas salvo isomorfismo.*
- *El espacio $X(\mathbb{C})^n$ posee exactamente $n+1$ estructuras complejas.*

Ejemplos (Espacios de Banach con una cantidad no enumerable de estructuras complejas)

- *J. Bourgain (1986) y R. Anisca (2003).*

Problema: Encontrar un espacio con exactamente ω estructuras complejas

Problema: Encontrar un espacio con exactamente ω estructuras complejas

Teorema

Existe un espacio de Banach real $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ *reflexivo y separable que admite una descomposición de Schauder infinito dimensional* $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C}) = \oplus_k \mathfrak{X}_k$ *tal que todo operador* $\mathbb{R}$*-lineal* T *en* $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ *puede ser escrito de la forma* $T = D_T + S$*, donde* S *es un operador estrictamente singular,* $D_T|_{\mathfrak{X}_k} = \lambda_k Id_{\mathfrak{X}_k}$ $(\lambda_k \in \mathbb{C})$ *y la sucesión* $(\lambda_k)_k$ *es convergente.*

Problema: Encontrar un espacio con exactamente ω estructuras complejas

Teorema

Existe un espacio de Banach real $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ reflexivo y separable que admite una descomposición de Schauder infinito dimensional $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C}) = \oplus_k \mathfrak{X}_k$ tal que todo operador $\mathbb{R}$-lineal T en $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ puede ser escrito de la forma $T = D_T + S$, donde S es un operador estrictamente singular, $D_T|_{\mathfrak{X}_k} = \lambda_k Id_{\mathfrak{X}_k}$ $(\lambda_k \in \mathbb{C})$ y la sucesión $(\lambda_k)_k$ es convergente.

Corolario

$\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ posee exactamente ω estructuras complejas.

Construcción del espacio $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$

Construimos la versión compleja del espacio obtenido por S. Argyros, J. Lopez-Abad, S. Todorcevic en A Class of Banach spaces with few non strictly singular operators (2005).

Construcción del espacio $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$

Construimos la versión compleja del espacio obtenido por S. Argyros, J. Lopez-Abad, S. Todorcevic en A Class of Banach spaces with few non strictly singular operators (2005).

Fijemos (m_j) and (n_j) dos sucesiones tales que

a. $m_1 = 2$ e $m_{j+1} = m_j^4$;
b. $n_1 = 4$ e $n_{j+1} = (4n_j)^{s_j}$, where $s_j = \log_2 m_{j+1}^3$.

Construcción del espacio $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$

Construimos la versión compleja del espacio obtenido por S. Argyros, J. Lopez-Abad, S. Todorcevic en A Class of Banach spaces with few non strictly singular operators (2005).

Fijemos (m_j) and (n_j) dos sucesiones tales que

a. $m_1 = 2$ e $m_{j+1} = m_j^4$;

b. $n_1 = 4$ e $n_{j+1} = (4n_j)^{s_j}$, where $s_j = \log_2 m_{j+1}^3$.

Sea $\mathcal{K}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ el conjunto minimal de $c_{00}(\omega^2, \mathbb{C})$ tal que

1. a.) Contiene todos los vectores canónicos $(e_\alpha^*)_{\alpha<\omega^2}$. b.) Para cada $\phi \in \mathcal{K}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ y cada número complejo $\theta = \alpha + i\beta$ con α y β racionales tales que $|\theta| \leq 1$, $\theta\phi \in \mathcal{K}_{\omega^2}(\mathbb{C})$. c.) Es cerrado bajo restricciones de intervalos de ω^2.

Construcción del espacio $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$

2. Para cada $\{\phi_i, : i = 1, ..., n_{2j}\} \subseteq \mathcal{K}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ tal que $\operatorname{supp}\phi_1 < \ldots < \operatorname{supp}\ \phi_{n_{2j}}$, entonces la combinación
$$\phi = \frac{1}{m_{2j}} \sum_{i=1}^{n_{2j}} \phi_i \in \mathcal{K}_{\omega^2}(\mathbb{C}).$$
3. Para cada sucesión especial $(\phi_1, \ldots, \phi_{n_{2j+1}})$, la combinación
$$\phi = \frac{1}{m_{2j+1}} \sum_{i=1}^{n_{2j+1}} \phi_i \in \mathcal{K}_{\omega^2}(\mathbb{C}).$$
4. Es racionalmente convexo.

Construcción del espacio $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$

Consideremos la norma en $c_{00}(\omega^2, \mathbb{C})$ definida por:

$$\|x\| = \sup\left\{ \left| \sum_{\alpha<\omega_1} \phi(\alpha)x(\alpha) \right| \, : \, \phi \in \mathcal{K}_{\omega^2}(\mathbb{C}) \right\}$$

Construcción del espacio $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$

Consideremos la norma en $c_{00}(\omega^2, \mathbb{C})$ definida por:

$$\|x\| = \sup\left\{\left|\sum_{\alpha<\omega_1} \phi(\alpha)x(\alpha)\right| \, : \, \phi \in \mathcal{K}_{\omega^2}(\mathbb{C})\right\}$$

El espacio $\mathfrak{X}_{\omega^2}(\mathbb{C})$ está definido como el completamiento de $(c_{00}(\omega^2, \mathbb{C}), \|.\|)$.

Bibliografía

Anisca, R.
Subspaces of L_p with more than one complex structure.
Proc. Amer. Math. Soc. (131) **9** (2003), 2819–2829.

Argyros, S., Lopez-Abad, J., Todorcevic, S
A class of Banach spaces with few non strictly singular operators.
J. of Functional Analysis (222) **2** (2005), 306–384.

Bourgain, J.
Real isomorphic Banach spaces need not be complex isomorphic.
Proc. Amer. Math. Soc. (96) **2** (1986), 221–226.

Dieudonné, J.
Complex structures on real Banach spaces.
Proc. Amer. Math. Soc. (3) **1** (1952), 162–164.

Bibliografía

Ferenczi, V.
Uniqueness of complex structure and real hereditarily indecomposable Banach spaces.
Advances in Math. **213** (2007), 462–488.

Gowers, T., Maurey B.
The unconditional basic sequence problem.
J. Amer. Math. Soc. (6) **4** (1993), 851–874.

Gowers, T.
A solution to Banach's hyperplane problem.
Bull. London Math. Soc. (26) **6** (1994), 523–530.

Gowers, T.
Banach spaces with small spaces of operators.
Math Ann. (307) (1997), 543–568.

Bibliografía

Szarek, S.
A super reflexive Banach space which does not admit complex structure.
Proc. Amer. Math. Soc. (97) **3** (1986), 437–444.