Normas Separadoras, Renormamientos y Propiedades de Punto Fijo

Alfredo Barrera Cuevas

Sevilla, Septiembre de 2013

Departamento de Análisis
Facultad de Matemáticas
Universidad de Sevilla

Índice

Índice

Índice

Índice

Notación

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_n$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, se denota por:

Notación

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_n$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, se denota por:

- $\mathcal{P}(X) = \{p : X \to [0, +\infty) : p$ es norma equivalente a $\|.\|\}$

Notación

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_n$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, se denota por:

- $\mathcal{P}(X) = \{p : X \to [0, +\infty) : p$ es norma equivalente a $\|.\|\}$
- $supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$

Notación

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_n$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, se denota por:

- $\mathcal{P}(X) = \{p : X \to [0, +\infty) : p$ es norma equivalente a $\|.\|\}$
- $supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$
- $Q_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} x_n e_n$

Notación

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_n$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, se denota por:

- $\mathcal{P}(X) = \{p : X \to [0, +\infty) : p$ es norma equivalente a $\|.\|\}$
- $supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$
- $Q_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} x_n e_n$
- Si x, y son dos vectores X se denota $x \ll y$ si $\max supp(x) < \min supp(y)$.

Notación

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_n$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, se denota por:

- $\mathcal{P}(X) = \{p : X \to [0, +\infty) : p \text{ es norma equivalente a } \|.\|\}$
- $supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$
- $Q_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} x_n e_n$
- Si x, y son dos vectores X se denota $x \ll y$ si $\max supp(x) < \min supp(y)$.
- Dados $k, r \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, se denota $k \ll x$ $(x \ll r)$ siempre que $e_k \ll x$ $(x \ll e_r)$.

Notación

Sea $(X, \|.\|)$ un espacio de Banach con una base de Schauder $\{e_n\}_n$. Dado $x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n e_n \in X$, se denota por:

- $\mathcal{P}(X) = \{p : X \to [0, +\infty) : p$ es norma equivalente a $\|.\|\}$
- $supp(x) = \{n \in \mathbb{N} : x_n \neq 0\}$
- $Q_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} x_n e_n$
- Si x, y son dos vectores X se denota $x \ll y$ si $\max supp(x) < \min supp(y)$.
- Dados $k, r \in \mathbb{N}$ y $x \in X$, se denota $k \ll x$ $(x \ll r)$ siempre que $e_k \ll x$ $(x \ll e_r)$.
- Dada una sucesión $(y_n) \subset X$, se dice que (y_n) es una sucesión bloque de la base de Schauder si existen enteros positivos $p_1 \leq q_1 < p_2 \leq q_2 < \ldots$ tal que y_n pertenece al espacio generado (span) de $\{e_{p_n}, \cdots, e_{q_n}\}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Definición

Sean X un espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot)$ una norma en X. Se dice que $p(\cdot)$ separa soportes disjuntos si $p(x+y) = p(x) + p(y)$ cuando $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$.

Definición

Sean X un espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot)$ una norma en X. Se dice que $p(\cdot)$ separa soportes disjuntos si $p(x+y) = p(x) + p(y)$ cuando $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$.

Ejemplo

La norma $\|.\|_1$ en el espacio ℓ_1 separa soportes disjuntos.

Definición

Sean X un espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot)$ una norma en X. Se dice que $p(\cdot)$ separa soportes disjuntos si $p(x+y) = p(x) + p(y)$ cuando $supp(x) \cap supp(y) = \emptyset$.

Ejemplo

La norma $\|.\|_1$ en el espacio ℓ_1 separa soportes disjuntos.

Definición

Sean X un espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot)$ una norma en X. Decimos que $p(\cdot)$ es una norma asintóticamente separadora si para todo $\epsilon > 0$ existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$p(x) + p(y) \leq (1+\epsilon)p(x+y)$$

siempre que $k \ll x \ll y$.

Nota

Podemos medir el grado de separación asintótica de la norma $p(\cdot)$ introduciendo los siguientes coeficientes: Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_k(X,p) := \sup\left\{ \frac{p(x)+p(y)}{p(x+y)} : k \ll x \ll y \right\}$$

Nota

Podemos medir el grado de separación asintótica de la norma $p(\cdot)$ introduciendo los siguientes coeficientes: Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_k(X,p) := \sup\left\{ \frac{p(x)+p(y)}{p(x+y)} : k \ll x \ll y \right\}$$

Observaciones

- Se cumple: $p(x)+p(y) \leq B_k(X,p)p(x+y), \text{ si } k \ll x \ll y.$

Nota

Podemos medir el grado de separación asintótica de la norma $p(\cdot)$ introduciendo los siguientes coeficientes: Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_k(X,p) := \sup\left\{ \frac{p(x)+p(y)}{p(x+y)} : k \ll x \ll y \right\}$$

Observaciones

- Se cumple: $p(x)+p(y) \leq B_k(X,p)p(x+y)$, si $k \ll x \ll y$.
- Se cumple: $1 \leq B_k(X,p)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, $\{B_k(X,p)\}_k$ es una sucesión no creciente en $[1,+\infty]$

Nota

Podemos medir el grado de separación asintótica de la norma $p(\cdot)$ introduciendo los siguientes coeficientes: Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos

$$B_k(X,p) := \sup\left\{ \frac{p(x)+p(y)}{p(x+y)} : k \ll x \ll y \right\}$$

Observaciones

- Se cumple: $p(x)+p(y) \leq B_k(X,p)p(x+y), \text{ si } k \ll x \ll y$.
- Se cumple: $1 \leq B_k(X,p)$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Además, $\{B_k(X,p)\}_k$ es una sucesión no creciente en $[1,+\infty]$
- Sean p, q con $ap(x) \leq q(x) \leq bp(x)\ \forall x \in X\ (a, b > 0)$,

  $$\text{se cumple: } \frac{a}{b}B_k(X,p) \leq B_k(X,q) \leq \frac{b}{a}B_k(X,p).$$

Definición

Sea X un espacio de Banach con base de Schauder. Sea $p(\cdot)$ una norma en X. Definimos el coeficiente de separación asintótica de $p(\cdot)$ como

$$B(X, p) = \lim_k B_k(X, p).$$

Definición

Sea X un espacio de Banach con base de Schauder. Sea $p(\cdot)$ una norma en X. Definimos el coeficiente de separación asintótica de $p(\cdot)$ como

$$B(X, p) = \lim_k B_k(X, p).$$

Lema

Sea $p(\cdot)$ una norma en el espacio de Banach X. Entonces $p(\cdot)$ es una norma asintóticamente separadora si y solo si $B(X, p) = 1$.

Definición

Sea X un espacio de Banach con base de Schauder. Sea $p(\cdot)$ una norma en X. Definimos el coeficiente de separación asintótica de $p(\cdot)$ como

$$B(X,p) = \lim_{k} B_k(X,p).$$

Lema

Sea $p(\cdot)$ una norma en el espacio de Banach X. Entonces $p(\cdot)$ es una norma asintóticamente separadora si y solo si $B(X,p) = 1$.

Ejemplo

Una norma $p(\cdot)$ que separa soportes disjuntos es asintóticamente separadora. En este caso $B_k(X,p) = B(X,p) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Vamos a ver el valor de los coeficientes $B_k(X, p)$ para algunos espacios de Banach X dotados de una base de Schauder para diferentes normas equivalentes:

Vamos a ver el valor de los coeficientes $B_k(X, p)$ para algunos espacios de Banach X dotados de una base de Schauder para diferentes normas equivalentes:

Ejemplos (espacios clásicos)

- Consideremos el espacio c_0 dotado con su norma y base de Schauder usuales. Entonces $B_k(c_0, \|\cdot\|_\infty) = 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $B(c_0, \|\cdot\|_\infty) = 2$.

Vamos a ver el valor de los coeficientes $B_k(X, p)$ para algunos espacios de Banach X dotados de una base de Schauder para diferentes normas equivalentes:

Ejemplos (espacios clásicos)

- Consideremos el espacio c_0 dotado con su norma y base de Schauder usuales. Entonces $B_k(c_0, \|\cdot\|_\infty) = 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $B(c_0, \|\cdot\|_\infty) = 2$.
- Sea ℓ_p con $1 \leq p < +\infty$ dotado de la base de Schauder usual y la norma $\|\cdot\|_p$. Entonces $B_k(\ell_p, \|\cdot\|_p) = 2^{\frac{p-1}{p}}$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y por tanto $B(\ell_p, \|\cdot\|_p) = 2^{\frac{p-1}{p}}$.

Lema

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base de Schauder $\{e_n\}_n$. Supongamos que $0 < m = \inf_n \|e_n\| \leq \sup_n \|e_n\| = M < +\infty$. Si existe alguna norma $p \in \mathcal{P}(X)$ la cual sea asintóticamente separadora, entonces el espacio X contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1.

Lema

Sea $(X, \|\cdot\|)$ un espacio de Banach con base de Schauder $\{e_n\}_n$. Supongamos que $0 < m = \text{ínf}_n \|e_n\| \leq \sup_n \|e_n\| = M < +\infty$. Si existe alguna norma $p \in \mathcal{P}(X)$ la cual sea asintóticamente separadora, entonces el espacio X contiene un subespacio isomorfo a ℓ_1.

Nota

Este resultado muestra que no existen normas equivalentes a las usuales en c_0 y en $\ell_p (1 < p < +\infty)$ las cuales sean asintóticamente separadoras.

Ejemplos (distintas normas en ℓ_1)

- $B_k(\ell_1, \|\cdot\|_1) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplos (distintas normas en ℓ_1)

- $B_k(\ell_1, \|\cdot\|_1) = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$.
- Se define la siguiente norma equivalente en ℓ_1

$$\|x\|_{1,\infty} = max\{\|x^+\|_1, \|x^-\|_1\}$$

la cual satisface $1/2\|x\|_1 \leq \|x\|_{1,+\infty} \leq \|x\|_1$. Esto implica que $B_k(\ell_1, \|\cdot\|_{1,\infty}) \leq 2$. Tomando $x = e_{k+1}$ and $y = -e_{k+2}$, se cumple que $B_k(\ell_1, \|\cdot\|_{1,\infty}) = 2$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $B(\ell_1, \|\cdot\|1, \infty) = 2$.

Teorema de James

Para todo $(\epsilon_k) \downarrow 0$ existe una sucesión $(x_n) \subset \ell_1$ tal que

$$(1-\epsilon_k)\sum_{n=k}^{\infty} |t_n| \leq p\left(\sum_{n=k}^{\infty} t_n x_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} |t_n|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y toda $(t_n) \in \ell_1$.

Teorema de James

Para todo $(\epsilon_k) \downarrow 0$ existe una sucesión $(x_n) \subset \ell_1$ tal que

$$(1-\epsilon_k)\sum_{n=k}^{\infty} |t_n| \leq p\left(\sum_{n=k}^{\infty} t_n x_n\right) \leq \sum_{n=k}^{\infty} |t_n|$$

para todo $k \in \mathbb{N}$ y toda $(t_n) \in \ell_1$.

Ejemplos (distintas normas en ℓ_1)

- Toda norma equivalente $p(\cdot)$ en ℓ_1 es asintóticamente separadora para cierto subespacio cerrado Y_p. Definamos Y_p el subespacio cerrado generado por la sucesión básica $(x_n)_n$ dada por el Teorema de James. Se cumple que

$$B_k(Y_p, p) \leq \frac{1}{1-\epsilon_k} \text{ para todo } k \in \mathbb{N}.$$

Ejemplos (distintas normas en ℓ_1)

Sea $(\gamma_k)_k$ una sucesión en $(0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$. Se define la norma

$$|||x||| = \sup_k \gamma_k \|Q_k x\|_1, \qquad x \in \ell_1, \text{ donde } Q_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} x_n e_n$$

La norma $|||\cdot|||$ es asintóticamente separadora (y no separa soportes disjuntos).

Definición

Dada una norma equivalente $p \in \mathcal{P}(X)$, decimos que p es premonótona si para todos $n \leq k \leq m$ y todo $x \in X$ se tiene

$$p\left(\sum_{i=k}^{m} x_i e_i\right) \leq p\left(\sum_{i=n}^{m} x_i e_i\right)$$

Definición

Dada una norma equivalente $p \in \mathcal{P}(X)$, decimos que p es premonótona si para todos $n \leq k \leq m$ y todo $x \in X$ se tiene

$$p\left(\sum_{i=k}^{m} x_i e_i\right) \leq p\left(\sum_{i=n}^{m} x_i e_i\right)$$

Observación

Notemos que para toda norma premonótona se cumple que $p(Q_k x) \leq p(x)$ para todo $k \in \mathbb{N}$ y $x \in X$.

Lema

Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder. Supongamos que $p(\cdot)$ es premonótona, equivalente y asintóticamente separadora. Fijemos $(\gamma_k)_k \subset (0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$ y definamos la norma

$$p_L(x) = \sup_k \gamma_k p(Q_k(x))$$

Entonces $p_L(\cdot)$ es una norma equivalente a $p(\cdot)$ la cual es también premonótona y asintóticamente separadora.

Lema

Sea X un espacio de Banach con una base de Schauder. Supongamos que $p(\cdot)$ es premonótona, equivalente y asintóticamente separadora. Fijemos $(\gamma_k)_k \subset (0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$ y definamos la norma

$$p_L(x) = \sup_k \gamma_k p(Q_k(x))$$

Entonces $p_L(\cdot)$ es una norma equivalente a $p(\cdot)$ la cual es también premonótona y asintóticamente separadora.

Demostración

Es fácil probar que $\gamma_k p(x) \leq p_L(x) \leq p(x)$ para todo $x \gg k$, ya que $p(\cdot)$ es premonótona. Por lo tanto $B_k(X, p_L) \leq \frac{1}{\gamma_k} B_k(X, p)$. Tomando límite cuando k tiende a infinito, se deduce que $B(X, p_L) = 1$ y p_L es una norma asintóticamente separadora.

Sucesiones de normas asintóticamente separadoras

Definimos la siguiente sucesión de normas por recurrencia:
Sea p_0 una norma premonótona y asintóticamente separadora. Definimos

$$p_n(x) = \sup_k \gamma_k p_{n-1}(Q_k(x)), \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el lema, todas las normas p_n son premonótonas y asintóticamente separadoras.

Definición

Sean X espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$.
Se dice que $p(\cdot)$ tiene la **Propiedad** $(*)$ si se cumple que
$\limsup_n p(x_n + x) = \limsup_n p(x_n) + p(x)$
para toda (x_n) sucesión bloque de la base de Schauder y $\forall x \in X$.

Definición

Sean X espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$. Se dice que $p(\cdot)$ tiene la **Propiedad** $(*)$ si se cumple que
$\limsup_n p(x_n + x) = \limsup_n p(x_n) + p(x)$
para toda (x_n) sucesión bloque de la base de Schauder y $\forall x \in X$.

Ejemplo

La norma $\|.\|_1$ en el espacio ℓ_1 cumple la Propiedad $(*)$.

Definición

Sean X espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$.
Se dice que $p(\cdot)$ tiene la **Propiedad** $(*)$ si se cumple que
$\limsup_n p(x_n + x) = \limsup_n p(x_n) + p(x)$
para toda (x_n) sucesión bloque de la base de Schauder y $\forall x \in X$.

Ejemplo

La norma $\|.\|_1$ en el espacio ℓ_1 cumple la Propiedad $(*)$.

Definición

Sean X espacio de Banach con base de Schauder y $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$.
Decimos que la norma $p(\cdot)$ es secuencialmente asintóticamente separadora si para todo $\epsilon > 0$ existe algún $k \in \mathbb{N}$ tal que

$$p(x) + \limsup_n p(x_n) \leq (1+\epsilon) \limsup_n p(x + x_n)$$

si $k \ll x$ y $(x_n)_n$ es una sucesión bloque de la base de Schauder.

Nota

$$SB_k(X,p) := \sup \left\{ \frac{p(x) + \limsup_n p(x_n)}{\limsup_n p(x+x_n)} : \begin{array}{c} k \ll x; \\ (x_n)_n \text{ sucesión bloque de la base} \end{array} \right\}$$

Definimos el coeficiente de separación secuencialmente asintótica de $p(\cdot)$ como

$$SB(X,p) = \lim_k SB_k(X,p).$$

Nota

$$SB_k(X,p) := \sup\left\{ \frac{p(x) + \limsup_n p(x_n)}{\limsup_n p(x+x_n)} : \begin{array}{c} k \ll x; \\ (x_n)_n \text{ sucesión bloque de la base} \end{array} \right\}$$

Definimos el coeficiente de separación secuencialmente asintótica de $p(\cdot)$ como

$$SB(X,p) = \lim_k SB_k(X,p).$$

Lema

Sea $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$. Entonces $p(\cdot)$ es una norma secuencialmente asintóticamente separadora si y solo si $SB(X,p) = 1$.

Ejemplo: Norma Secuencialmente Asintóticamente Separadora que no es Asintóticamente Separadora

Consideremos ℓ_1, y cualquier $r \in (1, +\infty)$. Definimos la norma

$$p_r(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \|x(2n-1)e_{2n-1} + x(2n)e_{2n}\|_r, \qquad x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)e_n$$

donde $\|x(2n-1)e_{2n-1} + x(2n)e_{2n}\|_r = (|x(2n-1)|^r + |x(2n)|^r)^{1/r}$. La norma $p_r(\cdot)$ es equivalente a la norma usual en ℓ_1. De hecho $2^{\frac{1-r}{r}}\|x\|_1 \leq p_r(x) \leq \|x\|_1$ para todo $x \in \ell_1$. Ahora bien, se cumple que

$$B(\ell_1, p_r) = 2^{\frac{r-1}{r}} \text{ y } SB(\ell_1, p_r) = 1.$$

Por tanto $p_r(\cdot)$ es un ejemplo de una norma secuencialmente asintóticamente separadora la cual no es asintóticamente separadora.

Lema

Sea X un espacio de Banach con base de Schauder y sea $p \in \mathcal{P}(X)$ premonótona. Supongamos que $p(\cdot)$ es una norma secuencialmente asintóticamente separadora. Fijemos $(\gamma_k)_k \subset (0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$ y definamos la norma

$$p_L(x) = \sup_k \gamma_k p(Q_k(x)).$$

Entonces $p_L(\cdot)$ es una norma equivalente a $p(\cdot)$ la cual es premonótona y secuencialmente asintóticamente separadora.

Relaciones entre las propiedades de la norma

Asintóticamente Separadora	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	Secuencialmente Asintóticamente Separadora
Propiedad $(*)$	$\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	Secuencialmente Asintóticamente Separadora
Propiedad $(*)$	$\not\Rightarrow$ $\not\Leftarrow$	Asintóticamente Separadora

Sean C un subconjunto de un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ y $T : C \to C$ una aplicación, se dice que $x \in C$ es un punto fijo de la aplicación T si $Tx = x$.

Sean C un subconjunto de un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ y $T : C \to C$ una aplicación, se dice que $x \in C$ es un punto fijo de la aplicación T si $Tx = x$.

Definición

Sea C un subconjunto cerrado de X. Una aplicación $T : C \to C$ es lipschitziana si existe $k \geq 0$ tal que $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$ para cualesquiera $x, y \in C$.
Una aplicación es contractiva si es lipschitziana con $k < 1$.

Sean C un subconjunto de un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ y $T : C \to C$ una aplicación, se dice que $x \in C$ es un punto fijo de la aplicación T si $Tx = x$.

Definición

Sea C un subconjunto cerrado de X. Una aplicación $T : C \to C$ es lipschitziana si existe $k \geq 0$ tal que $\|Tx - Ty\| \leq k\|x - y\|$ para cualesquiera $x, y \in C$.
Una aplicación es contractiva si es lipschitziana con $k < 1$.

Principio de la Aplicación Contractiva (S. Banach, 1922)

Sea C un subconjunto cerrado de X. Si $T : C \to C$ es una aplicación contractiva entonces T tiene un único punto fijo.

Definición

Sea C un subconjunto cerrado de X. Una aplicación $T : C \to C$ es no-expansiva si $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ para cualesquiera $x, y \in C$.

Definición

Sea C un subconjunto cerrado de X. Una aplicación $T : C \to C$ es no-expansiva si $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ para cualesquiera $x, y \in C$.

Definición

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ tiene la propiedad del punto fijo (FPP) si $\forall C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y $\forall T : C \to C$ no-expansiva, $\exists x \in C$ tal que $Tx = x$.

Definición

Sea C un subconjunto cerrado de X. Una aplicación $T : C \to C$ es no-expansiva si $\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\|$ para cualesquiera $x, y \in C$.

Definición

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ tiene la propiedad del punto fijo (FPP) si $\forall C \subseteq X$ convexo, cerrado y acotado y $\forall T : C \to C$ no-expansiva, $\exists x \in C$ tal que $Tx = x$.

Ejemplos

Los espacios $(\ell_1, \|.\|_1)$ y $(c_0, \|.\|_\infty)$ no tienen la FPP.
Los espacios $(\ell_p, \|.\|_p), 1 < p < +\infty$ sí tienen la FPP.

Algunos resultados que nos aseguran que un espacio tenga la FPP

Algunos resultados que nos aseguran que un espacio tenga la FPP

Definición

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ es uniformemente convexo si para todo $\varepsilon \in (0, 2]$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in B_X$ se tiene que

$$\|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Algunos resultados que nos aseguran que un espacio tenga la FPP

Definición

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ es uniformemente convexo si para todo $\varepsilon \in (0, 2]$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in B_X$ se tiene que

$$\|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Teorema (F.E. Browder, D. Godhe, 1965)

Si $(X, \|.\|)$ es un espacio de Banach uniformemente convexo entonces tiene la FPP.

Algunos resultados que nos aseguran que un espacio tenga la FPP

Definición

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ es uniformemente convexo si para todo $\varepsilon \in (0, 2]$ existe $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $x, y \in B_X$ se tiene que

$$\|x - y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x + y}{2} \right\| \leq 1 - \delta.$$

Teorema (F.E. Browder, D. Godhe, 1965)

Si $(X, \|.\|)$ es un espacio de Banach uniformemente convexo entonces tiene la FPP.

Ejemplos

Los espacios de Hilbert, los espacios $(\ell_p, \|.\|_p)$ y los $(\mathrm{L}_p, \|.\|_p)$ con $1 < p < +\infty$ son uniformemente convexos.

Propiedades Geométricas que aseguran la FPP en Espacios de Banach Reflexivos

- Estructura Normal
- Condición de Kadec Klee uniforme
- Condición de Opial uniforme
- Existencia de una Base Monótona e Incondicional
- Etc.

Definición (J. Hagler, 1972)

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ contiene una copia asintóticamente isométrica (c.a.i.) de ℓ_1 si existen una sucesión (x_n) en X y una sucesión (ε_n) en $(0,1)$ con $\varepsilon_n \downarrow 0$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)|t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|, \forall (t_n) \in \ell_1.$$

Definición (J. Hagler, 1972)

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ contiene una copia asintóticamente isométrica (c.a.i.) de ℓ_1 si existen una sucesión (x_n) en X y una sucesión (ε_n) en $(0,1)$ con $\varepsilon_n \downarrow 0$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)|t_n| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n\right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty}|t_n|, \forall (t_n) \in \ell_1.$$

Teorema (P.N. Dowling, C.J. Lennard, 1997)

Si un espacio de Banach X tiene una c.a.i. de ℓ_1 entonces dicho espacio NO tiene la FPP.

Definición (J. Hagler, 1972)

Se dice que un espacio de Banach $(X, \|.\|)$ contiene una copia asintóticamente isométrica (c.a.i.) de ℓ_1 si existen una sucesión (x_n) en X y una sucesión (ε_n) en $(0,1)$ con $\varepsilon_n \downarrow 0$ tales que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(1-\varepsilon_n)|t_n| \leq \left\| \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n \right\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |t_n|, \forall (t_n) \in \ell_1.$$

Teorema (P.N. Dowling, C.J. Lennard, 1997)

Si un espacio de Banach X tiene una c.a.i. de ℓ_1 entonces dicho espacio NO tiene la FPP.

Teorema (H. Fetter, B. Gamboa de Buen, 2009)

Si la norma $p(\cdot)$ cumple la propiedad $(*)$ entonces (X, p) tiene c.a.i. de ℓ_1.

Ejemplo (espacios con c.a.i. de ℓ_1)

Los subespacios no reflexivos de $\mathrm{L}_1[0,1]$ no tienen la FPP por tener c.a.i. de ℓ_1.

Ejemplo (espacios con c.a.i. de ℓ_1)

Los subespacios no reflexivos de $\mathrm{L}_1[0,1]$ no tienen la FPP por tener c.a.i. de ℓ_1.

Ejemplo (espacio sin c.a.i. de ℓ_1)

Sea una sucesión no decreciente (γ_k) en $(0,1)$ tal que $\gamma_k \to 1$. Se define la norma

$$|||x||| = \sup_k \gamma_k \|Q_k(x)\|_1, \forall x \in \ell_1, \text{ donde } Q_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} x_n e_n.$$

$(\ell_1, |||.|||)$ es renormamiento de $(\ell_1, \|.\|_1)$ que no tiene c.a.i de ℓ_1.

Ejemplo (espacios con c.a.i. de ℓ_1)

Los subespacios no reflexivos de $\mathrm{L}_1[0,1]$ no tienen la FPP por tener c.a.i. de ℓ_1.

Ejemplo (espacio sin c.a.i. de ℓ_1)

Sea una sucesión no decreciente (γ_k) en $(0,1)$ tal que $\gamma_k \to 1$. Se define la norma

$$|||x||| = \sup_k \gamma_k \|Q_k(x)\|_1, \forall x \in \ell_1, \text{ donde } Q_k(x) = \sum_{n=k}^{\infty} x_n e_n.$$

$(\ell_1, |||.|||)$ es renormamiento de $(\ell_1, \|.\|_1)$ que no tiene c.a.i de ℓ_1.

Teorema (P.K. Lin, 2008)

El espacio $(\ell_1, |||.|||)$ tiene la FPP (y es no reflexivo).

Teorema

Sean X un espacio de Banach con base de Schauder, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$ premonótona y secuencialmente asintóticamente separadora. Dada una sucesión $(\gamma_k)_k$ en $(0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$, definamos la norma

$$p_L(x) = \sup_k \gamma_k p(Q_k(x)).$$

Si X es un espacio de Banach dual, entonces (X, p_L) tiene la FPP.

Teorema

Sean X un espacio de Banach con base de Schauder, $p(\cdot) \in \mathcal{P}(X)$ premonótona y secuencialmente asintóticamente separadora. Dada una sucesión $(\gamma_k)_k$ en $(0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$, definamos la norma

$$p_L(x) = \sup_k \gamma_k p(Q_k(x)).$$

Si X es un espacio de Banach dual, entonces (X, p_L) tiene la FPP.

Corolario

Sea p_0 es una norma premonótona y secuencialmente asintóticamente separadora en $\mathcal{P}(X)$. Definimos por inducción la sucesión de normas equivalentes:
$p_n(x) = \sup_k \gamma_k p_{n-1}(Q_k x)$, para $n = 1, 2, \ldots$
Entonces (X, p_n) cumple la FPP para todo $n \in \mathbb{N}$ con $n \geq 1$.

Ejemplo de sucesión de normas que dotan a ℓ_1 de la FPP

En el espacio ℓ_1 tomamos como $p_0 = \|.\|_1$, que es premonótona y secuencialmente asintóticamente separadora. Sea una sucesión $(\gamma_k)_k$ en $(0,1)$ con $\lim_k \gamma_k = 1$.

$$\text{En este caso, } p_1 = |||.|||, \text{la norma de P.K. Lin.}$$

$$p_2(x) = \sup_k \gamma_k |||Q_k(x)|||$$

y en general

$$p_n(x) = \sup_k \gamma_k p_{n-1}(Q_k x), \text{ para } n = 1, 2, \ldots$$

.

Por el corolario se cumple que (ℓ_1, p_n) tiene la FPP, $\forall n \geq 1$.

Teorema (E. Llorens-Fuster, M.A. Japón, 2012)

Sea $p(\cdot)$ una norma en ℓ_1 equivalente a la usual cumpliendo la propiedad $(*)$. Entonces la norma

$$\|\cdot\|_p = p(\cdot) + \lambda|||\cdot|||$$

tiene la FPP para todo $\lambda > 0$.

Teorema (E. Llorens-Fuster, M.A. Japón, 2012)

Sea $p(\cdot)$ una norma en ℓ_1 equivalente a la usual cumpliendo la propiedad $(*)$. Entonces la norma

$$\|\cdot\|_p = p(\cdot) + \lambda |||\cdot|||$$

tiene la FPP para todo $\lambda > 0$.

Nota

El teorema no se puede extender para $\lambda = 0$.

Teorema

Sea X un espacio de Banach dual con una base de Schauder. Sea $p \in \mathcal{P}(X)$ una norma secuencialmente asintóticamente separadora. Para cualquier $n \geq 1$, sea $p_n(\cdot)$ una de las normas definidas por recurrencia. Entonces el espacio $(X, p(\cdot) + \lambda p_n(\cdot))$ cumple la FPP para todo $\lambda > 0$.

Teorema

Sea X un espacio de Banach dual con una base de Schauder. Sea $p \in \mathcal{P}(X)$ una norma secuencialmente asintóticamente separadora. Para cualquier $n \geq 1$, sea $p_n(\cdot)$ una de las normas definidas por recurrencia. Entonces el espacio $(X, p(\cdot) + \lambda p_n(\cdot))$ cumple la FPP para todo $\lambda > 0$.

Ejemplo de Rayos Cerrados con la FPP

Si definimos la norma equivalente $|||x||| + \lambda p_n(x)$, donde p_n es cualquiera de las normas que obteníamos por inducción, entonces el espacio $(X, |||.||| + \lambda p_n(.))$ tiene la FPP para todo $\lambda \geq 0$.
En general, cualquier rayo cerrado de normas $p_m(\cdot) + \lambda p_n(\cdot)$ renorma al espacio con la FPP para todo $\lambda \geq 0$.

Bibliografía

- P. N. Dowling, C.J Lennard and B. Turett, *The fixed point property for subsets of some classical Banach spaces*, Nonlinear Anal. **49**, 141-145, 2002.
- K. Goebel and W. A. Kirk, *Topics in Metric Fixed Point Theory*, Cambridge University Press, 1990.
- H. Fetter, B. Gamboa de Buen, *Banach spaces with a basis that are hereditarily asymptotically isometric to ℓ_1 and the fixed point property*. Nonlinear Anal., vol. 71 (2009), 4598-4608.
- C. A. Hernández-Linares, M. A. Japón, E. Llorens-Fuster. *On the structure of the set of equivalent norms on ℓ_1 with the fixed point property*. J. Math. Anal. App. 387 (2012), 645-54.
- P. K. Lin, *There is an equivalent norm on ℓ_1 that has the fixed point property*. Nonlinear Anal., 68 (8) (2008), 2303-2308.

Gracias por vuestra atención