Universidad de Sevilla
Congreso de Jóvenes Investigadores
Real Sociedad Matemática Española

Técnicas dinámicas para el estudio de representaciones de grupos

Simone Virili
e-mail: simone@mat.uab.cat
Universitat Autònoma de Barcelona

16 de setiembre de 2013

Introducción

Sea S un conjunto y $f : S \to S$ una aplicación.

Podemos considerar un sistema dinámico discreto (S, f), cuia ley de evolución es

$$\mathbb{N} \times S \longrightarrow S \qquad (n, s) \mapsto f^n(s)\,.$$

Introducción

Sea S un conjunto y $f : S \to S$ una aplicación.

Podemos considerar un sistema dinámico discreto (S, f), cuia ley de evolución es

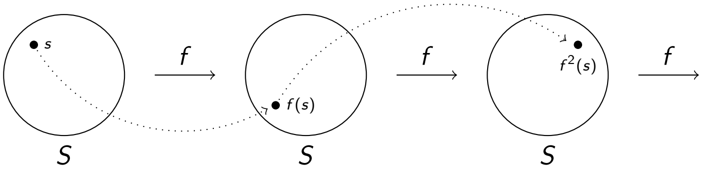
$$\mathbb{N} \times S \longrightarrow S \qquad (n, s) \mapsto f^n(s)\,.$$

Introducción

Sea S un conjunto y $f : S \to S$ una aplicación.

Podemos considerar un sistema dinámico discreto (S, f), cuia ley de evolución es

$$\mathbb{N} \times S \longrightarrow S \qquad (n, s) \mapsto f^n(s)\,.$$



En álgebra existen muchos ejemplos de sistemas dinámicos de este tipo, aunque normalmente no se consideran desde un punto de vista dinámico:

Ejemplo

Sea R un anillo y $R[X]$ el anillo de polinomios con coeficientes en R. Un $R[X]$-módulo por la izquierda ${}_{R[X]}M$ corresponde a un R-módulo por la izquierda ${}_R M$ y un endomorfismo $\phi : M \to M$ tal que $\phi(m) = Xm$.

Gracias a esta observación se puede trabajar con ${}_{R[X]}M$ como si fuera un sistema dinámico (M, ϕ) donde el "tiempo" está parametrizado en $\mathbb{N}$, el "espacio" es un R-modulo y la "ley de evolución" está determinada por un R-endomorfismo.

En álgebra existen muchos ejemplos de sistemas dinámicos de este tipo, aunque normalmente no se consideran desde un punto de vista dinámico:

Ejemplo

Sea R un anillo y $R[X]$ el anillo de polinomios con coeficientes en R. Un $R[X]$-módulo por la izquierda ${}_{R[X]}M$ corresponde a un R-módulo por la izquierda ${}_RM$ y un endomorfismo $\phi : M \to M$ tal que $\phi(m) = Xm$.

Gracias a esta observación se puede trabajar con ${}_{R[X]}M$ como si fuera un sistema dinámico (M, ϕ) donde el "tiempo" está parametrizado en $\mathbb{N}$, el "espacio" es un R-modulo y la "ley de evolución" está determinada por un R-endomorfismo.

En álgebra existen muchos ejemplos de sistemas dinámicos de este tipo, aunque normalmente no se consideran desde un punto de vista dinámico:

Ejemplo

Sea R un anillo y $R[X]$ el anillo de polinomios con coeficientes en R. Un $R[X]$-módulo por la izquierda ${}_{R[X]}M$ corresponde a un R-módulo por la izquierda ${}_RM$ y un endomorfismo $\phi : M \to M$ tal que $\phi(m) = Xm$.

Gracias a esta observación se puede trabajar con ${}_{R[X]}M$ como si fuera un sistema dinámico (M, ϕ) donde el "tiempo" está parametrizado en $\mathbb{N}$, el "espacio" es un R-modulo y la "ley de evolución" está determinada por un R-endomorfismo.

Dados un anillos R y un monoide G, la situación del ejemplo anterior (donde $G = \mathbb{N}$) se puede generalizar a través de la construcción del anillo de monoide $R[G]$:

$R[G]$ es el conjunto $R^{(G)}$ de funciones $G \to R$ con soporte finito, con suma componente a componente:

$$(a+b)(g) := a(g) + b(g)\,,$$

y con producto de convolución:

$$ab(g) = \sum_{\substack{h,k \in G \\ hk = g}} a(h)b(k)\,.$$

Existe un morfismo canónico de monoides

$$G \to R[G] \quad g \mapsto \underline{g}$$

donde $\underline{g}(h) = 0$ si $h \neq g$ y $\underline{g}(g) = 1$.

Dados un anillos R y un monoide G, la situación del ejemplo anterior (donde $G = \mathbb{N}$) se puede generalizar a través de la construcción del anillo de monoide $R[G]$:

$R[G]$ es el conjunto $R^{(G)}$ de funciones $G \to R$ con soporte finito, con suma componente a componente:

$$(a+b)(g) := a(g) + b(g)\,,$$

y con producto de convolución:

$$ab(g) = \sum_{\substack{h,\,k \in G\\ hk = g}} a(h)b(k)\,.$$

Existe un morfismo canónico de monoides

$$G \to R[G] \quad g \mapsto \underline{g}$$

donde $\underline{g}(h) = 0$ si $h \neq g$ y $\underline{g}(g) = 1$.

Dados un anillos R y un monoide G, la situación del ejemplo anterior (donde $G = \mathbb{N}$) se puede generalizar a través de la construcción del anillo de monoide $R[G]$:

$R[G]$ es el conjunto $R^{(G)}$ de funciones $G \to R$ con soporte finito, con suma componente a componente:

$$(a+b)(g) := a(g) + b(g)\,,$$

y con producto de convolución:

$$ab(g) = \sum_{\substack{h,\,k \in G \\ hk = g}} a(h)b(k)\,.$$

Existe un morfismo canónico de monoides

$$G \to R[G] \quad g \mapsto \underline{g}$$

donde $\underline{g}(h) = 0$ si $h \neq g$ y $\underline{g}(g) = 1$.

Dados un anillos R y un monoide G, la situación del ejemplo anterior (donde $G = \mathbb{N}$) se puede generalizar a través de la construcción del anillo de monoide $R[G]$:

$R[G]$ es el conjunto $R^{(G)}$ de funciones $G \to R$ con soporte finito, con suma componente a componente:

$$(a+b)(g) := a(g) + b(g)\,,$$

y con producto de convolución:

$$ab(g) = \sum_{\substack{h,\,k \in G \\ hk = g}} a(h)b(k)\,.$$

Existe un morfismo canónico de monoides

$$G \to R[G] \quad g \mapsto \underline{g}$$

donde $\underline{g}(h) = 0$ si $h \neq g$ y $\underline{g}(g) = 1$.

Dados un anillos R y un monoide G, la situación del ejemplo anterior (donde $G = \mathbb{N}$) se puede generalizar a través de la construcción del <u>anillo de monoide</u> $R[G]$:

$R[G]$ es el conjunto $R^{(G)}$ de funciones $G \to R$ con soporte finito, con suma componente a componente:

$$(a + b)(g) := a(g) + b(g)\,,$$

y con producto de convolución:

$$ab(g) = \sum_{\substack{h,\,k \in G \\ hk = g}} a(h)b(k)\,.$$

Existe un morfismo canónico de monoides

$$G \to R[G] \quad g \mapsto \underline{g}$$

donde $\underline{g}(h) = 0$ si $h \neq g$ y $\underline{g}(g) = 1$.

Ejemplo

Algunos ejemplos clásicos son
$R[\mathbb{N}] \cong R[X]$, $R[\mathbb{N}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]$, $R[\mathbb{Z}] = R[X^{\pm 1}]$, ...

En esta charla trabajaremos con los módulos por la izquierda sobre un anillo de grupo $R[G]$, donde R es un anillo cualquiera y G es un grupo infinito, considerándolos como sistemas dinámicos.

Ejemplo

Algunos ejemplos clásicos son
$R[\mathbb{N}] \cong R[X]$, $R[\mathbb{N}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]$, $R[\mathbb{Z}] = R[X^{\pm 1}]$, $\ldots$

En esta charla trabajaremos con los módulos por la izquierda sobre un anillo de grupo $R[G]$, donde R es un anillo cualquiera y G es un grupo infinito, considerándolos como sistemas dinámicos.

Ejemplo

Algunos ejemplos clásicos son
$R[\mathbb{N}] \cong R[X]$,$R[\mathbb{N}^n] \cong R[X_1, \ldots, X_n]$,$R[\mathbb{Z}] = R[X^{\pm 1}]$,...

En esta charla trabajaremos con los módulos por la izquierda sobre un anillo de grupo $R[G]$, donde R es un anillo cualquiera y G es un grupo infinito, considerándolos como sistemas dinámicos.

Ejemplo

Algunos ejemplos clásicos son
$R[\mathbb{N}] \cong R[X], R[\mathbb{N}^n] \cong R[X_1, \dots, X_n], R[\mathbb{Z}] = R[X^{\pm 1}], \dots$

En esta charla trabajaremos con los módulos por la izquierda sobre un anillo de grupo $R[G]$, donde R es un anillo cualquiera y G es un grupo infinito, considerándolos como sistemas dinámicos.

Dado un $R[G]$-módulo por la izquierda ${}_{R[G]}M$, tenemos una acción

$$\lambda : G \to \mathrm{Aut}_R(M) \quad \lambda(g) = \lambda_g : M \to M\,,$$

con $\lambda_g(m) = \underline{g}m$.

Consideraremos ${}_{R[G]}M$ como un sistema dinámico donde el espacio es el R-módulo ${}_RM$, el tiempo está parametrizado en el grupo G y la ley de evolución es

$$G \times M \to M \quad (g, m) \mapsto \underline{g}m\,.$$

Cuando pensamos a ${}_{R[G]}M$ de esta manera, lo escribiremos como una pareja $({}_RM, \lambda)$.

Dado un $R[G]$-módulo por la izquierda ${}_{R[G]}M$, tenemos una acción

$$\lambda : G \to \mathrm{Aut}_R(M) \quad \lambda(g) = \lambda_g : M \to M\,,$$

con $\lambda_g(m) = \underline{g}m$.
Consideraremos ${}_{R[G]}M$ como un sistema dinámico donde el espacio es el R-módulo ${}_RM$, el tiempo está parametrizado en el grupo G y la ley de evolución es

$$G \times M \to M \quad (g, m) \mapsto \underline{g}m\,.$$

Cuando pensamos a ${}_{R[G]}M$ de esta manera, lo escribiremos como una pareja $({}_RM, \lambda)$.

Dado un $R[G]$-módulo por la izquierda ${}_{R[G]}M$, tenemos una acción

$$\lambda : G \to \mathrm{Aut}_R(M) \quad \lambda(g) = \lambda_g : M \to M \,,$$

con $\lambda_g(m) = \underline{g}m$.
Consideraremos ${}_{R[G]}M$ como un sistema dinámico donde el espacio es el R-módulo ${}_RM$, el tiempo está parametrizado en el grupo G y la ley de evolución es

$$G \times M \to M \quad (g, m) \mapsto \underline{g}m \,.$$

Cuando pensamos a ${}_{R[G]}M$ de esta manera, lo escribiremos como una pareja $({}_RM, \lambda)$.

Índice:

Índice:

Índice:

Grupos amenables

Sea G un grupo finitamente generado.

Por $x \in G$ y $F \subseteq G$:

- $xF = \{xf : f \in F\}$ es el x-traslado de F;
- $xF \Delta F = (xF \setminus F) \cup (F \setminus xF)$ es la diferencia simétrica entre xF y F.

Podemos imaginarnos la cantidad $|xF \Delta F|/|F|$ como una medida de "cuanto x mueve F".

Grupos amenables

Sea G un grupo finitamente generado.

Por $x \in G$ y $F \subseteq G$:

- $xF = \{xf : f \in F\}$ es el x-traslado de F;
- $xF \Delta F = (xF \setminus F) \cup (F \setminus xF)$ es la diferencia simétrica entre xF y F.

Podemos imaginarnos la cantidad $|xF\Delta F|/|F|$ como una medida de "cuanto x mueve F".

Grupos amenables

Sea G un grupo finitamente generado.

Por $x \in G$ y $F \subseteq G$:

- $xF = \{xf : f \in F\}$ es el x-traslado de F;
- $xF \Delta F = (xF \setminus F) \cup (F \setminus xF)$ es la diferencia simétrica entre xF y F.

Podemos imaginarnos la cantidad $|xF \Delta F|/|F|$ como una medida de "cuanto x mueve F".

Grupos amenables

Sea G un grupo finitamente generado.

Por $x \in G$ y $F \subseteq G$:

- $xF = \{xf : f \in F\}$ es el x-traslado de F;
- $xF \Delta F = (xF \setminus F) \cup (F \setminus xF)$ es la diferencia simétrica entre xF y F.

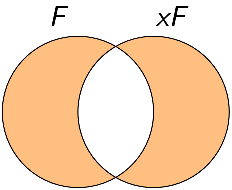
Podemos imaginarnos la cantidad $|xF \Delta F|/|F|$ como una medida de "cuanto x mueve F".

Grupos amenables

Sea G un grupo finitamente generado.

Por $x \in G$ y $F \subseteq G$:

- $xF = \{xf : f \in F\}$ es el x-traslado de F;
- $xF \Delta F = (xF \setminus F) \cup (F \setminus xF)$ es la diferencia simétrica entre xF y F.



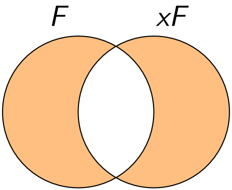
Podemos imaginarnos la cantidad $|xF \Delta F|/|F|$ como una medida de "cuanto x mueve F".

Grupos amenables

Sea G un grupo finitamente generado.

Por $x \in G$ y $F \subseteq G$:

- $xF = \{xf : f \in F\}$ es el x-traslado de F;
- $xF\Delta F = (xF \setminus F) \cup (F \setminus xF)$ es la diferencia simétrica entre xF y F.



Podemos imaginarnos la cantidad $|xF\Delta F|/|F|$ como una medida de "cuanto x mueve F".

Una familia $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos finitos de G es una sucesión de Følner si, por cada $x \in G$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|xF_n \,\Delta\, F_n|}{|F_n|} = 0\,.$$

Un grupo finitamente generado G es amenable si existe una sucesión de Følner dentro de G.

Una familia $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ de subconjuntos finitos de G es una sucesión de Følner si, por cada $x \in G$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|xF_n \,\Delta\, F_n|}{|F_n|} = 0\,.$$

Un grupo finitamente generado G es amenable si existe una sucesión de Følner dentro de G.

Cualquier grupo Abeliano es amenable. Más en general, cualquier grupo de crecimiento sub-exponencial es amenable. Además, también existen grupos amenables de crecimiento exponencial.

El grupo libre (no conmutativo) con dos generadores C_2 es un ejemplo de grupo no amenable.

Cualquier grupo Abeliano es amenable. Más en general, cualquier grupo de crecimiento sub-exponencial es amenable. Además, también existen grupos amenables de crecimiento exponencial.

El grupo libre (no conmutativo) con dos generadores C_2 es un ejemplo de grupo no amenable.

Cualquier grupo Abeliano es amenable. Más en general, cualquier grupo de crecimiento sub-exponencial es amenable. Además, también existen grupos amenables de crecimiento exponencial.

El grupo libre (no conmutativo) con dos generadores C_2 es un ejemplo de grupo no amenable.

Cualquier grupo Abeliano es amenable. Más en general, cualquier grupo de crecimiento sub-exponencial es amenable. Además, también existen grupos amenables de crecimiento exponencial.

El grupo libre (no conmutativo) con dos generadores C_2 es un ejemplo de grupo no amenable.

Funciones de longitud

Sea R un anillo, una función $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función de longitud si, por cada ${}_R M$

- $L(0) = 0$ y $L(M) = L(M')$ si $M' \cong M$;
- $L(M) = L(N) + L(M/N)$, por cada $N \leq M$;
- $L(M) = \sup\{L(F) : F \leq M \text{ f.g.}\}$.

Ejemplo

- si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, $\dim_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- si $R = \mathbb{Z}$, $\log|-| : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- en general, la longitud de composición $\ell : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L es discreta si los valores finitos de L son un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (e.g., $\mathbb{N}$).

Funciones de longitud

Sea R un anillo, una función $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función de longitud si, por cada ${}_R M$

- $L(0) = 0$ y $L(M) = L(M')$ si $M' \cong M$;
- $L(M) = L(N) + L(M/N)$, por cada $N \leq M$;
- $L(M) = \sup\{L(F) : F \leq M \text{ f.g.}\}$.

Ejemplo

- si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, $\dim_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- si $R = \mathbb{Z}$, $\log |-| : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- en general, la longitud de composición $\ell : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L es discreta si los valores finitos de L son un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (e.g., $\mathbb{N}$).

Funciones de longitud

Sea R un anillo, una función $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función de longitud si, por cada ${}_R M$

- $L(0) = 0$ y $L(M) = L(M')$ si $M' \cong M$;
- $L(M) = L(N) + L(M/N)$, por cada $N \leq M$;
- $L(M) = \sup\{L(F) : F \leq M \text{ f.g.}\}$.

Ejemplo

- si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, $\dim_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- si $R = \mathbb{Z}$, $\log |-| : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- en general, la longitud de composición $\ell : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L es discreta si los valores finitos de L son un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (e.g., $\mathbb{N}$).

Funciones de longitud

Sea R un anillo, una función $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función de longitud si, por cada ${}_R M$

- $L(0) = 0$ y $L(M) = L(M')$ si $M' \cong M$;
- $L(M) = L(N) + L(M/N)$, por cada $N \leq M$;
- $L(M) = \sup\{L(F) : F \leq M \text{ f.g.}\}$.

Ejemplo

- si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, $\dim_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- si $R = \mathbb{Z}$, $\log|-| : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- en general, la longitud de composición $\ell : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L es discreta si los valores finitos de L son un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (e.g., $\mathbb{N}$).

Funciones de longitud

Sea R un anillo, una función $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función de longitud si, por cada ${}_R M$

- $L(0) = 0$ y $L(M) = L(M')$ si $M' \cong M$;
- $L(M) = L(N) + L(M/N)$, por cada $N \leq M$;
- $L(M) = \sup\{L(F) : F \leq M \text{ f.g.}\}$.

Ejemplo

- si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, $\dim_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- si $R = \mathbb{Z}$, $\log|-| : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- en general, la longitud de composición $\ell : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L es discreta si los valores finitos de L son un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (e.g., $\mathbb{N}$).

Funciones de longitud

Sea R un anillo, una función $L : R\text{-Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función de longitud si, por cada ${}_R M$

- $L(0) = 0$ y $L(M) = L(M')$ si $M' \cong M$;
- $L(M) = L(N) + L(M/N)$, por cada $N \leq M$;
- $L(M) = \sup\{L(F) : F \leq M \text{ f.g.}\}$.

Ejemplo

- si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, $\dim_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\text{-Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- si $R = \mathbb{Z}$, $\log|-| : \mathbb{Z}\text{-Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- en general, la longitud de composición $\ell : R\text{-Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L es discreta si los valores finitos de L son un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (e.g., $\mathbb{N}$).

Funciones de longitud

Sea R un anillo, una función $L : R\text{-Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función de longitud si, por cada ${}_R M$

- $L(0) = 0$ y $L(M) = L(M')$ si $M' \cong M$;
- $L(M) = L(N) + L(M/N)$, por cada $N \leq M$;
- $L(M) = \sup\{L(F) : F \leq M \text{ f.g.}\}$.

Ejemplo

- si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, $\dim_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\text{-Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- si $R = \mathbb{Z}$, $\log|-| : \mathbb{Z}\text{-Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- en general, la longitud de composición $\ell : R\text{-Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L es discreta si los valores finitos de L son un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (e.g., $\mathbb{N}$).

Funciones de longitud

Sea R un anillo, una función $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ es una función de longitud si, por cada ${}_R M$

- $L(0) = 0$ y $L(M) = L(M')$ si $M' \cong M$;
- $L(M) = L(N) + L(M/N)$, por cada $N \leq M$;
- $L(M) = \sup\{L(F) : F \leq M \text{ f.g.}\}$.

Ejemplo

- si $R = \mathbb{K}$ es un cuerpo, $\dim_{\mathbb{K}} : \mathbb{K}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- si $R = \mathbb{Z}$, $\log|-| : \mathbb{Z}\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$;
- en general, la longitud de composición $\ell : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$.

L es discreta si los valores finitos de L son un subconjunto discreto de $\mathbb{R}_{\geq 0}$ (e.g., $\mathbb{N}$).

Módulos localmente L-finitos

Sea $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una función de longitud. Un módulo ${}_R M$ es localmente L-finito si $L(F) < \infty$ por cada sub-modulo finitamente generado $F \leq M$.

Ejemplo

- todos los $\mathbb{K}$-módulos son loc. $\dim_{\mathbb{K}}$-finitos;
- un grupo Abeliano es loc. $\log|-|$-finito si y solo si es de torsión;
- si R es Noetheriano por la izquierda, los R-módulos loc. ℓ-finitos son los semi-artinianos.

Módulos localmente L-finitos

Sea $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una función de longitud. Un módulo ${}_R M$ es localmente L-finito si $L(F) < \infty$ por cada sub-modulo finitamente generado $F \leq M$.

Ejemplo

- todos los $\mathbb{K}$-módulos son loc. $\dim_{\mathbb{K}}$-finitos;
- un grupo Abeliano es loc. $\log|-|$-finito si y solo si es de torsión;
- si R es Noetheriano por la izquierda, los R-módulos loc. ℓ-finitos son los semi-artinianos.

Módulos localmente L-finitos

Sea $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una función de longitud. Un módulo ${}_R M$ es localmente L-finito si $L(F) < \infty$ por cada sub-modulo finitamente generado $F \leq M$.

Ejemplo

- todos los $\mathbb{K}$-módulos son loc. $\dim_{\mathbb{K}}$-finitos;
- un grupo Abeliano es loc. $\log|-|$-finito si y solo si es de torsión;
- si R es Noetheriano por la izquierda, los R-módulos loc. ℓ-finitos son los semi-artinianos.

Módulos localmente L-finitos

Sea $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una función de longitud. Un módulo ${}_R M$ es <u>localmente L-finito</u> si $L(F) < \infty$ por cada sub-modulo finitamente generado $F \leq M$.

Ejemplo

- todos los $\mathbb{K}$-módulos son loc. $\dim_{\mathbb{K}}$-finitos;
- un grupo Abeliano es loc. $\log|-|$-finito si y solo si es de torsión;
- si R es Noetheriano por la izquierda, los R-módulos loc. ℓ-finitos son los semi-artinianos.

L-entropía algebraica

Sea R un anillo, G un grupo amenable y (M, λ) un $R[G]$-modulo.

Por cada R-submodulo $K \leq M$ finitamente generado y $F \subseteq G$, la F-trayectoria de K es

$$T_F(\lambda, K) = \sum_{g \in F} \lambda_g(K)\,.$$

L-entropía algebraica

Sea R un anillo, G un grupo amenable y (M, λ) un $R[G]$-modulo.

Por cada R-submodulo $K \leq M$ finitamente generado y $F \subseteq G$, la <u>F-trayectoria de K es</u>

$$T_F(\lambda, K) = \sum_{g \in F} \lambda_g(K)\,.$$

Si $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Følner en G, $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una función de longitud discreta y ${}_R M$ es loc. L-finito, la L-entropía de (M, λ) en K es

$$\mathrm{ent}_L(\lambda, K) = \lim_{n\to\infty} \frac{L(T_{F_n}(\lambda, K))}{|F_n|}$$

Lema (Ornstein and Weiss, 1987; V, 2013)

El límite que define la L-entropía existe y no depende de la elección de la sucesión de Følner.

La L-entropía de ${}_{R[G]}M$ es

$$\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(\lambda, K) : {}_R K \leq M \text{ f.g.}\}\,.$$

Si $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Følner en G, $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una función de longitud discreta y ${}_RM$ es loc. L-finito, la L-entropía de (M, λ) en K es

$$\mathrm{ent}_L(\lambda, K) = \lim_{n\to\infty} \frac{L(T_{F_n}(\lambda, K))}{|F_n|}$$

Lema (Ornstein and Weiss, 1987; V, 2013)

El límite que define la L-entropía existe y no depende de la elección de la sucesión de Følner.

La L-entropía de ${}_{R[G]}M$ es

$$\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(\lambda, K) : {}_RK \leq M \text{ f.g.}\}\,.$$

Si $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Følner en G, $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una función de longitud discreta y ${}_R M$ es loc. L-finito, la L-entropía de (M, λ) en K es

$$\mathrm{ent}_L(\lambda, K) = \lim_{n \to \infty} \frac{L(T_{F_n}(\lambda, K))}{|F_n|}$$

Lema (Ornstein and Weiss, 1987; V, 2013)

El límite que define la L-entropía existe y no depende de la elección de la sucesión de Følner.

La L-entropía de ${}_{R[G]}M$ es

$$\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(\lambda, K) : {}_R K \leq M \text{ f.g.}\} .$$

Si $\mathcal{F} = \{F_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una sucesión de Følner en G, $L : R\text{-}\mathrm{Mod} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \cup \{\infty\}$ una función de longitud discreta y ${}_RM$ es loc. L-finito, la <u>L-entropía de (M, λ) en K</u> es

$$\mathrm{ent}_L(\lambda, K) = \lim_{n\to\infty} \frac{L(T_{F_n}(\lambda, K))}{|F_n|}$$

Lema (Ornstein and Weiss, 1987; V, 2013)

El límite que define la L-entropía existe y no depende de la elección de la sucesión de Følner.

La <u>L-entropía de ${}_{R[G]}M$</u> es

$$\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(\lambda, K) : {}_RK \leq M \text{ f.g.}\}\,.$$

Etapas fundamentales en la definición de la L-entropía

1965 Adler, Konheim y McAndrew: entropía topologica de funciones continuas de espacios compactos;

1987 Ornstein y Weiss: generalizan la entropía topologica a acciones de grupos amenables;

1974 Weiss: demuestra que la entropía algebraica de grupos abelianos es dual a la topologica;

2009 Dikranjan, Goldsmith, Salce y Zanardo: estudio sistematico de la entropía algebraica en grupos abelianos;

2009 Salce y Zanardo: definición de L-entropía de un endomorfismo;

2013 Salce, Vámos y V: aditividad de la L-entropía;

...

Etapas fundamentales en la definición de la L-entropía

1965 Adler, Konheim y McAndrew: entropía topologica de funciones continuas de espacios compactos;

1987 Ornstein y Weiss: generalizan la entropía topologica a acciones de grupos amenables;

1974 Weiss: demuestra que la entropía algebraica de grupos abelianos es dual a la topologica;

2009 Dikranjan, Goldsmith, Salce y Zanardo: estudio sistematico de la entropía algebraica en grupos abelianos;

2009 Salce y Zanardo: definición de L-entropía de un endomorfismo;

2013 Salce, Vámos y V: aditividad de la L-entropía;

...

Etapas fundamentales en la definición de la L-entropía

1965 Adler, Konheim y McAndrew: entropía topologica de funciones continuas de espacios compactos;

1987 Ornstein y Weiss: generalizan la entropía topologica a acciones de grupos amenables;

1974 Weiss: demuestra que la entropía algebraica de grupos abelianos es dual a la topologica;

2009 Dikranjan, Goldsmith, Salce y Zanardo: estudio sistematico de la entropía algebraica en grupos abelianos;

2009 Salce y Zanardo: definición de L-entropía de un endomorfismo;

2013 Salce, Vámos y V: aditividad de la L-entropía;

...

Etapas fundamentales en la definición de la L-entropía

1965 Adler, Konheim y McAndrew: entropía topologica de funciones continuas de espacios compactos;

1987 Ornstein y Weiss: generalizan la entropía topologica a acciones de grupos amenables;

1974 Weiss: demuestra que la entropía algebraica de grupos abelianos es dual a la topologica;

2009 Dikranjan, Goldsmith, Salce y Zanardo: estudio sistematico de la entropía algebraica en grupos abelianos;

2009 Salce y Zanardo: definición de L-entropía de un endomorfismo;

2013 Salce, Vámos y V: aditividad de la L-entropía;

...

Etapas fundamentales en la definición de la L-entropía

1965 Adler, Konheim y McAndrew: entropía topologica de funciones continuas de espacios compactos;

1987 Ornstein y Weiss: generalizan la entropía topologica a acciones de grupos amenables;

1974 Weiss: demuestra que la entropía algebraica de grupos abelianos es dual a la topologica;

2009 Dikranjan, Goldsmith, Salce y Zanardo: estudio sistematico de la entropía algebraica en grupos abelianos;

2009 Salce y Zanardo: definición de L-entropía de un endomorfismo;

2013 Salce, Vámos y V: aditividad de la L-entropía;

...

Etapas fundamentales en la definición de la L-entropía

1965 Adler, Konheim y McAndrew: entropía topologica de funciones continuas de espacios compactos;

1987 Ornstein y Weiss: generalizan la entropía topologica a acciones de grupos amenables;

1974 Weiss: demuestra que la entropía algebraica de grupos abelianos es dual a la topologica;

2009 Dikranjan, Goldsmith, Salce y Zanardo: estudio sistematico de la entropía algebraica en grupos abelianos;

2009 Salce y Zanardo: definición de L-entropía de un endomorfismo;

2013 Salce, Vámos y V: aditividad de la L-entropía;

...

Etapas fundamentales en la definición de la L-entropía

1965 Adler, Konheim y McAndrew: entropía topologica de funciones continuas de espacios compactos;

1987 Ornstein y Weiss: generalizan la entropía topologica a acciones de grupos amenables;

1974 Weiss: demuestra que la entropía algebraica de grupos abelianos es dual a la topologica;

2009 Dikranjan, Goldsmith, Salce y Zanardo: estudio sistematico de la entropía algebraica en grupos abelianos;

2009 Salce y Zanardo: definición de L-entropía de un endomorfismo;

2013 Salce, Vámos y V: aditividad de la L-entropía;

...

Propiedades de la entropía

Teorema (V, 2013)

En la notación anterior,

- $\mathrm{ent}_L(0) = 0$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M')$ si $M \cong M'$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M/N) + \mathrm{ent}_L(N)$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(K) : {}_{R[G]}K \leq M$ f.g. como $R[G]$-mód$\}$;
- si $K \in R\text{-Mod}$, $L(K) < \infty$ y $M = R[G] \otimes K$,entonces
$$\mathrm{ent}_L(M) = L(K)\,;$$
- si ademas ${}_{R[G]}N \leq M = R[G] \otimes K$, entonces
$$(\mathrm{ent}_L(N) = 0) \;\Leftrightarrow\; (L({}_RN) = 0)\,.$$

Propiedades de la entropía

Teorema (V, 2013)

En la notación anterior,

- $\mathrm{ent}_L(0) = 0$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M')$ si $M \cong M'$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M/N) + \mathrm{ent}_L(N)$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(K) : {}_{R[G]}K \leq M$ f.g. como $R[G]$-mód$\}$;
- si $K \in R\text{-Mod}$, $L(K) < \infty$ y $M = R[G] \otimes K$,entonces
$$\mathrm{ent}_L(M) = L(K)\,;$$
- si ademas ${}_{R[G]}N \leq M = R[G] \otimes K$, entonces
$$(\mathrm{ent}_L(N) = 0) \;\Leftrightarrow\; (L({}_RN) = 0)\,.$$

Propiedades de la entropía

Teorema (V, 2013)

En la notación anterior,

- $\mathrm{ent}_L(0) = 0$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M')$ si $M \cong M'$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M/N) + \mathrm{ent}_L(N)$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(K) : {}_{R[G]}K \leq M$ f.g. como $R[G]$-mód$\}$;
- si $K \in R\text{-Mod}$, $L(K) < \infty$ y $M = R[G] \otimes K$,entonces
$$\mathrm{ent}_L(M) = L(K)\,;$$
- si ademas ${}_{R[G]}N \leq M = R[G] \otimes K$, entonces
$$(\mathrm{ent}_L(N) = 0) \;\Leftrightarrow\; (L({}_RN) = 0)\,.$$

Propiedades de la entropía

Teorema (V, 2013)

En la notación anterior,

- $\mathrm{ent}_L(0) = 0$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M')$ si $M \cong M'$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M/N) + \mathrm{ent}_L(N)$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(K) : {}_{R[G]}K \leq M$ f.g. como $R[G]$-mód$\}$;
- si $K \in R\text{-}\mathrm{Mod}$, $L(K) < \infty$ y $M = R[G] \otimes K$,entonces
$$\mathrm{ent}_L(M) = L(K)\,;$$
- si ademas ${}_{R[G]}N \leq M = R[G] \otimes K$, entonces
$$(\mathrm{ent}_L(N) = 0) \;\Leftrightarrow\; (L({}_R N) = 0)\,.$$

Propiedades de la entropía

Teorema (V, 2013)

En la notación anterior,

- $\mathrm{ent}_L(0) = 0$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M')$ si $M \cong M'$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M/N) + \mathrm{ent}_L(N)$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(K) : {}_{R[G]}K \leq M$ f.g. como $R[G]$-mód$\}$;
- si $K \in R\text{-}\mathrm{Mod}$, $L(K) < \infty$ y $M = R[G] \otimes K$, entonces
$$\mathrm{ent}_L(M) = L(K)\,;$$
- si ademas ${}_{R[G]}N \leq M = R[G] \otimes K$, entonces
$$(\mathrm{ent}_L(N) = 0) \;\Leftrightarrow\; (L({}_R N) = 0)\,.$$

Propiedades de la entropía

Teorema (V, 2013)

En la notación anterior,

- $\mathrm{ent}_L(0) = 0$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M')$ si $M \cong M'$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M/N) + \mathrm{ent}_L(N)$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(K) : {}_{R[G]}K \leq M$ f.g. como $R[G]$-mód$\}$;
- si $K \in R\text{-}\mathrm{Mod}$, $L(K) < \infty$ y $M = R[G] \otimes K$,entonces

$$\mathrm{ent}_L(M) = L(K)\,;$$

- si ademas ${}_{R[G]}N \leq M = R[G] \otimes K$, entonces

$$(\mathrm{ent}_L(N) = 0) \;\Leftrightarrow\; (L({}_R N) = 0)\,.$$

Propiedades de la entropía

Teorema (V, 2013)

En la notación anterior,

- $\mathrm{ent}_L(0) = 0$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M')$ si $M \cong M'$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \mathrm{ent}_L(M/N) + \mathrm{ent}_L(N)$;
- $\mathrm{ent}_L(M) = \sup\{\mathrm{ent}_L(K) : {}_{R[G]}K \leq M$ f.g. como $R[G]$-mód$\}$;
- si $K \in R\text{-}\mathrm{Mod}$, $L(K) < \infty$ y $M = R[G] \otimes K$,entonces
$$\mathrm{ent}_L(M) = L(K)\,;$$
- si ademas ${}_{R[G]}N \leq M = R[G] \otimes K$, entonces
$$(\mathrm{ent}_L(N) = 0) \;\Leftrightarrow\; (L({}_RN) = 0)\,.$$

Aplicación 1: módulos Hopfianos

Un R-módulo M es Hopfiano si, por cada $\phi \in \mathrm{End}_R(M)$, ϕ exhaustivo implica ϕ inyectivo.

Conjetura (Kaplansky, 1972)

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y G es un grupo, entonces el módulo libre $\mathbb{K}[G]^n$ es Hopfiano por cada $n \in \mathbb{N}_+$.

Un R-módulo es ereditariamente Hopfiano si todos sus sub-módulos son Hopfianos.

Teorema (V, 2013)

Si R es un anillo Noetheriano por la izquierda y G es un grupo amenable. Por cada $K \in R\text{-}\mathrm{Mod}$ finitamente generado, $R[G] \otimes K$ es ereditariamente Hopfiano.

Aplicación 1: módulos Hopfianos

Un R-módulo M es Hopfiano si, por cada $\phi \in \mathrm{End}_R(M)$, ϕ exhaustivo implica ϕ inyectivo.

Conjetura (Kaplansky, 1972)

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y G es un grupo, entonces el módulo libre $\mathbb{K}[G]^n$ es Hopfiano por cada $n \in \mathbb{N}_+$.

Un R-módulo es ereditariamente Hopfiano si todos sus sub-módulos son Hopfianos.

Teorema (V, 2013)

Si R es un anillo Noetheriano por la izquierda y G es un grupo amenable. Por cada $K \in R\text{-}\mathrm{Mod}$ finitamente generado, $R[G] \otimes K$ es ereditariamente Hopfiano.

Aplicación 1: módulos Hopfianos

Un R-módulo M es Hopfiano si, por cada $\phi \in \mathrm{End}_R(M)$, ϕ exhaustivo implica ϕ inyectivo.

Conjetura (Kaplansky, 1972)

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y G es un grupo, entonces el módulo libre $\mathbb{K}[G]^n$ es Hopfiano por cada $n \in \mathbb{N}_+$.

Un R-módulo es ereditariamente Hopfiano si todos sus sub-módulos son Hopfianos.

Teorema (V, 2013)

Si R es un anillo Noetheriano por la izquierda y G es un grupo amenable. Por cada $K \in R\text{-}\mathrm{Mod}$ finitamente generado, $R[G] \otimes K$ es ereditariamente Hopfiano.

Aplicación 1: módulos Hopfianos

Un R-módulo M es Hopfiano si, por cada $\phi \in \mathrm{End}_R(M)$, ϕ exhaustivo implica ϕ inyectivo.

Conjetura (Kaplansky, 1972)

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y G es un grupo, entonces el módulo libre $\mathbb{K}[G]^n$ es Hopfiano por cada $n \in \mathbb{N}_+$.

Un R-módulo es ereditariamente Hopfiano si todos sus sub-módulos son Hopfianos.

Teorema (V, 2013)

Si R es un anillo Noetheriano por la izquierda y G es un grupo amenable. Por cada $K \in R\text{-}\mathrm{Mod}$ finitamente generado, $R[G] \otimes K$ es ereditariamente Hopfiano.

Demostración de un caso particular. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $V = \mathbb{K}^n$, $M = \mathbb{K}[G] \otimes V$, ${}_{\mathbb{K}[G]}N \leq M$ y $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}[G]}(N)$. Entonces,

$$n = \dim_{\mathbb{K}}(V) \geq \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N) = \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N)) + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi))\,.$$

Si ϕ es exhaustiva, $\phi(N) \cong N$:

$$\cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N)} = \cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N))} + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi))\,,$$

entonces $\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = 0$ y, por las propiedades de la entropía, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, o sea, ϕ es inyectiva.

Demostración de un caso particular. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $V = \mathbb{K}^n$, $M = \mathbb{K}[G] \otimes V$, ${}_{\mathbb{K}[G]}N \leq M$ y $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}[G]}(N)$. Entonces,

$$n = \dim_{\mathbb{K}}(V) \geq \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N) = \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N)) + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi)) .$$

Si ϕ es exhaustiva, $\phi(N) \cong N$:

$$\cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N)} = \cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N))} + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi)) ,$$

entonces $\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = 0$ y, por las propiedades de la entropía, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, o sea, ϕ es inyectiva.

Demostración de un caso particular. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $V = \mathbb{K}^n$, $M = \mathbb{K}[G] \otimes V$, ${}_{\mathbb{K}[G]}N \leq M$ y $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}[G]}(N)$. Entonces,

$$n = \dim_{\mathbb{K}}(V) \geq \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N) = \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N)) + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi))\,.$$

Si ϕ es exhaustiva, $\phi(N) \cong N$:

$$\cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N)} = \cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N))} + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi))\,,$$

entonces $\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = 0$ y, por las propiedades de la entropía, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, o sea, ϕ es inyectiva.

Demostración de un caso particular. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $V = \mathbb{K}^n$, $M = \mathbb{K}[G] \otimes V$, ${}_{\mathbb{K}[G]}N \leq M$ y $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}[G]}(N)$. Entonces,

$$n = \dim_{\mathbb{K}}(V) \geq \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N) = \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N)) + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi))\,.$$

Si ϕ es exhaustiva, $\phi(N) \cong N$:

$$\cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N)} = \cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N))} + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi))\,,$$

entonces $\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = 0$ y, por las propiedades de la entropía, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, o sea, ϕ es inyectiva.

<u>Demostración de un caso particular</u>. Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo, $V = \mathbb{K}^n$, $M = \mathbb{K}[G] \otimes V$, ${}_{\mathbb{K}[G]}N \leq M$ y $\phi \in \mathrm{End}_{\mathbb{K}[G]}(N)$. Entonces,

$$n = \dim_{\mathbb{K}}(V) \geq \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N) = \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N)) + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi))\,.$$

Si ϕ es exhaustiva, $\phi(N) \cong N$:

$$\cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(N)} = \cancel{\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\phi(N))} + \mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi))\,,$$

entonces $\mathrm{ent}_{\dim_{\mathbb{K}}}(\mathrm{Ker}(\phi)) = 0$ y, por las propiedades de la entropía, $\mathrm{Ker}(\phi) = 0$, o sea, ϕ es inyectiva.

Un contraejemplo

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y C_2 el grupo libre de dos generadores.

Recordamos que:

- $\mathbb{K}[C_2]$ no es Noetheriano por la izquierda;
- cada ideal izquierdo de $\mathbb{K}[C_2]$ es libre como $\mathbb{K}[C_2]$-módulo.

Obtenemos que $\mathbb{K}[C_2]$ tiene un ideal por la izquierda ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I$ tal que ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I \cong \mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$.

Es fácil ver que $\mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$ no es Hopfiano y entonces $\mathbb{K}[C_2]$ no es ereditariamente Hopfiano.

Un contraejemplo

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y C_2 el grupo libre de dos generadores. Recordamos que:

- $\mathbb{K}[C_2]$ no es Noetheriano por la izquierda;
- cada ideal izquierdo de $\mathbb{K}[C_2]$ es libre como $\mathbb{K}[C_2]$-módulo.

Obtenemos que $\mathbb{K}[C_2]$ tiene un ideal por la izquierda ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I$ tal que ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I \cong \mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$.

Es fácil ver que $\mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$ no es Hopfiano y entonces $\mathbb{K}[C_2]$ no es ereditariamente Hopfiano.

Un contraejemplo

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y C_2 el grupo libre de dos generadores.
Recordamos que:

- $\mathbb{K}[C_2]$ no es Noetheriano por la izquierda;
- cada ideal izquierdo de $\mathbb{K}[C_2]$ es libre como $\mathbb{K}[C_2]$-módulo.

Obtenemos que $\mathbb{K}[C_2]$ tiene un ideal por la izquierda ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I$ tal que ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I \cong \mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$.

Es fácil ver que $\mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$ no es Hopfiano y entonces $\mathbb{K}[C_2]$ no es ereditariamente Hopfiano.

Un contraejemplo

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y C_2 el grupo libre de dos generadores. Recordamos que:

- $\mathbb{K}[C_2]$ no es Noetheriano por la izquierda;
- cada ideal izquierdo de $\mathbb{K}[C_2]$ es libre como $\mathbb{K}[C_2]$-módulo.

Obtenemos que $\mathbb{K}[C_2]$ tiene un ideal por la izquierda ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I$ tal que ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I \cong \mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$.

Es fácil ver que $\mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$ no es Hopfiano y entonces $\mathbb{K}[C_2]$ no es ereditariamente Hopfiano.

Un contraejemplo

Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo y C_2 el grupo libre de dos generadores. Recordamos que:

- $\mathbb{K}[C_2]$ no es Noetheriano por la izquierda;
- cada ideal izquierdo de $\mathbb{K}[C_2]$ es libre como $\mathbb{K}[C_2]$-módulo.

Obtenemos que $\mathbb{K}[C_2]$ tiene un ideal por la izquierda ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I$ tal que ${}_{\mathbb{K}[C_2]}I \cong \mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$.

Es fácil ver que $\mathbb{K}[C_2]^{(\mathbb{N})}$ no es Hopfiano y entonces $\mathbb{K}[C_2]$ no es ereditariamente Hopfiano.

Aplicación 2: divisores de cero

Conjetura (Kaplansky, ∼1940)

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y G es un grupo sin torsión, $\mathbb{K}[G]$ no tiene divisores de cero.

Teorema (V, 2013)

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y G es un grupo amenable, $\mathbb{K}[G]$ tiene divisores de cero si y solo si los valores finitos de la $\dim_{\mathbb{K}}$-entropía son todos números naturales.

Aplicación 2: divisores de cero

Conjetura (Kaplansky, ∼1940)

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y G es un grupo sin torsión, $\mathbb{K}[G]$ no tiene divisores de cero.

Teorema (V, 2013)

Si $\mathbb{K}$ es un cuerpo y G es un grupo amenable, $\mathbb{K}[G]$ tiene divisores de cero si y solo si los valores finitos de la $\dim_{\mathbb{K}}$-entropía son todos números naturales.