Raíces de Wills μ-polinomios generalizados

Jesús Yepes Nicolás

J. Yepes Nicolás (jesus.yepes@um.es)
Universidad de Murcia

María A. Hernández Cifre (mhcifre@um.es)
Universidad de Murcia

Abstract.

En 1973, J. M. Wills introdujo y estudió, para un cuerpo convexo $K \subset \mathbb{R}^n$ (conjunto convexo y compacto), el funcional $W(K) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{W}_i(K; B_n) \frac{1}{\kappa_i}$, donde $\mathrm{W}_i(K; E)$ es la *i-ésima quermassintegral relativa* de K con respecto a E, i.e., el i-ésimo coeficiente (salvo constantes) del polinomio de Steiner $\mathrm{vol}(K + \lambda E)$. Su interés se centraba en la posible relación de este funcional con el 'lattice-point enumerator' de K, $G(K) = \#(K \cap \mathbb{Z}^n)$, y conjeturó que $G(K) \le W(K)$. (Des)afortunadamente, esto resultó no ser siempre cierto, lo que condujo a un creciente interés en este problema. Actualmente estamos trabajando en el problema de determinar quermassintegrales con pesos que proporcionen un funcional tipo Wills como cota superior de $G(K)$.

En relación a este problema, consideramos los llamados μ-polinomios

$$f_{K;E}^{\mu}(z) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \mathrm{W}_i(K; E) m_i(\mu) z^i,$$

donde $m_i(\mu)$ son los momentos de una medida (finita) μ en $\mathbb{R}_{\ge 0}$.

Intentando entender la geometría que esconden las raíces de la anterior familia de polinomios, estudiamos su estructura, y demostramos que, para cualquier medida μ, el conjunto de raíces en el semiplano superior es un cono convexo cerrado, conteniendo a $\mathbb{R}_{\le 0}$, y estrictamente creciente en la dimensión. Además, describimos los polinomios tipo-μ que determinan los conos de raíces 'más pequeño' y 'más grande'.