Homotopía racional en acciones de grupos

Sergio Huerta Lara

Sergio Huerta Lara (`shuerta@agt.cie.uma.es`)
Universidad de Deusto

Resumen. Dada una acción del grupo G en el espacio X, no exageramos demasiado si decimos que el tipo de homotopía de la inclusión

$$k \colon X^G \hookrightarrow X^{hG}$$

contiene toda la información necesaria para entender el comportamiento homotópico de la acción considerada. Aquí, X^G designa el conjunto de puntos fijos y $X^{hG} = \mathrm{map}_G(EG, X)$ el espacio de puntos fijos homotópicos. En realidad poco se sabe de cuánto dista el espacio de puntos fijos de ser equivalente a su análogo homotópico. La Conjetura de Sullivan, probada por Miller, se traduce por ejemplo en afirmar que, cuando G es un p-grupo finito y X es un CW-complejo finito, la aplicación anterior induce un isomorfismo en cohomología módulo p. Nosotros nos interesamos en este mismo problema en una situación radicalmente distinta: G grupo de Lie compacto actuando en un espacio racional X. Demostramos en primer lugar que si X es elíptico, entonces también lo es el espacio de puntos fijos homotópicos. Asimismo probamos que, cuando G es un toro, la inclusión anterior induce un morfismo inyectivo en homotopía, lo que en particular implica que la categoría de Lusternik-Schnirelmann de X^G está acotada por la de X^{hG}. Más aún, cuando G es la circunferencia y en condiciones no muy restricitvas k nunca es una equivalencia de homotopía.