# Regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewood

J. M. Aldaz and J. Pérez Lázaro*

**J. Pérez Lázaro** (`javier.perezl@unirioja`)
Universidad de La Rioja

**Abstract**. El estudio de las propiedades de regularidad de la función maximal de Hardy-Littlewood fue iniciado por Juha Kinnunen en [Ki], donde se muestra que el operador maximal centrado está acotado en el espacio de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^d)$ para $1 < p \leq \infty$. Desde entonces, varios autores han hecho diferentes contribuciones sobre la regularidad de la función maximal: Buckley, Hajłasz, Korry, Lindqvist, Luiro, Onninen, Saksman...

Como de costumbre, el caso $p = 1$ es esencialmente distinto de el caso $p > 1$, no sólo porque $L^1(\mathbb{R}^d)$ no es reflexivo (así, los argumentos de compacidad débil usados cuando $1 < p < \infty$ no son válidos para $p = 1$), pero más concretamente con respecto a este problema porque $Mf \notin L^1(\mathbb{R}^d)$ si $f$ es no nula, mientras que el operador maximal es acotado en $L^p$ para $p > 1$. Sin embargo, en dimensión $d = 1$, Tanaka probó [T] que si $f \in W^{1,1}(\mathbb{R})$, entonces la función maximal no centrada $Mf$ es derivable a.e. y $\|DMf\|_1 \leq 2\|Df\|_1$.

En esta charla se presentará (fundamentalmente) el caso $d = 1$ y $p = 1$. Lo que no había sido descubierto hasta [AP], es que el operador maximal en realidad puede mejorar la regularidad de la función, mas allá de simplemente preservarla, y sin incrementar la variación.

Probamos el siguiente resultado. Sea $I$ un intervalo, sea $f : I \to \mathbb{R}$ de variación acotada, y sea $Df$ su derivada distribucional (es una medida de Radon). Denotemos por $Mf$ la función maximal no centrada de $f$. Probamos que $Mf$ es absolutamente continuo y su derivada distribucional $DMf$ es una función que satisface la desigualdad óptima $\|DMf\|_1 \leq |Df|(I)$.

Estos resultados nos permiten obtener, bajo condiciones de menor suavidad, versiones de desigualdades clásicas que involucran una función y sus derivadas.

Posteriormente, entre otros trabajos, destacamos un resultado de Kurka [Ku] realtivo a la función maximal de Hardy-Littlewood centrada.

# References

[AP] Aldaz, J.M., Pérez Lázaro, J. Functions of bounded variation, the derivative of the one dimensional maximal function, and applications to inequalities. *Trans. Amer. Math. Soc. (5)* **359** (2007), 2443–2461.

[Ki] Kinnunen, J. The Hardy-Littlewood maximal function of a Sobolev function. *Israel J. Math.* **100** (1997), 117–124.

[Ku] Kurka, O. On the variation of the Hardy-Littlewood maximal function. *ArXiv Math.*CA 1210.0496.

[T] Tanaka, H. A remark on the derivative of the one-dimensional Hardy-Littlewood maximal function. *Bull.Austral. Math. Soc.* **65**, no. 2, (2002), 253–258.