

Tema 2. Continuidad y límites de funciones de una variable

Departamento de Análisis Matemático
Universidad de Granada

Continuidad de funciones de una variable

Continuidad

Definición

Sean $A \subset \mathbb{R}$, $a \in A$. La función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ es **continua en a** si:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \begin{cases} |x - a| < \delta \\ x \in A \end{cases} \text{ entonces } |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

Decimos que f es **continua en A** si f es continua en todos los puntos de A

Ejemplos

Las funciones elementales son continuas en su dominio

Relación de la continuidad con las operaciones

Proposición

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ continuas en $a \in A$. Entonces:

- 1 $f + g$ es continua en a
- 2 fg es continua en a
- 3 Si $g(a) \neq 0$ entonces $\frac{f}{g}$ es continua en a
- 4 La composición de funciones continuas es continua

Propiedades de las funciones continuas

Teorema (de los ceros de Bolzano)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua verificando que $f(a)f(b) < 0$. Entonces existe $c \in]a, b[$ tal que $f(c) = 0$.

Observación

El teorema nos dice que al menos hay un cero de la función, puede haber muchos más.

Ejemplo

Probar que la ecuación $\log(x) + 2x = 0$ tiene solución.

Propiedades de las funciones continuas

Teorema (de los valores intermedios)

Sea I un intervalo y $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces $f(I)$ es un intervalo.

Teorema (de Weierstrass)

Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Entonces $f([a, b])$ es un intervalo cerrado y acotado. En particular, f alcanza su máximo y mínimo absolutos.

Límite funcional

Límite de una función en un punto

Ejemplo

Consideramos la función $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = e^{-1/x^2}$. Sabemos que f es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ¿Qué valor debemos darle en cero para que sea continua?

Sean $A \subset \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}$

- a es un **punto de acumulación de A** si $\forall r > 0$ se tiene que
 $(]a - r, a + r[\cap A) \setminus \{a\} \neq \emptyset$
 Notaremos por A' al conjunto de todos los puntos de acumulación de A
- a es un **punto aislado del conjunto A** si $\exists r > 0$ tal que
 $]a - r, a + r[\cap A = \{a\}$

Límite de una función en un punto

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$. Decimos que f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en $a \in A'$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \begin{cases} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in A \end{cases} \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

En tal caso escribiremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$

Proposición (relación entre límite y continuidad)

Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A$. Se verifican:

- Si a es un punto aislado de A entonces f es continua en a
- Si a es un punto de acumulación de A entonces f es continua en $a \iff \lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$

Relación con las operaciones

Proposición

Sean $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A'$ de modo que existen $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ y $\lim_{x \rightarrow a} g(x)$.
Se verifican:

- 1 $\lim_{x \rightarrow a} (f + g)(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) + \lim_{x \rightarrow a} g(x)$
- 2 $\lim_{x \rightarrow a} (fg)(x) = (\lim_{x \rightarrow a} f(x)) (\lim_{x \rightarrow a} g(x))$
- 3 Si $\lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$ entonces $\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f}{g} \right) (x) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}$
- 4 Si h es una función continua en $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ entonces
 $\lim_{x \rightarrow a} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \rightarrow a} f(x))$
- 5 Si $p : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es una función acotada y $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ entonces
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)p(x) = 0$

Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

Límites laterales

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ y $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ por la derecha de $a \in A'$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \begin{cases} 0 < x - a < \delta \\ x \in A \end{cases} \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

En tal caso escribiremos $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L$.

La función f tiene límite $L \in \mathbb{R}$ por la izquierda de $a \in A'$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \begin{cases} -\delta < x - a < 0 \\ x \in A \end{cases} \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

En tal caso escribiremos $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$.

Observación

Si tiene sentido estudiar los dos límites laterales entonces

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L \iff \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = L = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$$

Límites infinitos

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$, la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite $+\infty$ en $a \in A'$ si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \begin{cases} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in A \end{cases} \text{ entonces } f(x) > M$$

En tal caso escribiremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty$.

Análogamente, la función f tiene límite $-\infty$ en $a \in A'$ si

$$\forall M > 0 \exists \delta > 0 \text{ tal que si } \begin{cases} 0 < |x - a| < \delta \\ x \in A \end{cases} \text{ entonces } f(x) < -M$$

En tal caso escribiremos $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$.

Ejemplo

$f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{x^2}$ verifica $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$

Límites en infinito

Definición

Sea $A \subset \mathbb{R}$ no acotado superiormente, $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ tiene límite $L \in \mathbb{R}$ en $+\infty$ si

$$\forall \varepsilon > 0 \exists K > 0 \text{ tal que si } \begin{cases} x > K \\ x \in A \end{cases} \text{ entonces } |f(x) - L| < \varepsilon$$

En tal caso escribiremos $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$.

Ejercicio

Definir límite en $-\infty$ y límites que valgan $\pm\infty$ en $\pm\infty$

Ejemplo

$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ verifica $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Indeterminaciones

- $\left(\frac{0}{0}\right)$ y $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ Se suelen abordar utilizando L'Hôpital o la escala de infinitos

Ejemplos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + x^2 e^x}{2^x + x^2}$$

Escala de infinitos

Sean $a > 0$, $b > 0$ y $c > 1$, si $x \rightarrow +\infty$ entonces

$$(\log(x))^a \ll x^b \ll c^x \ll x^x$$

Ejercicio

Demostrar la escala de infinitos

Indeterminaciones

- (0∞) Se pueden transformar en $\left(\frac{0}{0}\right)$ o $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} x \log(x)$$

- $(\infty - \infty)$ Se suelen abordar operando

Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

- (0^0) y (∞^0) Se pueden estudiar teniendo en cuenta que $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \log(f(x))}$ y entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \rightarrow a} g(x) \log(f(x))}$

Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} x^x$$

Indeterminaciones

- (1^∞) Se pueden resolver utilizando el siguiente resultado

Proposición

Sean $f, g : A \rightarrow \mathbb{R}$ y $a \in A'$ ($a \in \mathbb{R}$ ó $a = \pm\infty$). Supongamos que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1$. Entonces:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)} = \begin{cases} e^L \\ 0 \\ +\infty \end{cases} \iff \lim_{x \rightarrow a} g(x)(f(x) - 1) = \begin{cases} L \\ -\infty \\ +\infty \end{cases}$$

Ejemplo

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \sin(x))^{\frac{1}{\tan(x)}}$$

Infinitesimos equivalentes

Dos funciones $f, g : A \longrightarrow \mathbb{R}$ son **infinitésimos equivalentes en $a \in A'$** si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = \lim_{x \rightarrow a} g(x) \text{ y } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Algunos infinitésimos equivalentes

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{\frac{x^2}{2}} = 1$$

Ejemplos

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{sen}(x) \tan(x)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan(x^2)}{x \tan(x)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x) - \text{sen}(x)}{x^3}$$