
Integración de funciones de varias variables

Ejercicio 1. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_{[0,2] \times [0,1]} (x^2 + 2y) d(x, y)$

b) $\int_{[3,4] \times [1,2]} \frac{d(x,y)}{(x+y)^2}$

c) $\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{x^2}{1+y^2} d(x, y)$

d) $\int_{[0,1] \times [0,1]} \frac{d(x,y)}{(1+x+y)^2}$

e) $\int_{[0,\pi/2] \times [0,\pi/2]} \sin(x+y) d(x, y)$

f) $\int_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} \frac{d(x,y,z)}{(1+x+y+z)^3}$

g) $\int_{[0,1] \times [0,1] \times [0,1]} \frac{d(x,y,z)}{\sqrt{1+x+y+z}}$

Ejercicio 2. Calcula las siguientes integrales:

a) $\int_0^2 \left(\int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2} \right) dx$

b) $\int_1^2 \left(\int_{1/x}^x \frac{x^2}{y^2} dy \right) dx$

c) $\int_{-3}^3 \left(\int_{y^2-4}^5 (x+2y) dx \right) dy$

d) $\int_0^{2\pi} \left(\int_{\sin(\rho)}^1 r dr \right) d\rho$

e) $\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\int_0^{3 \cos(\rho)} r^2 \sin^2(\rho) dr \right) d\rho$

f) $\int_0^4 \left(\int_0^{10-y} x dx \right) dy$

g) $\int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left(\int_0^{1-x-y} xyz dz \right) dy \right) dx$

h) $\int_0^2 \left(\int_0^{2\sqrt{x}} \left(\int_0^{\sqrt{\frac{4x-y^2}{2}}} x dz \right) dy \right) dx$

Ejercicio 3. Calcula las siguientes integrales.

a) $\int_0^2 \left(\int_x^{\pi x} \frac{1}{y^2+1} dy \right) dx$

b) $\int_0^{\sqrt{2}} \left(\int_{-\sqrt{4-2y^2}}^{\sqrt{4-2y^2}} y dx \right) dy$

c) $\int_0^1 \left(\int_{2y}^2 \cos(x^2) dx \right) dy$

d) $\int_0^8 \left(\int_{\sqrt[3]{x}}^2 \frac{1}{y^4+1} dy \right) dx$

e) $\int_0^2 \left(\int_1^{e^x} dy \right) dx$

Ejercicio 4. Calcula las integrales

a) $\int_0^2 \left(\int_x^2 y^2 \sin(xy) dy \right) dx,$

b) $\int_0^\pi \left(\int_x^\pi \frac{\sin(y)}{y} dy \right) dx,$

c) $\int_0^1 \left(\int_y^1 x^2 e^{xy} dx \right) dy,$

d) $\int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}} (x^2 + y^2) dx \right) dy.$

Ejercicio 5. Sea $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, calcula su integral en los siguientes casos:

a) $f(x, y) = 1$ siendo A la región limitada por $y^2 = x^3$, $y = x$.

b) $f(x, y) = x^2$ siendo A la región limitada por $xy = 16$, $y = x$, $y = 0$, $x = 8$.

c) $f(x, y) = e^{\frac{x}{y}}$ siendo A la región limitada por $y^2 = x$, $x = 0$, $y = 1$.

d) $f(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ siendo A la región limitada por $y = \frac{x^2}{2}$, $y = x$.

Ejercicio 6. Calcula los siguientes volúmenes:

- Volumen del sólido limitado superiormente por $z = x + y$ e inferiormente por el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$.
- Volumen del sólido comprendido por el paraboloide de ecuación $z = x^2 + y^2$ e inferiormente por el disco unidad.

Ejercicio 7. Utiliza el cambio a coordenadas polares para calcular las integrales de las siguientes funciones en los recintos que se indican:

- $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $A = \overline{B}((0, 0), 1)$
- $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$, $A = [0, 1] \times [0, 1]$
- $f(x, y) = y$, $A = \{(x, y) \in B((\frac{1}{2}, 0), \frac{1}{2}) : y \geq 0\}$
- $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = \overline{B}((1, 0), 1)$
- $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 \leq x^2 + y^2 \leq 9\}$

Ejercicio 8. Calcula el volumen del conjunto A en cada uno de los siguientes casos:

- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq 4 - y^2, 0 \leq x \leq 6\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \sqrt{x} \leq y \leq 2\sqrt{x}, 0 \leq z \leq 9 - x\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1, 0 \leq z \leq \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, x + y \leq 1, x, y \geq 0\}$
- $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq \sqrt{x^2 + y^2}, x^2 + y^2 \leq 2y\}$

Ejercicio 9. Calcula la integral de $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ en cada uno de los siguientes casos:

- $f(x, y) = x\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1, x, y \geq 0\}$
- $f(x, y) = e^{x/y}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y^3 \leq x \leq y^2\}$
- $f(x, y) = x^2 + y^2$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 2y, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0\}$
- $f(x, y) = (x^2 + y^2)^{-\frac{3}{2}}$, $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y, x + y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 1\}$
- $f(x, y, z) = z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \leq 1, z \geq 0\}$,
- $f(x, y, z) = z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 \leq z^2, 0 \leq z \leq 1\}$,
- $f(x, y, z) = (x + y + z)^2$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 2z\}$,
- $f(x, y, z) = x^2$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x \geq 0, x^2 + y^2 + (z - 1)^2 \leq 1, 4z^3 \geq 3(x^2 + y^2)\}$
- $f(x, y, z) = zy\sqrt{x^2 + y^2}$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z \leq x^2 + y^2, 0 \leq y \leq \sqrt{2x - x^2}\}$,
- $f(x, y, z) = z$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 \leq 2, x^2 + y^2 \leq z\}$,
- $f(x, y, z) = 2z(x^2 + y^2)$, $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq z, z^2 \leq x^2 + y^2 \leq 1\}$.