
Integración de funciones de una variable

1. Teorema fundamental del cálculo

Ejercicio 1. Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $F(x) = \int_0^{x^2} \sin(\log(1+t)) dt$

c) $F(x) = \int_1^x \frac{1}{1+t^2+\sin(t^2)} dt$

b) $F(x) = \int_{x^2}^{x^3} \cos^3(t) dt$

d) $F(x) = \int_1^2 \frac{x}{1+t^2+\sin(t^2)} dt$

Ejercicio 2. Estudiar el crecimiento y el decrecimiento de la función $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x) = \int_0^{x^3-x^2} e^{-t^2} dt.$$

Como consecuencia, estudiar sus extremos relativos.

Ejercicio 3. Calcula el máximo absoluto de la función $f : [1, +\infty] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$f(x) = \int_0^{x-1} (e^{-t^2} - e^{-2t}) dt.$$

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \frac{1}{2}(\sqrt{\pi} - 1)$ calcular su mínimo absoluto.

Ejercicio 4. Calcula los siguientes límites:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^{(x+1)e^x} \log(t) \arctan(t) dt}{x^2 e^x} \quad \text{y} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\int_x^{2x} \sin(\sin(t)) dt}{x^2}.$$

2. Cálculo de primitivas

Primitivas inmediatas y cambio de variable

Ejercicio 5. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int x(x+1)(x+2)dx$

c) $\int \frac{x^2+1}{x-1}dx$

e) $\int \frac{dx}{e^x+1}$

b) $\int (a^{2/3} - x^{2/3})^3 dx$

d) $\int \frac{\sqrt[3]{1+\log(x)}}{x} dx$

f) $\int x(2x+5)^{10} dx$

Integración por partes

Ejercicio 6. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \arcsen(x)dx$

c) $\int x \sen(x) \cos(x) dx$

b) $\int x \sen(x) dx$

d) $\int x^2 e^{-x}$

Integración de funciones racionales

Ejercicio 7. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \frac{dx}{1+x^3}$

d) $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}$

b) $\int \frac{dx}{x^4-1}$

c) $\int \frac{dx}{(x+1)^2(1+x^2)}$

e) $\int \frac{dx}{x(1+x)^2}$

Integración de funciones trigonométricas

Ejercicio 8. Calcula las siguientes primitivas

a) $\int \sen^3(x) dx$

d) $\int \frac{\cos^5(x)}{\sen^3(x)} dx$

g) $\int \frac{1}{1+\cos^2(3x)} dx$

b) $\int \cos^5(x) dx$

e) $\int \frac{\cos(x)}{1+\cos(x)} dx$

h) $\int \frac{1}{3 \sen^2(x)+5 \cos^2(x)} dx$

c) $\int \sen^2(x) \cos^2(x) dx$

f) $\int \frac{1+\tan(x)}{1-\tan(x)} dx$

i) $\int \frac{\sen(2x)}{1+\sen^2(x)} dx$

Integración de funciones irracionales

Ejercicio 9. Calcula las siguientes primitivas

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}} dx & \text{c)} \int \frac{x^2}{\sqrt{x^2-x+1}} dx & \text{e)} \int \frac{dx}{x^5 \sqrt{x^2-1}} \\ \text{b)} \int \frac{dx}{\sqrt{1+x} + \sqrt{(1+x)^3}} & \text{d)} \int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^2}} dx & \text{f)} \int \frac{x^6}{\sqrt{1+x^2}} dx \end{array}$$

Un poco de todo

Ejercicio 10. Calcula las siguientes integrales:

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \int_0^1 \frac{dx}{1+e^x} = 1 + \log\left(\frac{2}{1+e}\right) & \text{j)} \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2} dx = \frac{\pi}{2} \\ \text{b)} \int_0^{1/2} \frac{dx}{\sqrt{20+8x-x^2}} = \arcsen\left(\frac{2}{3}\right) - \arcsen\left(\frac{7}{12}\right) & \text{k)} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos(x))^2 dx = 3\pi \\ \text{c)} \int_0^3 \frac{dx}{\sqrt{9-x^2}} = \frac{\pi}{2} & \text{l)} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} |\sen(x)|^3 dx = \frac{4}{3} \\ \text{d)} \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^6}} dx = \frac{\pi}{6} & \text{m)} \int_0^{\pi/2} \sen^2(x) \cos^2(x) dx = \frac{\pi}{16} \\ \text{e)} \int_1^{+\infty} \frac{x-1}{x^3-3x^2+x+5} dx = \frac{3\pi+\log(2)}{10} & \text{n)} \int_0^1 (1-\rho^2)^{3/2} 3\rho d\rho = \frac{3}{5} \\ \text{f)} \int_0^{+\infty} \frac{x}{3+x^4} dx = \frac{\sqrt{3}\pi}{12} & \text{ñ)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2+y^2} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{1+y^2}} \\ \text{g)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{e^x+e^{-x}} = \frac{\pi}{2} & \text{o)} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} = \log(1+\sqrt{2}) \\ \text{h)} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \cos(\beta x) dx = \frac{\alpha}{\alpha^2+\beta^2} \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} & \text{p)} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}} = \pi \\ \text{i)} \int_0^{+\infty} e^{-\alpha x} \sen(\beta x) dx = \frac{\beta}{\alpha^2+\beta^2} \quad \alpha > 0, \beta \in \mathbb{R} & \end{array}$$

3. Aplicaciones

Ejercicio 11. Halla el área comprendida entre el eje de abscisas y la curva $y = x^3 - 6x^2 + 8x$.

Ejercicio 12. Halla el área comprendida entre las parábolas $y = 6x - x^2$, $y = x^2 - 2x$.

Ejercicio 13. Halla el área comprendida entre las curvas $y = x^2$ y $y = 8x$.

Ejercicio 14. Halla la longitud del arco de la curva $x = \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4y}$ desde $y = 1$ hasta $y = 3$.

Ejercicio 15. Halla la longitud de las siguientes curvas:

a) $y = \frac{x^4+48}{24x}$ en $[2, 4]$

b) $y = \log(1 - x^2)$ en $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$

c) Halla la longitud de la catenaria, es decir $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{a}{2}(e^{-x/a} + e^{x/a}).$$

Ejercicio 16. Halla la longitud del arco de la curva $9x^2 = 4y^3$ entre los puntos $(0, 0)$ y $(2\sqrt{3}, 3)$.

Ejercicio 17. La curva $y = \sin^2(x)$, para $x \in [0, \pi]$, gira en torno al eje OX generando un sólido. Calcula su volumen.

Ejercicio 18. Halla el volumen generado al girar alrededor del eje OX la gráfica de $f(x) = \frac{18x}{x^2+9}$.

Ejercicio 19. Calcula el volumen del sólido generado al girar la región limitada por $y = x^2$ y $x = y^2$

a) alrededor del eje OX

b) alrededor del eje OY

Ejercicio 20. Halla el volumen del cuerpo engendrado al girar alrededor del eje OX la curva $y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ entre $x = 1$ y $x = -1$.

Ejercicio 21. Al girar alrededor del eje OX, el segmento de curva $y = \sqrt{x}$ comprendido entre las abscisas 0 y a , genera un tronco de paraboloide de revolución cuya superficie es igual a la de una esfera de radio $\sqrt{13/12}$. Hállese el valor de a .

Ejercicio 22. Halla el área de la superficie generada al girar la curva $y = x^2$ alrededor del eje OX entre $y = 0$ y $y = \sqrt{2}$.