Variable Compleja I
Tema 12: El teorema general de Cauchy

1 Índice

2 Cadenas y ciclos

3 Teorema general de Cauchy

Índice de un punto con respecto a un camino cerrado

Motivación

$$a \in \mathbb{C}, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad z \in \mathbb{C} \setminus C(a,r)^*$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{dw}{w-z} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad |z-a| < r \\ 0 & \text{si} \quad |z-a| > r \end{cases}$$

Definición de índice

γ camino cerrado, $\quad z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$

Índice del punto z con respecto al camino γ:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dw}{w-z}$$

Ejemplos aclaratorios

Ejemplos sencillos

- $\gamma = C(a,r) + C(a,r)$:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} 2 & \text{si} \quad |z-a| < r \\ 0 & \text{si} \quad |z-a| > r \end{cases}$$

- $\gamma = -C(a,r)$:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = \begin{cases} -1 & \text{si} \quad |z-a| < r \\ 0 & \text{si} \quad |z-a| > r \end{cases}$$

- $\gamma = C(a,r) - C(a,r)$:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$$

Logaritmo derivable de un arco

Lema

$$a,b \in \mathbb{R},\ a < b,\ \ \sigma : [a,b] \to \mathbb{C} \text{ un arco}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \sigma^*$$

$$\tau : [a,b] \to \mathbb{C}^*, \quad \tau(t) = \sigma(t) - z \quad \forall t \in [a,b]$$

Entonces τ admite un logaritmo derivable, es decir,

$$\exists \varphi : [a,b] \to \mathbb{C}, \ \text{ derivable, tal que } \quad e^{\varphi(t)} = \tau(t) \quad \forall t \in [a,b]$$

Como consecuencia, se tiene:

$$\int_\sigma \frac{dw}{w-z} = \varphi(b) - \varphi(a) \in \operatorname{Log}\left(\frac{\sigma(b)-z}{\sigma(a)-z}\right)$$

Propiedades del índice

Propiedades del índice

γ camino cerrado

- $\operatorname{Ind}_\gamma(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \gamma^*$
- La función $\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$ es continua.
  Equivalentemente, es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$
- Si U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \gamma^*$, entonces:

$$\operatorname{Ind}_\gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U$$

Cadenas

Definiciones

- Una cadena es una suma formal de caminos:

$$\Gamma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$$

donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

- Imagen de una cadena: $\Gamma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \gamma_k^*$

- Suma de cadenas: $\Sigma = \sum_{k=1}^{m} \sigma_k$ otra cadena.

$$\Gamma + \Sigma = \gamma_1 + \gamma_2 + \ldots + \gamma_n + \sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_m$$

- Cadena opuesta: $-\Gamma = (-\gamma_1) + (-\gamma_2) + \ldots (-\gamma_n) = \sum_{k=1}^{n} (-\gamma_k)$

- $(\Gamma + \Sigma)^* = \Gamma^* \cup \Sigma^*$ y $(-\Gamma)^* = \Gamma^*$.

Integral sobre una cadena

Definición

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \quad \text{una cadena}$$

$$C(\Gamma^*) \ \text{ funciones continuas del compacto } \Gamma^* \text{ en } \mathbb{C}$$

Espacio de Banach complejo con:

$$\|f\|_\infty = \max \left\{ |f(z)| : z \in \Gamma^* \right\} \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Integral sobre una cadena: $$\int_\Gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$$

Longitud de una cadena: $$l(\Gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\gamma_k).$$

Propiedades de la integral

Propiedades de la integral sobre una cadena Γ

- Linealidad: $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad f, g \in C(\Gamma^*)$

$$\int_\Gamma \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\,dz = \alpha \int_\Gamma f(z)\,dz + \beta \int_\Gamma g(z)\,dz$$

- Continuidad: $f \in C(\Gamma^*)$

$$\left|\int_\Gamma f(z)\,dz\right| \leqslant l(\Gamma)\,\|f\|_\infty$$

- Aditividad: Σ otra cadena, $f \in C\big(\Gamma^* \cup \Sigma^*\big)$

$$\int_{\Gamma+\Sigma} f(z)\,dz = \int_\Gamma f(z)\,dz + \int_\Sigma f(z)\,dz$$

Cadena opuesta: $\displaystyle\int_{-\Gamma} f(z)\,dz = -\int_\Gamma f(z)\,dz \quad \forall f \in C(\Gamma^*)$

Ciclos e índice

Ciclos

Un ciclo es una suma formal de caminos cerrados: $\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k$, donde $n \in \mathbb{N}$ y γ_k es un camino cerrado, para todo $k = 1, 2, \ldots, n$.

- Todo lo dicho sobre cadenas se aplica en particular a los ciclos
- La suma de dos ciclos es un ciclo
- La cadena opuesta de un ciclo también es un ciclo

Índice con respecto a un ciclo

$$\Gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \ \text{ ciclo, } z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$$

$$\operatorname{Ind}_{\Gamma}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{dw}{w-z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_k} \frac{dw}{w-z} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Ind}_{\gamma_k}(z)$$

Propiedades del índice con respecto a un ciclo

Propiedades

Γ un ciclo

- $\operatorname{Ind}_\Gamma(z) \in \mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \Gamma^*$
- La función $\operatorname{Ind}_\gamma : \mathbb{C} \setminus \gamma^* \to \mathbb{Z}$ es constante en cada componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$
- Si U es la componente conexa no acotada de $\mathbb{C} \setminus \Gamma^*$, entonces:

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(z) = 0 \quad \forall z \in U$$

Motivación

Esquema común de los teoremas de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \;\; \Gamma \text{ ciclo en } \Omega, \;\; f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Hipótesis adicional

$$\Downarrow$$

$$\int_\Gamma f(z)\, dz = 0$$

- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre f?
- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre Γ?
- ¿Cuál es la hipótesis más general posible sobre Ω?

Respuesta a la primera pregunta

Problema 1

Dado un abierto Ω del plano, caracterizar las funciones $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tales que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \text{para todo ciclo } \Gamma \text{ en } \Omega$$

Caracterización de la existencia de primitiva

$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Son equivalentes:

- $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ para todo ciclo Γ en Ω
- f tiene una primitiva en Ω: $\exists F \in \mathcal{H}(\Omega) : F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$

Respuesta a la segunda pregunta

Problema 2

Dado un abierto Ω del plano, caracterizar los ciclos Γ en Ω tales que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Condición obviamente necesaria

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad \Gamma \text{ ciclo en } \Omega$$

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall\, f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \int_\Gamma \frac{dz}{z-w} = 0 \;\; \forall\, w \in \mathbb{C}\setminus\Omega$$

Un ciclo Γ en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω cuando

$$\operatorname{Ind}_\Gamma(w) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\Omega$$

Esta condición, obviamente necesaria, ¡¡también es suficiente!!

Respuesta a la tercera pregunta

Problema 3

Caracterizar los abiertos Ω del plano, tales que

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0 \quad \forall f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad \forall \Gamma \text{ ciclo en } \Omega$$

Respuestas

Para un abierto Ω del plano, son equivalentes:

- $\displaystyle\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$ para toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y para todo ciclo Γ en Ω
- Toda función holomorfa en Ω tiene primitiva
- Todo ciclo en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω

Se dice que un abierto Ω del plano es homológicamente conexo cuando todo ciclo en Ω es nul-homólogo con respecto a Ω.

El teorema general de Cauchy

Forma general del Teorema de Cauchy y de la fórmula de Cauchy

Sea Ω un abierto del plano, Γ un ciclo en Ω nul-homólogo con respecto a Ω y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Entonces:

- $\operatorname{Ind}_\Gamma(z)\, f(z) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\Gamma \frac{f(w)}{w-z}\, dw \quad \forall z \in \Omega \setminus \Gamma^*$
- $\displaystyle\int_\Gamma f(w)\, dw = 0$

Abiertos homológicamente conexos

Caracterizaciones de los abiertos homológicamente conexos del plano

Para un abierto Ω del plano, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- Ω es homológicamente conexo, es decir, para todo ciclo Γ en Ω se tiene:

$$\mathrm{Ind}_\Gamma(w) = 0 \quad \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$$

- Para todo ciclo Γ en Ω y toda $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ se tiene

$$\int_\Gamma f(z)\,dz = 0$$

- Toda función holomorfa en Ω tiene primitiva, es decir:

$$\forall f \in \mathcal{H}(\Omega) \;\; \exists F \in \mathcal{H}(\Omega) \; : \; F'(z) = f(z) \;\; \forall z \in \Omega$$

- Toda función holomorfa en Ω, que no se anule, tiene un logaritmo holomorfo, es decir:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega), \;\; f(\Omega) \subset \mathbb{C}^* \quad \Longrightarrow \quad \exists g \in \mathcal{H}(\Omega) \; : \; e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Abiertos sin "agujeros"

Si Ω es un abierto del plano tal que ninguna componente conexa de $\mathbb{C} \setminus \Omega$ está acotada, entonces Ω es homológicamente conexo.