Variable Compleja I
Tema 4: Funciones analíticas

Series de números complejos

Definiciones

Serie de números complejos:

$$\sum_{n\geqslant 0} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} z_k \right\} = \{S_n\}$$

donde $z_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Suma de una serie convergente:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} z_k$$

Término general de una serie convergente:

$$\sum_{n\geqslant 0} z_n \ \text{ convergente } \implies \{z_n\} \to 0$$

Series de números complejos

Notación formalmente más general

Fijado $m \in \mathbb{N}$, definimos:

$$\sum_{n \geqslant m} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geqslant 0} z_{m+n} = \left\{ \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k \right\}$$

Suma de esta serie, cuando es convergente:

$$\sum_{n=m}^{\infty} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n \to \infty} \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k$$

La convergencia de la serie $\sum_{n \geqslant m} z_n$ equivale a la de $\sum_{n \geqslant 0} z_n$, en cuyo caso:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{m-1} z_n + \sum_{n=m}^{\infty} z_n$$

Reducción al caso real

Reducción al caso real

$$\operatorname{Re} S_n = \operatorname{Re} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re} z_k \qquad \operatorname{Im} S_n = \operatorname{Im} \sum_{k=0}^{n-1} z_k = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im} z_k$$

La serie de números complejos $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ es convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Im} z_n$ convergen, en cuyo caso se verifica que:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$$

Convergencia absoluta

Definición

La serie $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ es absolutamente convergente cuando $\sum_{n\geqslant 0} |z_n|$ converge

Relación con la convergencia

Toda serie de números complejos absolutamente convergente es convergente.

Además, si la serie $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ es absolutamente convergente, entonces:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} z_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

Sucesiones de funciones. Convergencia puntual

Sucesiones de funciones

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$$

Una sucesión de funciones definidas en A es una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A)$.
Escribiendo $f_n = \varphi(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, la sucesión φ se denota por $\{f_n\}$.
En lo que sigue, fijamos una sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en A y un conjunto no vacío $B \subset A$.

Convergencia puntual

$\{f_n\}$ converge puntualmente en B cuando, para cada $z \in B$, la sucesión $\{f_n(z)\}$ es convergente. En tal caso podemos definir $f : B \to \mathbb{C}$ por:

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \quad \forall z \in B$$

Se dice que la función f es el límite puntual de $\{f_n\}$ en B, o que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en B. Se tiene entonces:

$$\forall z \in B \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \ \Rightarrow \ |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

En principio m depende de ε y del punto $z \in B$ considerado.

Convergencia uniforme

Definición

$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \; : \; n \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \;\; \forall z \in B$$

Primer criterio

La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B si, y sólo si, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant p$ la función $f_n - f$ está acotada en B y

$$\lim_{n \to \infty} \sup \left\{ |f_n(z) - f(z)| : \; z \in B \right\} = 0$$

Segundo criterio

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B
- Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de B, se tiene que
$$\{f_n(z_n) - f(z_n)\} \to 0$$

Ejemplo de convergencia puntual y uniforme

Ejemplo

$$f_n(z) = z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}\,, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Convergencia puntual. Para $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $|z| < 1 \implies \{z^n\} \to 0$
- $|z| > 1 \implies \{z^n\} \to \infty$
- Cuando $|z| = 1$, se tiene: $\{z^n\}$ converge $\iff z = 1$

En resumen: $\{f_n(z)\}$ converge $\iff z \in D(0,1) \cup \{1\}$

Concretamente, $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $D(0,1) \cup \{1\}$, donde

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in D(0,1) \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1$$

Convergencia uniforme. Si $\emptyset \neq B \subset D(0,1) \cup \{1\}$, entonces:

$$\{f_n\} \text{ converge uniformemente en } B \iff \sup\Big\{\,|z| \ : \ z \in B \setminus \{1\}\Big\} < 1$$

Convergencia uniforme y complitud

Condición de Cauchy uniforme

$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones definidas en A

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en B cuando:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ p,q \geqslant m \implies |f_p(z) - f_q(z)| < \varepsilon \ \ \forall z \in B$$

Tercer criterio

$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}$, $\{f_n\}$ sucesión de funciones definidas en A

$\{f_n\}$ converge uniformemente en B

$\Updownarrow$

$\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en B

Convergencia uniforme y continuidad

Preservación de la continuidad

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ f_n \in \mathcal{F}(A)\quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Supongamos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en A a una función $f \in \mathcal{F}(A)$

Si, para todo $n \in \mathbb{N}$, f_n es continua en un punto $z \in A$,
entonces f es continua en z

Por tanto: $f_n \in \mathcal{C}(A)\ \ \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f \in \mathcal{C}(A)$

Series de funciones. Convergencia puntual

Series de funciones

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Serie de funciones definidas en A:

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\} \qquad \text{donde } \; f_n \in \mathcal{F}(A) \;\; \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Convergencia puntual

$\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge puntualmente en $B \subset A \iff \sum_{n\geqslant 0} f_n(z)$ converge $\forall z \in B$

Entonces, la suma de la serie $f \in \mathcal{F}(B)$ viene dada por:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in B$$

$$\sum_{n\geqslant 0} f_n \text{ converge puntualmente en } B \implies \{f_n(z)\} \to 0 \quad \forall z \in B$$

La sucesión $\{f_n\}$, término general de la serie, converge puntualmente en B a la función idénticamente nula.

Convergencia uniforme de series de funciones

$$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}\ ,\ f_n \in \mathcal{F}(A)\quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Series con otra numeración

$$p \in \mathbb{N} \ \text{ fijo.} \qquad \sum_{n \geqslant p} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geqslant 0} f_{p+n} = \left\{ \sum_{k=p}^{p+n-1} f_k \right\}$$

Esta serie converge puntualmente en B si, y sólo si, lo hace $\sum_{n \geqslant 0} f_n$, en cuyo caso: $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{p-1} f_n(z) + \sum_{n=p}^{\infty} f_n(z) \quad \forall z \in B$

Convergencia uniforme

$\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en B cuando:

$$\forall \varepsilon > 0\ \ \exists m \in \mathbb{N}\ :\ n \geqslant m \ \Rightarrow\ \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon \quad \forall z \in B$$

$\Longrightarrow$ $\{f_n\}$ converge uniformemente en B a la función idénticamente nula.

Fijado $p \in \mathbb{N}$, la convergencia uniforme de $\sum_{n \geqslant p} f_n$ en B equivale a la de $\sum_{n \geqslant 0} f_n$

Convergencia absoluta

Convergencia absoluta

$$\emptyset \neq B \subset A \subset \mathbb{C}\ ,\ f_n \in \mathcal{F}(A)\quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

La serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge absolutamente en B cuando, para todo $z \in B$, la serie $\sum_{n \geqslant 0} |f_n(z)|$ converge.

Entonces $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge puntualmente en B y se tiene:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \qquad \forall z \in B$$

Convergencia absoluta y uniforme

Test de Weierstrass

Sea $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ una serie de funciones complejas, definidas en un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, y sea B un subconjunto no vacío de A.

Supongamos que:

- Para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, existe una constante $M_n \in \mathbb{R}$ tal que:

$$|\, f_n(z)\,| \leqslant M_n \qquad \forall z \in B$$

- La serie de números reales $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ es convergente

Entonces la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge absoluta y uniformemente en B.

Series de potencias

Series de potencias

Una serie de potencias, centrada en un punto $a \in \mathbb{C}$, es una serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ en la que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ viene dada por

$$f_n(z) = \alpha_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

donde $\alpha_n \in \mathbb{C}$ es constante, para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Dicha serie se denota simplemente por

$$\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$$

Las sumas parciales son funciones polinómicas:

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (z-a)^k \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Radio de convergencia

Lema de Abel

Sea $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que la sucesión $\{|\alpha_n|\rho^n\}$ esté mayorada.

Entonces la serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ converge absolutamente en $D(a,\rho)$ y uniformemente en cada subconjunto compacto de dicho disco.

Radio de convergencia

Para definir el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$, se considera el conjunto

$$\Lambda = \left\{ \rho \in \mathbb{R}^+ \ : \ \{|\alpha_n|\rho^n\} \ \text{ mayorada} \right\}$$

y se pueden dar tres casos:

- Si $\Lambda = \emptyset$, entonces $R = 0$
- Si $\Lambda \neq \emptyset$ y Λ no está mayorado, entonces $R = \infty$
- Si $\Lambda \neq \emptyset$ y Λ está mayorado, entonces $R = \sup \Lambda$

Convergencia de las series de potencias

Convergencia de la serie, conociendo el radio

Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias $\sum\limits_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$

- Si $R \in \mathbb{R}^+$, la serie converge absolutamente en $D(a,R)$, converge uniformemente en cada compacto $K \subset D(a,R)$ y no converge en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,R)$
- Si $R = \infty$, la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{C}$.
- Si $R = 0$, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.

Preguntas que quedan sin resolver

- Cuando $R = \infty$ ¿Hay convergencia uniforme en $\mathbb{C}$?
- Cuando $R \in \mathbb{R}^+$ ¿Hay convergencia uniforme en $D(a,R)$?
- Cuando $R \in \mathbb{R}^+$ ¿Qué ocurre en la circunferencia $\{z \in \mathbb{C} \ |z-a| = R\}$?

Cálculo del radio de convergencia

Fórmula de Cauchy-Hadamard

Sea R el radio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$

- Si la sucesión $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}$ no está mayorada, entonces $R=0$
- Si $\left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\} \to 0$, entonces $R=\infty$
- En otro caso:

$$R = \frac{1}{\limsup \left\{\sqrt[n]{|\alpha_n|}\right\}}$$

Corolario

Suponiendo $\alpha_n \in \mathbb{C}^* \quad \forall n \in \mathbb{N}$, se tiene:

- $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to \infty \implies R=0$
- $\{\alpha_{n+1}/\alpha_n\} \to 0 \implies R=\infty$
- $\{|\alpha_{n+1}/\alpha_n|\} \to \lambda \in \mathbb{R}^+ \implies R=1/\lambda$

Algunos ejemplos de series de potencias

Ejemplos

- La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^n}$ tiene radio de convergencia ∞.
  No converge uniformemente en $\mathbb{C}$
- La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} n^n z^n$ tiene radio de convergencia 0
- La serie geométrica, $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} z^n$ tiene radio de convergencia 1. Su suma es:
  $$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \forall z \in D(0,1)$$
  No converge uniformemente en $D(0,1)$
  No converge en ningún punto de $\mathbb{T}$
- La serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ tiene radio de convergencia 1
  Converge uniformemente en $\overline{D}(0,1)$

Suma de una serie de potencias

Dominio de convergencia y suma de la serie

Una serie de potencias es trivial cuando tiene radio de convergencia 0

$\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ serie de potencias no trivial, con radio de convergencia $R \neq 0$

Su dominio de convergencia, Ω, es:

- $\Omega = D(a,R)$ cuando $R \in \mathbb{R}^+$
- $\Omega = \mathbb{C}$ cuando $R = \infty$

La serie converge absolutamente en Ω y uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω.

La suma de la serie es la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

Holomorfía de la suma de una serie de potencias

Lema: radio de convergencia de la serie derivada

Las series $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 1} n\alpha_n (z-a)^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n$ tienen el mismo radio de convergencia.

Teorema

Sea f la suma de una serie de potencias no trivial, es decir,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

donde Ω es el dominio de convergencia de la serie.

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha_n\,(z-a)^{n-1} \qquad \forall z \in \Omega$$

Definición de las derivadas sucesivas

Derivadas sucesivas de una función

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \,, f \in \mathcal{F}(A). \text{ Convenio habitual } f^{(0)} = f$$

Etapa base de la inducción ($n = 1$), función derivada primera:

$$A_1 = \{z \in A \cap A' : f \text{ derivable en } z\}, \qquad f^{(1)} = f' : A_1 \to \mathbb{C}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ suponemos definida la función derivada n-ésima $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{C}$.

Si $z \in A_n \cap A_n'$, f es $n+1$ veces derivable en z cuando $f^{(n)}$ es derivable en z.
Entonces $f^{(n+1)}(z) = \left(f^{(n)}\right)'(z)$ es la $(n+1)$-ésima derivada de f en z.

Definimos ahora $A_{n+1} = \{z \in A_n \cap A_n' : f \text{ es } n+1 \text{ veces derivable en } z\}$
Si $A_{n+1} \neq \emptyset$, la función derivada $(n+1)$-ésima de f es

$$f^{(n+1)} = \left(f^{(n)}\right)' : A_{n+1} \to \mathbb{C}$$

Suponiendo $A \subset A'$, si f es n veces derivable en todo punto de A, para todo $n \in \mathbb{N}$, decimos que f es indefinidamente derivable en A y tendremos $f^{(n)} \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Casos particulares de las derivadas sucesivas

Funciones de variable real

- $A \subset \mathbb{R}$ y $f(A) \subset \mathbb{R}$. Hemos repetido la definición de las derivadas sucesivas de una función real de variable real.
- $A \subset \mathbb{R}$ pero f puede tomar valores complejos cualesquiera. Para todo $n \in \mathbb{N}$, f es n veces derivable en un punto $t \in A$ si, y sólo si, lo son las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, en cuyo caso:

$$f^{(n)}(t) = \big(\operatorname{Re} f\big)^{(n)}(t) + i\,\big(\operatorname{Im} f\big)^{(n)}(t)$$

  Cuando $A \subset A'$, f es indefinidamente derivable en A si, y sólo si, lo son $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, verificándose la igualdad anterior para todo $t \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Derivadas sucesivas de la suma de una serie de potencias

Teorema

Sea $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ una serie de potencias no trivial, Ω su dominio de convergencia y f su suma: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega$

Entonces f es indefinidamente derivable en Ω. De hecho, para todo $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la serie de potencias

$$\sum_{n\geqslant k} \frac{n!}{(n-k)!} \alpha_n (z-a)^{n-k} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+k)!}{n!} \alpha_{n+k} (z-a)^n$$

tiene dominio de convergencia Ω y se verifica que:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \alpha_n (z-a)^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} \alpha_{n+k} (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega$$

En particular se tiene: $f^{(k)}(a) = k!\, \alpha_k \quad \forall k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Por tanto, la serie de partida es la serie de Taylor de f:

$$\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

Un principio de identidad

Principio de identidad para series de potencias

Sean $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ y $\sum_{n\geqslant 0} \beta_n (z-a)^n$ series de potencias no triviales, con dominios de convergencia Ω_1 y Ω_2 respectivamente.

Supongamos que existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,\rho) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ y

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,\rho)$$

Entonces, ambas series son idénticas, es decir,

$$\alpha_n = \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Funciones analíticas

Concepto de función analítica

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ ,\ f \in \mathcal{F}(\Omega)$$

f es analítica en Ω cuando, para cada $a \in \Omega$ se verifica lo siguiente:

Existe $\rho_a \in \mathbb{R}^+$, con $D(a,\rho_a) \subset \Omega$, y una serie de potencias $\sum\limits_{n \geqslant 0} \alpha_n^{(a)} (z-a)^n$, con radio de convergencia mayor o igual que ρ_a, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(a)} (z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,\rho_a)$$

Holomorfía de las funciones analíticas

Sea f es una función analítica en un abierto Ω del plano. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y f' es analítica en Ω.

Por tanto, f es indefinidamente derivable en Ω y todas sus derivadas son funciones analíticas en Ω.

Definición equivalente de función analítica

Otra forma de entender el concepto de función analítica

Si Ω es un abierto no vacío del plano, una función $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ es analítica en Ω si, y sólo si, es indefinidamente derivable en Ω y, para cada $a \in \Omega$ existe $\rho_a \in \mathbb{R}^+$ con $D(a, \rho_a) \subset \Omega$ tal que, la serie de Taylor de f centrada en a tiene radio de convergencia mayor o igual que ρ_a y se verifica que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$