Variable Compleja I
Tema 5: Funciones elementales

La función exponencial compleja

Definición de la exponencial

Función exponencial real: $\exp x = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

La serie $\sum_{n\geqslant 0} \frac{z^n}{n!}$ tiene radio de convergencia ∞

Función exponencial compleja: $\exp z = e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Primeras propiedades de la exponencial

E.1 La exponencial es una función entera que coincide con su derivada.

E.2 Fórmula de adición: $e^{z+w} = e^z e^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

E.3 $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, $f'(z) = f(z) \ \forall z \in \mathbb{C} \implies \exists \lambda \in \mathbb{C} : f(z) = \lambda e^z \quad \forall z \in \mathbb{C}$

E.4 Es una función analítica en $\mathbb{C}$: $e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^a}{n!}(z-a)^n \ \ \forall a, z \in \mathbb{C}$

Más propiedades de la exponencial compleja

Fórmula de Euler y consecuencias

E.5 Fórmula de Euler: $e^{it} = \cos t + i \operatorname{sen} t \quad \forall t \in \mathbb{R}$

E.6 Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\operatorname{Re} e^z = e^{\operatorname{Re} z} \cos(\operatorname{Im} z)$$
$$\operatorname{Im} e^z = e^z \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)$$
$$|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$
$$\operatorname{Arg}(e^z) = \{\operatorname{Im} z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$$

E.7 La imagen de la exponencial es $\mathbb{C}^*$. De hecho, para todo $w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\{z \in \mathbb{C} : e^z = w\} = \{\ln|w| + i\theta : \theta \in \operatorname{Arg} w\}$$

En particular, para todo $R \in \mathbb{R}^+$ se tiene: $\{e^z : z \in \mathbb{C}, |z| > R\} = \mathbb{C}^*$

Periodicidad de la exponencial

Funciones periódicas

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ f \in \mathcal{F}(A)\ ,\ w \in \mathbb{C}$$

w es un periodo de f cuando:

$$\{z+w : z \in A\} = A \qquad \text{y} \qquad f(z+w) = f(z) \ \ \forall z \in A$$

f es una función función periódica cuando tiene un periodo $w \in \mathbb{C}^*$

El conjunto de todos los periodos de f es un subgrupo aditivo de $\mathbb{C}$

Cuando dicho subgrupo está engendrado por un sólo elemento $w \in \mathbb{C}^*$, es decir, tiene la forma $\{kw : k \in \mathbb{Z}\}$, se dice que f es simplemente periódica y que w es un periodo fundamental de f.

Periodicidad de la exponencial

E.8 La exponencial es una función simplemente periódica con periodo fundamental $2\pi i$.

Logaritmos de un número complejo

Conjunto de los logaritmos y logaritmo principal

El conjunto de los logaritmos de $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\operatorname{Log} z = \left\{ w \in \mathbb{C} \ : \ e^w = z \right\} = \left\{ \ln |z| + i\theta \ : \ \theta \in \operatorname{Arg} z \right\}$$

Relación entre logaritmos y argumentos:

$$\operatorname{Arg} z = \operatorname{Im} \left(\operatorname{Log} z \right) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Log} z = \ln |z| + i \operatorname{Arg} z$$

El logaritmo principal de $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\log z = \ln |z| + i \arg z$$

La función $\log : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ también es el logaritmo principal

Extiende al logaritmo real: $\log x = \ln x \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Propiedad algebraica de los logaritmos

$$2\pi i\mathbb{Z} \ \text{ es un subgrupo aditivo de } \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Log} z \in \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

La propiedad clave de los logaritmos

$\operatorname{Log} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}/2\pi i\mathbb{Z}$ es un isomorfismo de grupos

El logaritmo principal no tiene la propiedad anterior:

$$0 = \log 1 = \log\big((-1)(-1)\big) \neq \log(-1) + \log(-1) = 2\pi i$$

No podemos elegir un logaritmo para tener dicha propiedad:

No existe una función $g : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}$ verificando:

$$g(z) \in \operatorname{Log} z \ \ \forall z \in \mathbb{C}^* \qquad \text{y} \qquad g(zw) = g(z) + g(w) \ \ \forall z, w \in \mathbb{C}^*$$

Planteamiento del problema del logaritmo holomorfo

Logaritmos holomorfos en un abierto

$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}^*$. Un logaritmo en Ω es una función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ verificando:

$$g(z) \in \operatorname{Log} z \quad \forall z \in \Omega \qquad \text{es decir,} \quad e^{g(z)} = z \quad \forall z \in \Omega$$

¿ Existe un logaritmo holomorfo en Ω ?

Logaritmos y argumentos de una función

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ f : A \to \mathbb{C}^*$$

- Un logaritmo de f es una función $g : A \to \mathbb{C}$ que verifique:
$$g(z) \in \operatorname{Log} f(z) \quad \forall z \in A, \text{ es decir, } e^{g(z)} = f(z) \quad \forall z \in A$$
- Un argumento de f es una función $\varphi : A \to \mathbb{R}$ que verifique:
$$\varphi(z) \in \operatorname{Arg} f(z) \quad \forall z \in A$$

g logaritmo de f $\implies$ $\varphi = \operatorname{Im} g$ argumento de f

φ argumento de f $\implies$ $g = \ln|f| + i\varphi$ logaritmo de f

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ ,\ f \in \mathcal{H}(\Omega)\ ,\ f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$$

Problema: ¿Tiene f un logaritmo holomorfo?

Observaciones sobre el problema del logaritmo holomorfo

Lema 1: Derivabilidad de un logaritmo continuo

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \ , \ f : A \to \mathbb{C}^* \ , \ g \ \text{ un logaritmo de } f$$

$$\left.\begin{array}{r} f \ \text{ derivable en } \ a \in A \cap A' \\ g \ \text{ continua en } \ a \end{array}\right\} \implies g \ \text{ derivable en } \ a \ \text{ con } \ g'(a) = \frac{f'(a)}{f(a)}$$

Lema 2: Logaritmos holomorfos y primitivas

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \ , \ f \in \mathcal{H}(\Omega) \ , \ f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$$

Si $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ verifica que $g'(z) = \dfrac{f'(z)}{f(z)}$ para todo $z \in \Omega$,

entonces existe $\lambda \in \mathcal{H}(\Omega)$, tal que $\lambda + g$ es un logaritmo de f y

λ es constante en cada componente conexa de Ω.

Consecuencia de los lemas anteriores

Primitivas

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \ , \ h \in \mathcal{F}(\Omega)$$

Una primitiva de h es una función $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $g' = h$

Consecuencia de los resultados anteriores

Para $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $f(\Omega) \subset \mathbb{C}^*$, son equivalentes:

- f tiene un argumento continuo
- f tiene un logaritmo continuo
- f tiene un logaritmo holomorfo
- f'/f tiene una primitiva

Ejemplos de logaritmos holomorfos

Holomorfía del logaritmo principal

$$\log \in \mathcal{H}\left(\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-\right) \qquad \text{con} \qquad \log'(z) = \frac{1}{z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$$

log no tiene límite en ningún punto de $\mathbb{R}^-$

Logaritmos análogos al principal

Fijado $\theta \in \mathbb{R}$, definimos un logaritmo en $\mathbb{C}^*$:

$$f_\theta(z) = \log\left(e^{i(\pi-\theta)}\, z\right) - i(\pi - \theta) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

Entonces $\quad f \in \mathcal{H}(\Omega_\theta) \quad$ donde $\quad \Omega_\theta = \mathbb{C}^* \setminus \{\rho\, e^{i\theta} : \rho \in \mathbb{R}^+\}$

Otra forma de construir logaritmos holomorfos

Un ejemplo de función analítica

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$ arbitrario, se tiene:

$$\frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{a^{n+1}} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

Logaritmo holomorfo en un disco que no contenga al origen

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, definiendo:

$$g(z) = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,a^n} (z-a)^n \qquad \forall z \in D\big(a, |a|\big)$$

se tiene que $g \in \mathcal{H}\big(D(a,|a|)\big)$ y $e^{g(z)} = z$ para todo $z \in D\big(a,|a|\big)$.

Analiticidad del logaritmo principal

Desarrollos en serie del logaritmo principal

Para $a \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$, sea $\rho_a = \begin{cases} |a| & \text{si } \operatorname{Re} a \geqslant 0 \\ |\operatorname{Im} a| & \text{si } \operatorname{Re} a < 0 \end{cases}$

Entonces:

$$\log z = \log a + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n\,a^n}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a, \rho_a)$$

En particular, el logaritmo principal es una función analítica en $\mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

Potencia de base y exponente complejos

Definición de la potencia

Motivación: $x^y = e^{y \ln x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \ , \ \forall y \in \mathbb{R}$

Potencia de base $z \in \mathbb{C}^*$ y exponente $w \in \mathbb{C}$:

$$\left[z^w \right] = \exp\left(w \operatorname{Log} z \right) = \left\{ \exp(w\lambda) : \lambda \in \operatorname{Log} z \right\}$$

Potencia principal

Calculemos $\exp(w \log z)$ en casos conocidos:

- $z \in \mathbb{C}^* \ , \ w = p \in \mathbb{Z} \implies \exp(p \log z) = z^p$
- $z = x \in \mathbb{R}^+ \ , \ w = y \in \mathbb{R} \implies \exp(y \log x) = x^y$
- $z = e \ , \ w \in \mathbb{C} \implies \exp(w \log e) = e^w$

Potencia principal de base $z \in \mathbb{C}^*$ y exponente $w \in \mathbb{C}$:

$$z^w = \exp(w \log z)$$

$$\left[z^w \right] = \left\{ z^w e^{2k\pi i w} \ : \ k \in \mathbb{Z} \right\}$$

Número de elementos de la potencia

Exponente no racional

Para $w \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$ y $z \in \mathbb{C}^*$

la aplicación $k \mapsto z^w e^{2k\pi i w}$, de $\mathbb{Z}$ en $\left[z^w\right]$, es biyectiva

luego el conjunto $\left[z^w\right]$ es infinito numerable

Raíces n-ésimas

Para cada $n \in \mathbb{N}$, todo $z \in \mathbb{C}^*$ tiene n raíces n-ésimas distintas, que son los elementos de la potencia $\left[z^{1/n}\right]$:

$$\left[z^{1/n}\right] = \left\{v \in \mathbb{C} \,:\, v^n = z\right\} = \left\{z^{1/n} e^{2r\pi i/n} \,:\, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < n\right\}$$

Raíz n-ésima principal: $z^{1/n} = \exp\big((1/n)\log z\big) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

En $\mathbb{R}^+$ es la raíz n-ésima positiva: $x^{1/n} = \sqrt[n]{x} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+$

Raíces n-ésimas de la unidad:

$$\left[1^{1/n}\right] = \left\{1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{n-1}\right\} \quad \text{donde} \quad u_n = e^{2\pi i/n}$$

$$\left[z^{1/n}\right] = \left\{z^{1/n} u_n^r \,:\, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < n\right\} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

$$\left[z^{1/n}\right] = \left\{\sqrt[n]{|z|}\, e^{i(\arg z + 2r\pi)/n} \,:\, r \in \mathbb{Z},\ 0 \leqslant r < n\right\}$$

Número de elementos de la potencia

Exponente racional

Si $w \in \mathbb{Q}$ y $n = \min\{m \in \mathbb{N} : mw \in \mathbb{Z}\}$, entonces $[z^w]$ tiene exactamente n elementos, para todo $z \in \mathbb{C}^*$. Concretamente, si $p = nw \in \mathbb{Z}$ se tiene:

$$[z^w] = [z^{p/n}] = \{v^p : v \in [z^{1/n}]\}$$

Funciones exponenciales y funciones potencia

Funciones exponenciales

Fijado $a \in \mathbb{C}^*$, función exponencial de base a:

$$\exp_a : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, \qquad \exp_a(z) = a^z = e^{z \log a} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Es una función entera y verifica: $a^{z+w} = a^z a^w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

En general, $\left[a^{z+w}\right]$ no coincide con $\left[a^z\right]\left[a^w\right]$

Acerca de las funciones potencia

Fijado $\alpha \in \mathbb{C}$, para $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\left[(zw)^\alpha\right] = \left[z^\alpha\right]\left[w^\alpha\right]$$

En general, $(zw)^\alpha$ no coincide con $z^\alpha w^\alpha$

Raíces n-ésimas holomorfas

Raíz n-ésima en un conjunto

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}\ ,\ n \in \mathbb{N}$$

Una raíz n-ésima en A es una función $\varphi : A \to \mathbb{C}$ tal que:

$$\varphi(z)^n = z \qquad \forall z \in A$$

Problema: si $\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$,

¿ Existe una raíz n-ésima holomorfa en Ω ?

Relación con el problema del logaritmo

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}^*$$

Si existe un logaritmo holomorfo en Ω, entonces,

existe una raíz n-ésima holomorfa en Ω, para todo $n \in \mathbb{N}$

Alguna respuestas negativas

Al problema de la raíz cuadrada

$$\text{Si} \quad r \in \mathbb{R}^+ \quad \text{y} \quad S = \{z \in \mathbb{C} : |z| = r\},$$

¡¡ No existe una raíz cuadrada continua en S !!

Si $0 \in \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$, no existe una raíz cuadrada continua en Ω

Al problema del logaritmo o de la primitiva

- No existe una raíz cuadrada holomorfa en $\mathbb{C}^*$
- No existe un logaritmo holomorfo en $\mathbb{C}^*$
- La función $z \mapsto 1/z$, definida en $\mathbb{C}^*$, no tiene primitiva

El seno y el coseno

Definiciones

Las funciones coseno y seno se definen, para todo $z \in \mathbb{C}$ por:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$$

Primeras propiedades

- Son funciones enteras:

$$\operatorname{sen}' z = \cos z \quad \text{y} \quad \cos'(z) = -\operatorname{sen} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- Son sumas de series de potencias convergentes en todo el plano:

$$\cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

- El coseno es par y el seno es impar:

$$\cos(-z) = \cos z \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

El seno y el coseno

Fórmulas de adición y consecuencias

- Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\cos(z+w) = \cos z \cos w - \operatorname{sen} z \operatorname{sen} w \qquad \text{y}$$
$$\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cos w + \cos z \operatorname{sen} w$$

- Consecuencias: para cualesquiera $z \in \mathbb{C}$ y $k \in \mathbb{Z}$ se tiene:
  - $\cos\big(z + (\pi/2)\big) = -\operatorname{sen} z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\big(z + (\pi/2)\big) = \cos z$
  - $\cos\big(z + k\pi\big) = (-1)^k \cos z \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\big(z + k\pi\big) = (-1)^k \operatorname{sen} z$
  - En particular, 2π es un periodo del seno y del coseno
  - $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1 \qquad \forall z \in \mathbb{C}$

Funciones hiperbólicas

Seno y coseno hiperbólicos

Para $z \in \mathbb{C}$ se define:

$$\operatorname{ch} z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sh} z = \frac{e^z - e^{-z}}{2}$$

Algunas propiedades inmediatas

Para todo $z \in \mathbb{C}$ se tiene:

- $\operatorname{ch}'(z) = \operatorname{sh} z$, y $\operatorname{sh}'(z) = \operatorname{ch} z$
- $\operatorname{ch}^2 z - \operatorname{sh}^2 z = 1$
- $\cos z = \operatorname{ch}(iz)$ y $\operatorname{sen} z = -i \operatorname{sh}(iz)$

En particular, para todo $y \in \mathbb{R}$ será:

- $\cos(iy) = \operatorname{ch} y$ y $\operatorname{sen}(iy) = i \operatorname{sh} y$

Otras propiedades del seno y el coseno

Partes real e imaginaria y módulo

Para $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\begin{aligned} \cos z &= \cos x \ \operatorname{ch} y - i \operatorname{sen} x \ \operatorname{sh} y \\ \operatorname{sen} z &= \operatorname{sen} x \ \operatorname{ch} y + i \cos x \ \operatorname{sh} y \end{aligned}$$

de donde:

$$\begin{aligned} |\cos z|^2 &= \cos^2 x + \operatorname{sh}^2 y \\ |\operatorname{sen} z|^2 &= \operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sh}^2 y \end{aligned}$$

Imagen del seno y el coseno

Para $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\cos z = w \quad \Longleftrightarrow \quad z \in -i \ \operatorname{Log}\left(w \pm (w^2 - 1)^{1/2}\right)$$

Por tanto, la imagen del coseno y del seno es $\mathbb{C}$

En particular: $\cos z = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad z = (2k+1)\pi/2$ con $k \in \mathbb{Z}$

La tangente

Definición

En el dominio $\Omega = \mathbb{C} \setminus \left\{ (2k+1)\pi/2 : k \in \mathbb{Z} \right\}$ se define la función tangente:

$$\operatorname{tg} z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z} \qquad \forall z \in \Omega$$

Algunas propiedades

- $\operatorname{tg} \in \mathcal{H}(\Omega)$ con $\operatorname{tg}'(z) = 1 + \operatorname{tg}^2 z \ \ \forall z \in \Omega$.
- $\{z+\pi : z \in \Omega\} = \Omega$ y $\operatorname{tg}(z+\pi) = \operatorname{tg} z \ \ \forall z \in \Omega$ luego π es un periodo de la tangente
- $\operatorname{tg} z \neq \pm i \quad \forall z \in \Omega$
- Para $w \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ y $z \in \Omega$ se tiene:

$$\operatorname{tg} z = w \quad \Leftrightarrow \quad z \in \frac{1}{2i} \operatorname{Log}\left(\frac{1+iw}{1-iw}\right)$$

- Por tanto, la imagen de la tangente es $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$

El arco-tangente

El conjunto arco-tangente

Para $z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ definimos el conjunto arco-tangente de z por

$$\operatorname{Arc\,tg} z \;=\; \frac{1}{2i}\, \operatorname{Log}\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

El arco-tangente principal

La función arco-tangente principal se define en $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ por:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \frac{1}{2i}\, \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$$

Extiende a la función arco-tangente real, lo que justifica la notación

Propiedades del arco-tangente principal

Algunas propiedades

- La función arco-tangente principal es holomorfa en el dominio:

$$U = \mathbb{C} \setminus \left\{ iy \ : \ y \in \mathbb{R} \ , \ |y| \geqslant 1 \right\}$$

verificando que:

$$\operatorname{arc\,tg}'(z) = \frac{1}{1+z^2} \qquad \forall z \in U$$

- En $D(0,1)$ se expresa como suma de una serie de potencias:

$$\operatorname{arc\,tg} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1} \qquad \forall z \in D(0,1)$$