Variable Compleja I
Tema 10: Teorema de Morera y sus consecuencias

Teorema de Morera

Motivación

Recordemos el teorema de Cauchy para el triángulo:

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \Longrightarrow \quad \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0 \quad \text{siempre que} \quad \Delta(a,b,c) \subset \Omega$$

¿ Es cierto el recíproco ?

Teorema de Morera

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Supongamos que

$$a,b,c \in \mathbb{C}, \quad \Delta(a,b,c) \subset \Omega \quad \Longrightarrow \quad \int_{[a,b,c,a]} f(z)dz = 0$$

Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Teorema de convergencia de Weierstrass

Motivación

¿Tipo de convergencia adecuado para sucesiones de funciones holomorfas?

- La convergencia puntual es demasiado débil: se puede demostrar que existe una sucesión $\{P_n\}$ de polinomios tal que:

$$\{P_n(x)\} \to 1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \qquad \text{y} \qquad \{P_n(z)\} \to 0 \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$$

- La convergencia uniforme en un abierto es demasiado restrictiva: una serie de potencias no suele converger uniformemente en su dominio de convergencia

Teorema de convergencia de Weierstrass

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \qquad f_n \in \mathcal{H}(\Omega) \ \ \forall n \in \mathbb{N}, \qquad f : \Omega \to \mathbb{C}$$

Si $\{f_n\} \to f$ uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω

entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Además, para cada $k \in \mathbb{N}$, se tiene que $\{f_n^{(k)}\} \to f^{(k)}$ uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω

Comentarios sobre el teorema de convergencia de Weierstrass

No hay nada parecido en el caso real

$$f_n(x) = \frac{1}{n}\sqrt{n^2 x^2 + 1} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad f(x) = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

- f_n es derivable en $\mathbb{R}$ para todo $n \in \mathbb{N}$
- $\{f_n\} \to f$ uniformemente en $\mathbb{R}$
- f no es derivable en el origen

Versión para series

Sea $\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$ y $f_n \in \mathcal{H}(\Omega)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Supongamos que $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω, y sea f su suma: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \quad \forall z \in \Omega$. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y, para cada $k \in \mathbb{N}$, la serie $\sum_{n \geqslant 0} f_n^{(k)}$ converge uniformemente en cada subconjunto compacto de Ω con:

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n^{(k)}(z) \quad \forall z \in \Omega, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Integrales dependientes de un parámetro: Preliminares

Integral curvilínea dependiente de un parámetro

$$\int_\gamma \Phi(w,z)\, dw$$

- γ es un camino
- Φ es una función, con valores complejos, de dos variables:
  - La variable de integración $w \in \gamma^* \subset \mathbb{C}$
  - El parámetro $z \in A$, donde $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$
- Por tanto $\Phi : \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$ debe verificar:

  para cada $z \in A$ la función $w \mapsto \Phi(w,z)$ es continua en γ^*
- Entonces podemos definir una función $f : A \to \mathbb{C}$ por

$$f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\, dw \qquad \forall z \in A$$

y decimos que f es una integral (curvilínea) dependiente de un parámetro

Integrales dependientes de un parámetro: Resultados previos

Lema 1: Continuidad

γ camino, $\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$

$\Phi : \gamma^* \times A \to \mathbb{C}$ continua (como función de dos variables)

$$f : A \to \mathbb{C}, \quad f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \qquad \forall z \in A$$

Entonces f es continua en A

Lema 2: Un teorema del tipo de Fubini para integrales curvilíneas

γ y φ dos caminos, $\Phi : \gamma^* \times \varphi^* \to \mathbb{C}$ continua. Entonces:

$$\int_\varphi \left(\int_\gamma \Phi(w,z)\,dw \right) dz = \int_\gamma \left(\int_\varphi \Phi(w,z)\,dz \right) dw$$

Holomorfía de la integral dependiente de un parámetro

Teorema

$$\gamma \text{ camino}, \qquad \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \qquad \Phi : \gamma^* \times \Omega \to \mathbb{C}$$

Para cada $w \in \gamma^*$ sea $\Phi_w : \Omega \to \mathbb{C}$ la función definida por

$$\Phi_w(z) = \Phi(w,z) \qquad \forall z \in \Omega$$

Supongamos que:

- Φ es continua
- $\Phi_w \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \forall w \in \gamma^*$

Entonces, definiendo $f(z) = \int_\gamma \Phi(w,z)\,dw$ para todo $z \in \Omega$, se tiene:

- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
- Para $z \in \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$, la función $w \mapsto \Phi_w^{(k)}(z)$, de γ^* en $\mathbb{C}$, es continua y

$$f^{(k)}(z) = \int_\gamma \Phi_w^{(k)}(z)\,dw = \int_\gamma \frac{\partial^k \Phi}{\partial z^k}(z,w)\,dw$$