# Variable Compleja I
# Tema 6: Integral curvilínea

# Definición de la integral de Cauchy

## Definición

En lo que sigue fijamos $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$

Integral de una función continua $f : [a, b] \to \mathbb{C}$

$$\int_a^b f(t)\,dt \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b \operatorname{Re} f(t)\,dt + i \int_a^b \operatorname{Im} f(t)\,dt$$

$$C[a,b] = \{\text{funciones continuas de } [a,b] \text{ en } \mathbb{C}\}$$

espacio de Banach (complejo) con la norma:

$$\|f\|_\infty \stackrel{\text{def}}{=} \max\{|f(t)| : t \in [a,b]\} \qquad \forall f \in C[a,b]$$

Tenemos un funcional $\Phi : C[a,b] \to \mathbb{C}$ definido por:

$$\Phi(f) = \int_a^b f(t)\,dt \qquad \forall f \in C[a,b]$$

# Propiedades de la integral con respecto al integrando

## Linealidad

El funcional $\Phi$ es lineal, es decir, para $f, g \in C[a,b]$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$ se tiene:

$$\int_a^b \big(\lambda f(t) + \mu g(t)\big)\, dt = \lambda \int_a^b f(t)\, dt + \mu \int_a^b g(t)\, dt$$

## Continuidad

El funcional $\Phi$ es continuo. Más concretamente, para toda $f \in C[a,b]$ se tiene:

$$\left| \int_a^b f(t)\, dt \right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\, dt \leqslant (b-a)\, \|f\|_\infty$$

# Propiedad de la integral con respecto al intervalo

## Notación para lo que sigue

Intervalo no trivial: $I \subset \mathbb{R}$

$\mathcal{C}(I)$ espacio vectorial complejo de todas las funciones continuas de $I$ en $\mathbb{C}$

Para $f \in \mathcal{C}(I)$ usamos la integral de $f$ con límites arbitrarios $a, b \in I$ con las definiciones usuales. Concretamente, si $a < b$ definimos:

$$\int_a^a f(t)\,dt = 0 \quad \text{y} \quad \int_b^a f(t)\,dt = -\int_a^b f(t)\,dt$$

## Aditividad

La integral es aditiva: para cualesquiera $f \in \mathcal{C}(I)$ y $a, b, c \in I$ se tiene:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$$

# Teorema Fundamental del Cálculo y consecuencias

## Teorema Fundamental del Cálculo

$I$ intervalo no trivial, $f \in \mathcal{C}(I)$ y $a \in I$. La función $F : I \to \mathbb{C}$ dada por:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \qquad \forall x \in I$$

es derivable en $I$ con $F'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$.

## Consecuencias

- Regla de Barrow. Si $f \in \mathcal{C}(I)$ y $G : I \to \mathbb{C}$ es una primitiva de $f$, es decir, $G$ es derivable en $I$ con $G'(x) = f(x)$ para todo $x \in I$, entonces:

$$\int_a^b f(t)\,dt = G(b) - G(a) \qquad \forall a, b \in I$$

- Fórmula de cambio de variable. Sean $I, J$ intervalos no triviales, $\varphi : J \to I$ una función de clase $C^1$ y $f \in \mathcal{C}(I)$. Si $\alpha, \beta \in J$, verifican que $a = \varphi(\alpha)$ y $b = \varphi(\beta)$, entonces:

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(s)\big)\,\varphi'(s)\,ds$$

# Curvas en el plano

## Primeras nociones sobre curvas

- Curva: función continua $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ donde $a,b \in \mathbb{R}, \quad a < b$
- $\varphi^* = \{\varphi(t) \ : \ t \in [a,b]\}$ es la imagen de la curva $\varphi$
- $\varphi(a)$ es el origen de $\varphi$ y $\varphi(b)$ es el extremo de $\varphi$
- La curva $\varphi$ es cerrada cuando $\varphi(a) = \varphi(b)$

## Suma de dos curvas

$\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ curvas tales que $\varphi(b) = \psi(c)$

La curva suma $\gamma = \varphi + \psi : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ viene dada por:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \varphi(t) & \text{si} \quad a \leqslant t \leqslant b \\ \psi(c+t-b) & \text{si} \quad b \leqslant t \leqslant b+d-c \end{cases}$$

$$\gamma^* = \varphi^* \cup \psi^*; \qquad \gamma(a) = \varphi(a); \qquad \gamma(b+d-c) = \psi(d)$$

# Suma de dos curvas

## Observaciones sobre la suma de dos curvas

- Sean $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [c,d] \to \mathbb{C}$ curvas con $\varphi(b) = \psi(c)$, y sea $\gamma = \varphi + \psi : [a, b+d-c] \to \mathbb{C}$ la curva suma. Entonces:

$$\gamma\big|_{[a,b]} = \varphi \qquad \text{y} \qquad \gamma\big|_{[b,b+d-c]} = \psi \circ \tau$$

  donde $\tau(t) = c + t - b \quad \forall t \in [b, b+d-c]$
  $\tau$ es la traslación que lleva el intervalo $[b, b+d-c]$ al intervalo $[c,d]$

- Caso $b = c$. Tenemos $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ y $\psi : [b,d] \to \mathbb{C}$ con $\varphi(b) = \psi(b)$. La curva suma $\gamma = \varphi + \psi : [a,d] \to \mathbb{C}$ verifica:

$$\gamma\big|_{[a,b]} = \varphi \qquad \text{y} \qquad \gamma\big|_{[b,d]} = \psi$$

- Recíprocamente: $\gamma : [a,d] \to \mathbb{C}$ curva arbitraria y $b \in ]a,d[$. Entonces:

$$\gamma = \gamma\big|_{[a,b]} + \gamma\big|_{[b,d]}$$

- Volviendo al caso general, tenemos:

$$\varphi + \psi = \gamma = \gamma\big|_{[a,b]} + \gamma\big|_{[b,b+d-c]} = \varphi + (\psi \circ \tau)$$

# Asociatividad de la suma de curvas

## Asociatividad

La suma de curvas tiene la propiedad asociativa, es decir: si $\varphi_1$, $\varphi_2$, $\varphi_3$ son curvas tales que el extremo de $\varphi_1$ es el origen de $\varphi_2$ y el extremo de $\varphi_2$ es el origen de $\varphi_3$, entonces:

$$\big(\varphi_1 + \varphi_2\big) + \varphi_3 = \varphi_1 + \big(\varphi_2 + \varphi_3\big)$$

Esto permitirá usar cómodamente sumas de $n$ curvas con $n \in \mathbb{N}$ arbitrario

## Partición de un intervalo

Partición de un intervalo $[a,b]$: conjunto finito $P \subset [a,b]$ tal que $a, b \in P$

Los puntos de una partición se numeran siempre de menor a mayor: si $P = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ es una partición de $[a,b]$, se entiende siempre que $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Para recordarlo escribimos:

$$P = \big\{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\big\}$$

# Sumas finitas de curvas

## Observaciones sobre sumas de $n$ curvas con $n \in \mathbb{N}$ , $n > 2$

Para $k = 1, 2, \ldots, n$ sea $\varphi_k : [a_k, b_k] \to \mathbb{C}$ una curva y supongamos que $\varphi_k(b_k) = \varphi_{k+1}(a_{k+1})$ para $k = 1, 2, \ldots, n-1$. Tenemos la curva suma:

$$\gamma = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n = \sum_{k=1}^{n} \varphi_k$$

- $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ donde $a = a_1$ y $b = a + \sum_{k=1}^{n} (b_k - a_k)$
- Tomando $t_0 = a$ y $t_k = a + \sum_{j=1}^{k} (b_j - a_j)$ para $k = 1, 2, \ldots, n$, tenemos una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a, b]$ tal que, para $k = 1, 2, \ldots, n$ se tiene:

$$\gamma\big|_{[t_{k-1}, t_k]} = \varphi_k \circ \tau_k$$

  donde $\tau_k$ es la traslación que lleva $[t_{k-1}, t_k]$ a $[a_k, b_k]$
- $\gamma^* = \bigcup_{k=1}^{n} \varphi_k^*$ ; $\gamma(a) = \varphi_1(a_1)$ ; $\gamma(b) = \varphi_n(b_n)$

# Sumas finitas de curvas. Curva opuesta

## Descomposición de una curva como suma

Toda partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de un intervalo $[a,b]$ permite expresar cualquier curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ como suma de $n$ curvas:

$$\gamma = \sum_{k=1}^{n} \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$$

## Curva opuesta

Dada una curva $\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$, la curva opuesta de $\varphi$ es la curva $-\varphi : [a,b] \to \mathbb{C}$ definida por

$$(-\varphi)(t) = \varphi(a+b-t) \qquad \forall\, t \in [a,b]$$

$$(-\varphi)^* = \varphi^*; \qquad (-\varphi)(a) = \varphi(b); \qquad (-\varphi)(b) = \varphi(a)$$

Ejemplo: las sumas $\varphi + (-\varphi)$ y $(-\varphi) + \varphi$ tienen sentido y son curvas cerradas, ¡¡ pero son distintas !!

# Arcos

## Definición de arco

Llamaremos arco a toda curva de clase $C^1$

$\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ derivable en $[a,b]$ con $\sigma' \in C[a,b]$

Entonces, la curva opuesta $(-\sigma) : [a,b] \to \mathbb{C}$ también es un arco

## Ejemplos de arcos

- Para $z, w \in \mathbb{C}$, el segmento de origen $z$ y extremo $w$ es el arco $[z, w] = \sigma : [0,1] \to \mathbb{C}$ definido por

  $$\sigma(t) = (1-t)z + tw \qquad \forall\, t \in [0,1]$$

  $-[z,w] = [w,z]$

  $[z,w]^* = [w,z]^* \subset \mathbb{C}$ es el "segmento" de extremos $z$ y $w$

- Para $z \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, la circunferencia de centro $z$ y radio $r$ es el arco $C(z,r) = \varphi : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ definido por

  $$\varphi(t) = z + r e^{it} \qquad \forall\, t \in [-\pi,\pi]$$

  Su imagen $C(z,r)^* = \{w \in \mathbb{C} : |w-z| = r\} \subset \mathbb{C}$ es la "circunferencia" de centro $z$ y radio $r$

# Caminos

## Definición de camino

Un camino es una suma de arcos, es decir,

una curva de la forma $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ , donde, $\sigma_1, \sigma_2, \ldots \sigma_n$ son arcos

Toda suma de caminos es un camino

## Caracterización

Para una curva $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\gamma$ es un camino

(ii) Existe una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ tal que, para $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, la restricción de $\gamma$ al intervalo $[t_{k-1}, t_k]$ es una función de clase $C^1$

## Ejemplo de camino

Dados $n \in \mathbb{N}$ y $z_0, z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$, llamamos poligonal de vértices $z_0, z_1, \ldots, z_n$ al camino dado por $[z_0, z_1, \ldots, z_n] \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{k=1}^{n} [z_{k-1}, z_k]$

# Definición de la integral curvilínea

## Integral sobre un arco

Sea $\sigma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un arco y $f : \sigma^* \to \mathbb{C}$ una función continua.

La integral de $f$ sobre el arco $\sigma$ viene dada por

$$\int_\sigma f(z)\,dz \stackrel{\text{def}}{=} \int_a^b f\big(\sigma(t)\big)\,\sigma'(t)\,dt$$

## Integral sobre un camino

Sea $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ un camino y $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ una función continua. Consideremos una partición $P = \{a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b\}$ de $[a,b]$ tal que, para $k = 1,2,\ldots,n$, la función $\gamma_k = \gamma\big|_{[t_{k-1},t_k]}$ sea de clase $C^1$.

La integral de $f$ sobre el camino $\gamma$ viene dada por:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\gamma_k} f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{t_{k-1}}^{t_k} f\big(\gamma_k(t)\big)\,\gamma_k'(t)\,dt$$

Esta definición es correcta:
la suma del segundo miembro no depende de la partición $P$ que usemos

# Observaciones y notación

## Expresión más cómoda para la integral sobre un camino

Sea $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ un camino expresado como suma de arcos.

Para toda función continua $f : \gamma^* \to \mathbb{C}$ se tiene:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = \sum_{k=1}^{n} \int_{\sigma_k} f(z)\,dz$$

## Notación para las propiedades de la integral

Dado un camino $\gamma$, consideramos el espacio de Banach $C(\gamma^*)$ de todas las funciones continuas del compacto $\gamma^*$ en $\mathbb{C}$, con norma

$$\|f\|_\infty = \max\{|f(z)| : z \in \gamma^*\} \qquad \forall f \in C(\gamma^*)$$

# Propiedades de la integral curvilínea (I)

## Linealidad

Si $\gamma$ es un camino, $f, g \in C(\gamma^*)$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\int_\gamma \big(\alpha f(z) + \beta g(z)\big)\, dz = \alpha \int_\gamma f(z)\, dz + \beta \int_\gamma g(z)\, dz$$

## Longitud de un camino

La longitud de un arco $\sigma : [c,d] \to \mathbb{C}$ se define por: $l(\sigma) = \int_c^d |\sigma\,'(t)|\, dt$

Por ejemplo, para $z, w \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$ se tiene:

$$l\big([z,w]\big) = |w - z| \qquad \text{y} \qquad l\big(C(z,r)\big) = 2\pi r$$

La longitud de un camino $\gamma = \sum_{k=1}^{n} \sigma_k$ (suma de arcos), será:

$$l(\gamma) = \sum_{k=1}^{n} l(\sigma_k)$$

# Propiedades de la integral curvilínea (II)

## Continuidad

Dado un camino $\gamma$, se tiene:

$$\left| \int_\gamma f(z)\,dz \right| \leqslant \; l(\gamma)\; \|f\|_\infty \qquad\qquad \forall f \in C(\gamma^*)$$

luego la integral sobre $\gamma$ es un funcional lineal continuo en $C(\gamma^*)$

## Consecuencia de la linealidad y la continuidad

Sea $\gamma$ un camino y $f_n \in C(\gamma^*)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Si la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge uniformemente en $\gamma^*$, entonces:

$$\int_\gamma \left( \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \right) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \int_\gamma f_n(z)\,dz$$

# Propiedades de la integral curvilínea (III)

## Aditividad

- Si $\gamma, \varphi$ son caminos y el extremo de $\gamma$ es el origen $\varphi$, para toda función $f \in C\big((\gamma+\varphi)^*\big) = C\big(\gamma^* \cup \varphi^*\big)$, se tiene:

$$\int_{\gamma+\varphi} f(z)\,dz = \int_{\gamma} f(z)\,dz + \int_{\varphi} f(z)\,dz$$

- Para todo camino $\gamma$ y toda función $f \in C\big(\gamma^*\big) = C\big((-\gamma)^*\big)$ se tiene:

$$\int_{-\gamma} f(z)\,dz = -\int_{\gamma} f(z)\,dz$$

# Regla de Barrow para la integral curvilínea

## Regla de Barrow

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ , \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Supongamos que $f$ tiene primitiva, es decir,

$$\exists\ F \in \mathcal{H}(\Omega)\ :\ F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Si un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ verifica que $\gamma^* \subset \Omega$, entonces:

$$\int_\gamma f(z)\,dz = F\big(\gamma(b)\big) - F\big(\gamma(a)\big)$$

## Nota

Si $\Omega$ es un abierto de $\mathbb{C}$ y un camino $\gamma : [a,b] \to \mathbb{C}$ verifica que $\gamma^* \subset \Omega$, diremos que $\gamma$ es un camino en $\Omega$.

# Existencia de primitiva

## Teorema: Caracterización de la existencia de primitiva

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \,, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- $f$ tiene primitiva: $\exists\, F \in \mathcal{H}(\Omega) \,:\, F'(z) = f(z) \quad \forall z \in \Omega$
- Para todo camino cerrado $\gamma$ en $\Omega$ se tiene que $\displaystyle\int_\gamma f(z)\,dz = 0$.

## Lema de construcción de primitivas

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \,, \quad f \in \mathcal{C}(\Omega)$$

Sea $F : \Omega \to \mathbb{C}$ una función verificando la siguiente condición: para cada $a \in \Omega$ existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y

$$F(z) = F(a) + \int_{[a,z]} f(w)\,dw \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Entonces $F \in \mathcal{H}(\Omega)$ y $F'(z) = f(z) \;\; \forall z \in \Omega$.