Variable Compleja I
Tema 9: Ceros de las funciones holomorfas

Desigualdades de Cauchy y CONSECUENCIAS

Desigualdades de Cauchy

$$\Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega), \quad a \in \Omega, \quad r \in \mathbb{R}^+, \quad \overline{D}(a,r) \subset \Omega$$

$$M(f,a,r) = \max \left\{ |f(z)| : z \in C(a,r)^* \right\}$$

Entonces se tiene: $\dfrac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \dfrac{M(f,a,r)}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$

Teorema de Liouville

Toda función entera y acotada es constante

De hecho, si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ no es constante, entonces: $\overline{f(\mathbb{C})} = \mathbb{C}$

Teorema Fundamental del Álgebra

El cuerpo de los números complejos es algebraicamente cerrado:

$$P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad P \text{ no constante} \quad \Longrightarrow \quad \exists z_0 \in \mathbb{C} \ : \ P(z_0) = 0$$

Motivación: ceros de polinomios

Ceros de un polinomio y orden de un cero

$$P \in \mathcal{P}(\mathbb{C}), \quad P \quad \text{no constante:} \quad Z(P) = \{a \in \mathbb{C} : P(a) = 0\}$$

- $Z(P)$ es un conjunto no vacío y finito
- Para cada $a \in Z(P)$ existe un único $m \in \mathbb{N}$ tal que:

  $$P(z) = (z-a)^m Q(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad \text{donde} \quad Q \in \mathcal{P}(\mathbb{C}) \quad \text{y} \quad Q(a) \neq 0$$

  Decimos que P tiene en a un cero de orden m

- El orden se caracteriza por: $m = \min\{n \in \mathbb{N} : P^{(n)}(a) \neq 0\}$, es decir,

  $$P(a) = P'(a) = \ldots = P^{(m-1)}(a) = 0 \quad \text{y} \quad P^{(m)}(a) \neq 0$$

Ceros de funciones holomorfas

Ceros de una función holomorfa y orden de un cero

$$\Omega \text{ dominio}, \quad f \in \mathcal{H}(\Omega) \quad \text{no idénticamente nula}$$

$$Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$$

- Orden de un cero: Para cada $a \in Z(f)$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(a) \neq 0$.

  El orden del cero de f en a es: $m = \min\{n \in \mathbb{N} : \ f^{(n)}(a) \neq 0\}$

- Caracterización: $a \in \Omega$ es un cero de orden $m \in \mathbb{N}$ si, y sólo si,

$$\exists g \in \mathcal{H}(\Omega) \ : \ g(a) \neq 0 \quad \text{y} \quad f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

- Principio de los ceros aislados:

$$\forall a \in Z(f) \ \ \exists \delta > 0 \ : \ D(a,\delta) \subset \Omega \quad \text{y} \quad f(z) \neq 0 \ \ \forall z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$$

  Equivalentemente, $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω:

$$Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$$

Consecuencia

Algunas cuestiones topológicas

- En cualquier espacio métrico X, la distancia a un conjunto no vacío $E \subset X$ es una función no expansiva:

$$d(x,E) = \inf\{d(x,y) : y \in E\} \quad \forall x \in X. \text{ Se tiene:}$$

$$|d(x_1,E) - d(x_2,E)| \leqslant d(x_1,x_2) \quad \forall x_1,x_2 \in X$$

- Todo abierto Ω de $\mathbb{C}$ es unión numerable de compactos:

$$\mathbb{C} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{D}(0,n); \quad \Omega \neq \mathbb{C} \implies \Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{z \in \mathbb{C} : |z| \leqslant n, \quad d(z,\mathbb{C}\setminus\Omega) \geqslant 1/n\}$$

- Todo subconjunto infinito de un espacio métrico compacto tiene al menos un punto de acumulación.

- $\emptyset \neq A \subset \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}, \quad A' \cap \Omega = \emptyset \implies A$ numerable

Corolario

Si Ω es un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ no es idénticamente nula, entonces $Z(f) = \{z \in \Omega : f(z) = 0\}$ es numerable

Principio de identidad

Teorema

$$\Omega \text{ dominio}, \quad f,g \in \mathcal{H}(\Omega)$$

$$A \subset \Omega, \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in A$$

$$A' \cap \Omega \neq \emptyset \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

$$\text{En particular, } A \text{ no numerable} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \Omega$$

Ejemplo

$$f,g \in \mathcal{H}(\mathbb{C}), \quad f(1/n) = g(1/n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad f(z) = g(z) \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

La exponencial compleja es la única extensión entera de la real