

Variable Compleja I
Tema 1: Números complejos

① El cuerpo de los números complejos

② Conjugación y módulo

③ Argumentos

El cuerpo de los números complejos

El cuerpo \mathbb{C}

$$\mathbb{R}^2 = \{(x, y) : x, y \in \mathbb{R}\}$$

- Suma: $(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v) \quad \forall x, y, u, v \in \mathbb{R}$
- Producto por escalares: $\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) \quad \forall \lambda, x, y \in \mathbb{R}$
- Producto: $(x, y)(u, v) = (xu - yv, xv + yu) \quad \forall x, y, u, v \in \mathbb{R}$
- \mathbb{R}^2 con la operación suma es un grupo abeliano
- El producto es asociativo, conmutativo y distributivo respecto a la suma
- $(x, y)(1, 0) = (x, y) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$
- $(x, y) \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right) = (1, 0) \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

Por tanto, con las dos operaciones tenemos un cuerpo conmutativo:

El cuerpo de los números complejos, que se denota por \mathbb{C}

Como conjuntos: $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Inclusión de \mathbb{R} en \mathbb{C}

- $x \mapsto (x, 0)$, de \mathbb{R} en \mathbb{C} , monomorfismo de cuerpos.

Por tanto, $\mathbb{R} \cong \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C}$

Identificamos $\mathbb{R} \ni x \equiv (x, 0) \in \mathbb{C}$ con lo que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

- El producto por escalares en \mathbb{R}^2 es caso particular del producto en \mathbb{C} :

$$\lambda(x, y) = (\lambda x, \lambda y) = (\lambda, 0)(x, y)$$

Partes real e imaginaria de un número complejo

Base usual de \mathbb{R}^2 : $(1, 0) \equiv 1$ y $(0, 1) \stackrel{\text{def}}{=} i$

$$(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1) = x + yi$$

Cada $z \in \mathbb{C}$ se escribe de manera única como $z = x + iy$ con $x, y \in \mathbb{R}$

- x es la parte real de z : $x = \operatorname{Re} z$
- y es la parte imaginaria de z : $y = \operatorname{Im} z$

Operaciones con parte real e imaginaria

$$z, w \in \mathbb{C}, \quad z = x + iy, \quad w = u + iv, \quad x, y, u, v \in \mathbb{R}$$

Suma

$$z + w = (x + iy) + (u + iv) = (x + u) + i(y + v)$$

$$\operatorname{Re}(z + w) = \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w$$

$$\operatorname{Im}(z + w) = \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w$$

Producto

Basta tener en cuenta que $i^2 = (0, 1)(0, 1) = (-1, 0) = -1$

$$zw = (x + iy)(u + iv) = xu + xiv + iyu + i^2 yv = (xu - yv) + i(xv + yu)$$

$$\operatorname{Re}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w$$

$$\operatorname{Im}(zw) = \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w$$

Conjugación

Complejo conjugado

$$\bar{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \bar{z} = \frac{z + \bar{z}}{2}, \quad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \bar{z} = \frac{z - \bar{z}}{2i}$$

Propiedades de la conjugación

- $\overline{z + w} = \bar{z} + \bar{w}$
- $\overline{zw} = \bar{z} \bar{w}$
- $\overline{\bar{z}} = z$

Automorfismo involutivo del cuerpo \mathbb{C}

Módulo de un número complejo

Módulo de un número complejo

$$|z| = (z\bar{z})^{1/2} = ((\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2)^{1/2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Propiedades del módulo

- $|z| \in \mathbb{R}_0^+ \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|z| = 0 \iff z = 0$
- $||z| - |w|| \leq |z \pm w| \leq |z| + |w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$
- $\max\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\} \leq |z| \leq |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z| \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $|zw| = |z||w| \quad \forall z, w \in \mathbb{C}$

Argumentos

Argumentos de un número complejo no nulo

$$z \in \mathbb{C}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

$$\text{Arg } z = \{ \theta \in \mathbb{R} : z = |z| (\cos \theta + i \operatorname{sen} \theta) \}$$

Equivalentemente, para $z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \mathbb{R}$ se tiene:

$$\theta \in \text{Arg } z \iff \begin{cases} \cos \theta = \operatorname{Re} z / |z| \\ \operatorname{sen} \theta = \operatorname{Im} z / |z| \end{cases}$$

Relación entre ellos

$$z \in \mathbb{C}^*, \theta_1, \theta_2 \in \text{Arg } z \implies \exists k \in \mathbb{Z} : \theta_2 = \theta_1 + 2k\pi$$

Por tanto:

$$\theta \in \text{Arg } z \implies \text{Arg } z = \{ \theta + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

El argumento principal

Argumento principal

Para cada $z \in \mathbb{C}^*$, existe un único argumento de z que pertenece al intervalo semiabierto $] -\pi, \pi]$.

Se le llama **argumento principal** de z y se denota por **arg z** .

De hecho se tiene:

$$\arg z = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \arccos \left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \right) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

entendiendo que $\operatorname{sgn}(0) = 1$.

A partir del argumento principal obtenemos los demás:

$$\operatorname{Arg} z = \{ \arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \}$$

Argumento de un producto

Planteamiento algebraico:

$2\pi\mathbb{Z} = \{2k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ es un subgrupo aditivo de \mathbb{R}

Considerando el grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, es claro que

$$\text{Arg } z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

luego tenemos una aplicación (sobreyectiva) $\text{Arg} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Propiedad clave del conjunto de todos los argumentos

Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\text{Arg}(zw) = \text{Arg } z + \text{Arg } w = \{ \theta + \varphi : \theta \in \text{Arg } z, \varphi \in \text{Arg } w \}$$

Así pues, $\text{Arg} : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es un epimorfismo de grupos

Restringido a $\mathbb{T} \stackrel{\text{def}}{=} \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ es un isomorfismo: $\mathbb{T} \cong \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$

Argumento de un producto (cont.)

Consecuencias

- $\text{Arg}(z/w) = \text{Arg } z - \text{Arg } w \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$
- $\text{Arg}(1/z) = \text{Arg } \bar{z} = -\text{Arg } z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$

Inconvenientes de elegir un argumento

- Para $z = w = -1$ se tiene $\arg z + \arg w = 2\pi \neq 0 = \arg(zw)$
- No existe una función $\varphi: \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{R}$ que verifique $\varphi(z) \in \text{Arg } z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$ y $\varphi(zw) = \varphi(z) + \varphi(w) \quad \forall z, w \in \mathbb{C}^*$

Argumento de un producto (cont.)

Interpretación geométrica del producto

- Dado $u \in \mathbb{T}$, la aplicación $z \rightarrow uz$ es el **giro** de ángulo $\theta = \arg u$:

$$|uz| = |z|, \arg u + \arg z \in \text{Arg}(uz) \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

- Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$ la aplicación $z \rightarrow \rho z$ es la **homotecia** de razón ρ :

$$|\rho z| = \rho |z|, \arg(\rho z) = \arg z \quad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

- Por tanto, dado $w \in \mathbb{C}^*$, la aplicación $z \rightarrow wz$ es composición de la homotecia de razón $\rho = |w|$ con el giro de ángulo $\theta = \arg w$.