Variable Compleja I
Tema 3: Funciones holomorfas

Derivada

Definición de derivada

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f \in \mathcal{F}(A)$, $a \in A \cap A'$

Definimos $f_a : A \setminus \{a\} \to \mathbb{C}$ por: $f_a(z) = \dfrac{f(z) - f(a)}{z - a} \quad \forall z \in A \setminus \{a\}$

Decimos que f es derivable en el punto a cuando f_a tiene límite en a

En tal caso, la derivada de f en a viene dada por:

$$f'(a) = \lim_{z \to a} f_a(z) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$$

Si $\emptyset \neq B \subset A \cap A'$, f es derivable en B cuando lo es en todo punto de B.

Sea ahora $A_1 = \{z \in A \cap A' \; : \; f \text{ es derivable en } z\}$.

La función $z \to f'(z)$ es la función derivada de f :

$$f' : A_1 \to \mathbb{C} \, , \quad f'(z) = \lim_{w \to z} \frac{f(w) - f(z)}{w - z} \quad \forall z \in A_1$$

Primeras observaciones

Relación con la continuidad

$$f \;\text{ derivable en }\; a \;\Longrightarrow\; f \;\text{ continua en }\; a$$

Carácter local

$$B \subset A \;,\; b \in B \cap B'$$

$$f \text{ derivable en } b \;\Longrightarrow\; f\big|_B \text{ derivable en } b \text{ con } \left(f\big|_B\right)'(b) = f'(b)$$

$$\left.\begin{array}{r} f\big|_B \text{ derivable en } b \\ \exists\delta > 0 : D(b,\delta) \cap A \subset B \end{array}\right\} \;\Longrightarrow\; f \text{ derivable en } b$$

Funciones de variable real

- Para funciones reales de variable real, la definición de derivada recién introducida coincide con la que ya conocíamos
- Supongamos $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{C}$ y $a \in A \cap A'$. Entonces f es derivable en a si, y sólo si, $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son derivables en a, en cuyo caso:
$$f'(a) = \big(\operatorname{Re} f\big)'(a) + i\,\big(\operatorname{Im} f\big)'(a)$$

Ecuaciones de Cauchy-Riemann

Teorema

$$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C} \ (\equiv \mathbb{R}^2) \ , \quad f \in \mathcal{F}(A)$$

Sean $u, v : A \to \mathbb{R}$ las funciones definidas, para todo $(x,y) \in A$, por

$$u(x,y) = \operatorname{Re} f(x+iy) \qquad \text{y} \qquad v(x,y) = \operatorname{Im} f(x+iy)$$

Para $z_0 = (x_0, y_0) \in A^\circ$, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) f es derivable en el punto z_0

(ii) u y v son diferenciables en el punto (x_0, y_0), verificando que

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Caso de que se cumplan (i) y (ii), se tiene:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Observaciones

Observaciones

Las igualdades que aparecen en la afirmación (*ii*) del teorema anterior se conocen como ecuaciones de Cauchy-Riemann. Cuando A es abierto y f es derivable en A, las funciones u y v son soluciones de un sistema de ecuaciones en derivadas parciales:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad \text{y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

Usando dichas ecuaciones, la derivada $f'(z_0)$ puede expresarse de cuatro formas, en términos de las derivadas parciales de u y v. Concretamente:

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} - i\,\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial y} + i\,\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} - i\,\frac{\partial u}{\partial y}$$

entendiendo que todas las derivadas parciales se evalúan en el punto (x_0, y_0).

Ejemplos

Un ejemplo negativo

$$f(z) = \operatorname{Re} z \quad \forall z \in \mathbb{C}\ ; \quad u(x,y) = x \quad \text{y} \quad v(x,y) = 0 \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x,y) = 1 \neq 0 = \frac{\partial v}{\partial y}(x,y) \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

¡¡ f no es derivable en ningún punto del plano !!

Un ejemplo positivo

La función exponencial: $\quad f(z) = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

$$u(x,y) = e^x \cos y \quad \text{y} \quad v(x,y) = e^x \operatorname{sen} y \quad \forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

u, v son diferenciables en $\mathbb{R}^2$ con $\dfrac{\partial u}{\partial x} = u = \dfrac{\partial v}{\partial y}$ y $\dfrac{\partial u}{\partial y} = -v = -\dfrac{\partial v}{\partial x}$

luego f es derivable en $\mathbb{C}$ con $f' = \dfrac{\partial u}{\partial x} + i\,\dfrac{\partial v}{\partial x} = u + iv = f$

Operaciones algebraicas

Ejemplos obvios

- $\lambda \in \mathbb{C}, f(z) = \lambda \ \ \forall z \in \mathbb{C} \implies f'(z) = 0 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$
- $f(z) = z \ \ \forall z \in \mathbb{C} \implies f'(z) = 1 \ \ \forall z \in \mathbb{C}$

Sumas, productos y cocientes

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$, $f, g \in \mathcal{F}(A)$, derivables en un punto $a \in A \cap A'$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Entonces:

- $f + g$ es derivable en a con $\big(f+g\big)'(a) = f'(a) + g'(a)$
- $f\,g$ es derivable en a con $\big(f\,g\big)'(a) = f'(a)\,g(a) + f(a)\,g'(a)$
- λf es derivable en a con $\big(\lambda f\big)'(a) = \lambda f'(a)$
- Suponiendo que $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces f/g es derivable en a con

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)\,g(a) - f(a)\,g'(a)}{g(a)^2}$$

Polinomios

Potencias de exponente natural

Fijado $n \in \mathbb{N}$ sea $f \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ dada por: $\quad f_n(z) = z^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$.

Entonces f_n es derivable en $\mathbb{C}$ con: $\quad f_n'(z) = n\, z^{n-1} \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Polinomios

$\emptyset \neq A \subset \mathbb{C}$. Decimos que $P \in \mathcal{F}(A)$ es una función polinómica cuando existen $n \in \mathbb{N}$ y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ tales que

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k \quad \forall z \in A$$

Entonces P es derivable en $A \cap A'$ y su derivada es la función polinómica dada por

$$P'(z) = \sum_{k=1}^{n} k\, \alpha_k z^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\, \alpha_{k+1} z^k \qquad \forall z \in A \cap A'$$

Funciones racionales y regla de la cadena

Funciones racionales

$f \in \mathcal{F}(A)$ es una función racional cuando existen funciones polinómicas $P, Q \in \mathcal{F}(A)$ tales que:

$$Q(z) \neq 0 \qquad \text{y} \qquad f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)} \qquad \forall z \in A$$

Entonces f es derivable en $A \cap A'$ y su derivada $f' : A \cap A' \to \mathbb{C}$ es otra función racional.

Regla de la cadena

Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{F}(A)$ una función derivable en un punto $a \in A \cap A'$.
Supongamos que $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$, que $f(a) \in B'$ y que $g \in \mathcal{F}(B)$ es derivable en el punto $f(a)$.
Entonces $g \circ f$ es derivable en a con

$$(g \circ f)'(a) = g'\big(f(a)\big)\, f'(a)$$

Funciones holomorfas

Definición

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}\ , \quad f \in \mathcal{F}(\Omega)$$

f es holomorfa en Ω cuando es derivable en todo punto de Ω

El conjunto de todas las funciones holomorfas en Ω se denota por $\mathcal{H}(\Omega)$

Observaciones

- Las funciones holomorfas son continuas, pero el recíproco es falso:

$$\mathcal{H}(\Omega) \subsetneqq \mathcal{C}(\Omega) \subsetneqq \mathcal{F}(\Omega)$$

- La holomorfía es una propiedad local: Supongamos que $\Omega = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ donde Λ es un conjunto no vacío arbitrario y U_λ es un abierto no vacío de $\mathbb{C}$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea f_λ la restricción de f a U_λ. Entonces:

$$f \in \mathcal{H}(\Omega) \iff f_\lambda \in \mathcal{H}(U_\lambda) \quad \forall \lambda \in \Lambda$$

Operaciones con funciones holomorfas

Operaciones algebraicas y regla de la cadena

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$$

$\mathcal{H}(\Omega)$ es un subanillo y un subespacio vectorial de $\mathcal{C}(\Omega)$

$f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$, $g(\Omega) \subset \mathbb{C}^* \implies f/g \in \mathcal{H}(\Omega)$

$\mathcal{P}(\Omega)$ funciones polinómicas en Ω ; $\mathcal{R}(\Omega)$ funciones racionales en Ω

$$\mathcal{P}(\Omega) \subset \mathcal{R}(\Omega) \subset \mathcal{H}(\Omega) \subset \mathcal{C}(\Omega) \subset \mathcal{F}(\Omega)$$

La restricción a Ω de la exponencial nunca es una función racional, luego

$$\mathcal{R}(\Omega) \subsetneq \mathcal{H}(\Omega)$$

$f \in \mathcal{H}(\Omega)$, $f(\Omega) \subset U = U^\circ \subset \mathbb{C}$, $g \in \mathcal{H}(U) \implies g \circ f \in \mathcal{H}(\Omega)$

Funciones enteras

Una funci on entera es una función holomorfa en todo el plano. Por tanto $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es el conjunto de todas las funciones enteras.

La exponencial es una función entera no polinómica, luego

$$\mathcal{R}(\mathbb{C}) \overset{!!}{=} \mathcal{P}(\mathbb{C}) \subsetneq \mathcal{H}(\mathbb{C})$$

¿ Teorema del Valor Medio ?

Ejemplos

Para funciones complejas no hay un teorema de Rolle o del valor medio:

Una función de variable real: $g(y) = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \forall y \in \mathbb{R}$

- Es derivable en $\mathbb{R}$
- $g(0) = g(2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $g'(y) = ig(y) \forall y \in \mathbb{R}$ luego $|g'(y)| = |g(y)| = 1 \quad \forall y \in \mathbb{R}$

La exponencial: $f(z) = e^{\operatorname{Re} z}\big(\cos(\operatorname{Im} z) + i \operatorname{sen}(\operatorname{Im} z)\big) \quad \forall z \in \mathbb{C}$

- $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$
- $f(0) = f(2k\pi i) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$
- $|f'(z)| = |f(z)| = e^{\operatorname{Re} z} > 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$

Funciones con derivada nula

Dominios

Un dominio es un subconjunto no vacío, abierto y conexo del plano

Funciones con derivada nula

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ tal que $f'(z) = 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Entonces f es constante.

Consecuencias

Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$.

- Si $\operatorname{Re} f$ es constante, entonces f es constante
- Si $\operatorname{Im} f$ es constante, entonces f es constante
- Si $|f|$ es constante, entonces f es constante

Caso de un abierto no conexo

Ejemplo

Supongamos que $\Omega = U \cup V$ donde U, V son abiertos, no vacíos, disjuntos

$$f(z) = 1 + i \quad \forall z \in U \quad \text{y} \quad f(z) = 1 - i \quad \forall z \in V$$

- $f \in \mathcal{H}(\Omega)$
- $f'(z) = 0 \quad \forall z \in \mathbb{C}$
- $\operatorname{Re} f$ y $|f|$ son constantes
- Pero f no es constante

Componentes conexas de un abierto

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C}$$

- Las componentes conexas de Ω son dominios
- El conjunto de las componentes conexas de Ω es numerable

Generalización de los resultados anteriores

Caso de un abierto no conexo

$$\emptyset \neq \Omega = \Omega^\circ \subset \mathbb{C} \quad \text{y} \quad f \in \mathcal{H}(\Omega)$$

Si $f'(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$

o bien cualquiera de las funciones $\operatorname{Re} f$, $\operatorname{Im} f$ o $|f|$ es constante,

entonces f es constante en cada componente conexa de Ω

y por tanto $f(\Omega)$ es numerable