Tema 1

Números complejos

Como primer paso para el estudio de las funciones de variable compleja, debemos presentar el cuerpo de los números complejos. De entre los muchos métodos que permiten introducirlo, usaremos el más directo, aunque no sea el más intuitivo. Estudiaremos entonces la definición y las propiedades básicas del módulo y los argumentos de un número complejo.

1.1. El cuerpo de los números complejos

Para definir los números complejos, partimos del conjunto $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x,y \in \mathbb{R}\}$, que sabemos tiene estructura de espacio vectorial sobre $\mathbb{R}$, con las operaciones de suma y producto por escalares definidas por

(a) $(x,y)+(u,v)=(x+u,y+v) \qquad \forall\, x,y,u,v \in \mathbb{R}$
(b) $\lambda(x,y)=(\lambda x,\lambda y) \qquad \forall\, \lambda,x,y \in \mathbb{R}$

Olvidando por un momento el producto por escalares, vemos $\mathbb{R}^2$ como un grupo aditivo, en el que definimos una segunda operación, llamada *producto* y denotada por yuxtaposición:

(c) $(x,y)(u,v)=(xu-yv,xv+yu) \qquad \forall\, x,y,u,v \in \mathbb{R}$

Se comprueba rutinariamente que este producto es asociativo, conmutativo y distributivo con respecto a la suma. Es claro también que $(1,0)$ es elemento neutro para el producto. Además, dado $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ con $(x,y) \neq (0,0)$, tenemos $x^2+y^2>0$ y comprobamos enseguida que

$$(x,y)\left(\frac{x}{x^2+y^2}\,,\,\frac{-y}{x^2+y^2}\right)=(1,0)$$

es decir, (x,y) tiene un elemento simétrico respecto del producto. En resumen:

- $\mathbb{R}^2$, *con la suma y producto definidos en* **(a)** *y* **(c)**, *es un cuerpo conmutativo, al que llamamos* **cuerpo de los números complejos** *y denotamos por* $\mathbb{C}$.

Así pues, $\mathbb{C}$ y $\mathbb{R}^2$ son el mismo conjunto, lo que los diferencia es la estructura que en dicho conjunto consideramos. Cuando lo vemos como un espacio vectorial, y sus elementos como vectores, estamos pensando en $\mathbb{R}^2$, mientras que, cuando lo vemos como un cuerpo, estamos pensando en $\mathbb{C}$, cuyos elementos son los **números complejos**.

Pensemos ahora en la aplicación $x \mapsto (x,0)$, de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{C}$, que claramente es inyectiva. Es evidente que esta aplicación conserva sumas y productos, luego es un monomorfismo de cuerpos. Por tanto, su imagen es un subcuerpo de $\mathbb{C}$ isomorfo a $\mathbb{R}$. Podemos pues, para cada $x \in \mathbb{R}$, identificar x con $(x,0)$ y ver cada número real como un número complejo. Así lo haremos siempre a partir de ahora, entendiendo por tanto que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Esto hace que para $x \in \mathbb{R}$ y $z \in \mathbb{C}$ tengan sentido $x+z$ y xz como suma y producto de números complejos.

Recuperemos ahora el producto por escalares en $\mathbb{R}^2$: $\lambda(x,y)$ es el producto del escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ por el vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, pero acabamos de identificar λ con el número complejo $(\lambda,0)$, que podemos multiplicar por el número complejo (x,y). Observamos que ambos productos coinciden:

$$(\lambda,0)(x,y) = (\lambda x, \lambda y) = \lambda(x,y)$$

Así pues, asumida la inclusión $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, el producto por escalares definido en **(b)** queda como caso particular del producto de números complejos definido en **(c)**. Enseguida aprovechamos esta idea para conseguir una descripción más cómoda de los números complejos, que también permite recordar fácilmente la definición del producto en $\mathbb{C}$.

Los vectores $(1,0)$ y $(0,1)$ forman, como bien sabemos, una base de $\mathbb{R}^2$. La expresión de cada vector $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ como combinación lineal de los elementos de esa base es bien obvia. Para traducirla al lenguaje de los números complejos, pensemos que el número complejo $(1,0)$ se ha identificado con el número real 1 y pongamos $i=(0,1)$. Tenemos por tanto que cada número complejo $z=(x,y)$ se expresa de manera única en la forma

$$z = (x,y) = x(1,0) + y(0,1) = x1 + yi = x + iy$$

con $x,y \in \mathbb{R}$. Lo interesante es que, en el último miembro de esta igualdad, sólo aparecen las operaciones del cuerpo $\mathbb{C}$. El resultado era bastante evidente, pero nos da la descripción cómoda de los números complejos que buscábamos. Además nos da pie para introducir el nombre con el que se designan las dos componentes de cada número complejo.

- *Cada $z \in \mathbb{C}$ se expresa de manera única como $z = x + iy$ con $x,y \in \mathbb{R}$, donde $i=(0,1)$. Se dice que x es la* **parte real** *del número complejo z, y escribimos $x = \operatorname{Re} z$, mientras que y es la* **parte imaginaria** *de z que se denota por $y = \operatorname{Im} z$. En particular, $z \in \mathbb{R}$ si y sólo si,* $\operatorname{Im} z = 0$. *Cuando* $\operatorname{Re} z = 0$ *decimos que z es un número imaginario puro.*

Tenemos ahora una notación que permite distinguir entre números complejos y vectores de $\mathbb{R}^2$. Un número complejo z suele escribirse siempre en la forma $z = x + iy$ con $x = \operatorname{Re} z$ e $y = \operatorname{Im} z$, sólo escribimos $z = (x,y)$ cuando queremos ver z como vector de $\mathbb{R}^2$. Recordar ahora el producto de números complejos es bien fácil, sólo debemos recordar que $\mathbb{C}$ es un cuerpo conmutativo que contiene a $\mathbb{R}$, y un caso muy particular de **(c)**: $i^2 = -1$. Entonces, para cualesquiera $x,y,u,v \in \mathbb{R}$, recuperamos la igualdad **(c)**:

$$(x+iy)(u+iv) = xu + i(xv + yu) + i^2 yv = xu - yv + i(xv + yu)$$

Las definiciones de suma y producto de números complejos se traducen en propiedades de las funciones *parte real* y *parte imaginaria*, es decir, las funciones $z \mapsto \operatorname{Re} z$ y $z \mapsto \operatorname{Im} z$, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{R}$. Concretamente, es claro que para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(z+w) &= \operatorname{Re} z + \operatorname{Re} w\,; \qquad & \operatorname{Re}(zw) &= \operatorname{Re} z \operatorname{Re} w - \operatorname{Im} z \operatorname{Im} w \\ \operatorname{Im}(z+w) &= \operatorname{Im} z + \operatorname{Im} w\,; \qquad & \operatorname{Im}(zw) &= \operatorname{Re} z \operatorname{Im} w + \operatorname{Im} z \operatorname{Re} w \end{aligned}$$

La interpretación geométrica de los números complejos no es otra que la de $\mathbb{R}^2$, es decir, $\mathbb{C}$ se interpreta geométricamente como el conjunto de los puntos de un plano, sólo cambiamos algunas expresiones para resaltar que vemos los puntos del plano como números complejos. Es por ello que, en vez del plano euclídeo, hablamos del *plano complejo*. Así pues, identificamos cada número complejo z con el punto del plano complejo que tiene abscisa $\operatorname{Re} z$ y ordenada $\operatorname{Im} z$. Al eje de abscisas, en el que aparecen los números reales, se le llama *eje real*, mientras que al eje de ordenadas se le llama *eje imaginario*, pues en él aparecen los números imaginarios puros. La interpretación geométrica de la suma de números complejos no ofrece dificultad, es la misma que la suma de vectores de $\mathbb{R}^2$, así que podemos usar la regla del paralelogramo. Dejamos para más adelante la interpretación geométrica del producto de números complejos.

1.2. Módulo

El módulo de un número complejo z es algo que conocemos bien: la norma euclídea de z, visto como vector de $\mathbb{R}^2$. Por tanto, algunas propiedades del módulo de un número complejo se obtendrán traduciendo directamente las propiedades de la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Pero ahora nos interesa la relación con el producto de números complejos, que será una grata sorpresa.

Antes de hacer con detalle la discusión anunciada, definimos una aplicación de $\mathbb{C}$ en sí mismo, llamada *conjugación*, que tiene una clara interpretación geométrica: es la simetría con respecto al eje real. Para cada $z \in \mathbb{C}$, el **conjugado** de z es el número complejo $\overline{z}$ definido por:

$$\overline{z} = \operatorname{Re} z - i \operatorname{Im} z$$

Operando con un número complejo y su conjugado, obtenemos sus partes real e imaginaria, pues para todo $z \in \mathbb{C}$, se tiene claramente:

$$\operatorname{Re} z = \operatorname{Re} \overline{z} = \frac{z + \overline{z}}{2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} z = -\operatorname{Im} \overline{z} = \frac{z - \overline{z}}{2i}$$

Comprobamos fácilmente varias propiedades de la *conjugación*, la aplicación $z \mapsto \bar{z}$, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, que geométricamente es, como hemos dicho, la simetría respecto del eje real. Se trata de un automorfismo involutivo del cuerpo $\mathbb{C}$, es decir, para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$, se tiene:

$$\overline{z+w} = \overline{z} + \overline{w}\,, \quad \overline{zw} = \overline{z}\,\overline{w}\,, \quad \overline{\overline{z}} = z$$

Para $z \in \mathbb{C}$ tenemos que $z\overline{z} = (\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2$ es un número real no negativo, cuya raíz cuadrada recibe el nombre de **módulo** del número complejo z y se denota por $|z|$. Así pues,

$$|z| = \big(z\bar{z}\big)^{1/2} = \big((\operatorname{Re} z)^2 + (\operatorname{Im} z)^2\big)^{1/2} \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

Nótese que el módulo de un número real coincide con su valor absoluto, así que la notación que usamos para el módulo de un número complejo es coherente con la inclusión $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Resumimos en un sólo enunciado las principales propiedades del módulo:

- *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}$ se tiene:*
  (i) $|z| \in \mathbb{R}_0^+$
  (ii) $|z| = 0 \iff z = 0$
  (iii) $\big||z| - |w|\big| \leqslant |z \pm w| \leqslant |z| + |w|$
  (iv) $\text{máx}\,\big\{|\operatorname{Re} z|, |\operatorname{Im} z|\big\} \leqslant |z| \leqslant |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$
  (v) $|zw| = |z|\,|w|$

Las cuatro primeras afirmaciones son propiedades bien conocidas de la norma euclídea en $\mathbb{R}^2$. Resaltamos (v), que involucra el producto de números complejos y refuerza la similitud del módulo de un número complejo con el valor absoluto de un número real. Su demostración es inmediata, usando una propiedad de la conjugación:

$$|zw|^2 = z\,w\,\overline{z\,w} = z\,w\,\overline{z}\,\overline{w} = |z|^2\,|w|^2$$

y basta extraer raíces cuadradas para obtener la igualdad buscada. ■

1.3. Argumentos de un número complejo

De las dos coordenadas polares de un punto de $\mathbb{R}^2$, hemos discutido ya el radio polar, que es el módulo del correspondiente número complejo. Consideramos ahora el ángulo polar, excluyendo lógicamente el origen de coordenadas. En lo sucesivo escribiremos:

$$\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} : z \neq 0\}$$

Pues bien, dado $z \in \mathbb{C}^*$, decimos que $\theta \in \mathbb{R}$ es **un argumento** de z cuando verifica que $z = |z|(\cos\theta + i \operatorname{sen}\theta)$ y denotamos por $\operatorname{Arg} z$ al conjunto de todos los argumentos de z:

$$\operatorname{Arg} z = \big\{\theta \in \mathbb{R} : z = |z|(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta)\big\}$$

Equivalentemente, para $\theta \in \mathbb{R}$ tenemos

$$\theta \in \operatorname{Arg} z \iff \cos\theta = \frac{\operatorname{Re} z}{|z|} \quad \text{y} \quad \operatorname{sen}\theta = \frac{\operatorname{Im} z}{|z|}$$

Para $z \in \mathbb{C}^*$ fijo, vamos a describir explícitamente el conjunto de sus argumentos. Para simplificar la notación escribimos $a = \operatorname{Re} z/|z|$ y $b = \operatorname{Im} z/|z|$, con lo que $a^2 + b^2 = 1$, y los argumentos de z son las soluciones $\theta \in \mathbb{R}$ de un sistema de dos ecuaciones:

$$\cos\theta = a \qquad \text{y} \qquad \operatorname{sen}\theta = b \tag{1}$$

La periodicidad del seno y el coseno nos dice que, si $\theta \in \operatorname{Arg} z$, entonces $\theta + 2k\pi \in \operatorname{Arg} z$ para todo $k \in \mathbb{Z}$. Recíprocamente, si $\theta, \varphi \in \operatorname{Arg} z$, la fórmula de adición para el coseno nos da

$$\cos(\varphi - \theta) = \cos\varphi \cos\theta + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\theta = a^2 + b^2 = 1$$

pero el coseno sólo toma el valor 1 en los múltiplos enteros de 2π, luego $\varphi = \theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. Así pues, tendremos todas las soluciones de (1) tan pronto como encontremos una.

Para buscarla, es lógico pensar en $\psi = \arccos a$, que es solución de la primera ecuación, pero entonces, para la segunda ecuación sólo tendremos $\operatorname{sen}^2 \psi = b^2$, es decir, $|\operatorname{sen}\psi| = |b|$. Como $\psi \in [0, \pi]$, tenemos también $\operatorname{sen}\psi \geqslant 0$, luego ψ es solución de (1) cuando $b \geqslant 0$. Si $b < 0$, tendremos $\operatorname{sen}\psi = -b$, la imparidad del seno nos dice que $\operatorname{sen}(-\psi) = b$ y la paridad del coseno que $\cos(-\psi) = a$, luego en este caso la solución buscada es $-\psi$. En cualquier caso tenemos una solución del sistema (1), dada por

$$\theta = \operatorname{sgn}(b) \arccos a$$

donde $\operatorname{sgn} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función signo, extendida a todo $\mathbb{R}$ definiendo $\operatorname{sgn}(0) = 1$. Nótese que en realidad, cuando $b = 0$ tanto ψ como $-\psi$ eran soluciones del sistema (1) y pueden darse dos casos, o bien $a = 1$, y entonces $\psi = -\psi = 0$, o bien $a = -1$, y entonces tenemos dos soluciones distintas, π y $-\pi$, de las que hemos preferido elegir π.

Cuando $b \neq 0$, tenemos $|a| < 1$, luego $0 < \arccos a < \pi$, es decir, $0 < |\theta| < \pi$. Para $b = 0$ hemos visto que $\theta = 0$ si $a = 1$ y $\theta = \pi$ si $a = -1$. Por tanto, en cualquier caso tenemos $-\pi < \theta \leqslant \pi$. De hecho θ es la única solución de (1) en el intervalo $]-\pi, \pi]$. En efecto, si φ es otra solución en dicho intervalo, sabemos que $\varphi = \theta + 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, pero de $\theta, \varphi \in]-\pi, \pi]$ deducimos que $-2\pi < \varphi - \theta < 2\pi$, luego $k = 0$ y $\varphi = \theta$. Resumimos en un sólo enunciado toda la discusión anterior, teniendo en cuenta la definición de a y b, y resaltando el argumento concreto de cada $z \in \mathbb{C}^*$ que hemos calculado explícitamente, para obtener todos los demás a partir de él.

- *Para cada $z \in \mathbb{C}^*$, existe un único argumento de z que pertenece al intervalo semiabierto $]-\pi, \pi]$. Se le llama* **argumento principal** *de z y se denota por $\arg z$. De hecho se tiene:*

$$\arg z = \operatorname{sgn}(\operatorname{Im} z) \arccos\left(\frac{\operatorname{Re} z}{|z|}\right) \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

entendiendo que $\operatorname{sgn} 0 = 1$. Se verifica además que

$$\operatorname{Arg} z = \{\arg z + 2k\pi : k \in \mathbb{Z}\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}^*$$

La interpretación geométrica de los argumentos de $z \in \mathbb{C}^*$ se comentó por adelantado. Son todas las medidas en radianes del ángulo polar determinado por el punto z, es decir, el ángulo orientado con vértice en el origen que va de la parte positiva del eje real (semieje real positivo) a la semirrecta que pasa por z. Como es lógico, cualesquiera dos de estas medidas difieren en un múltiplo entero de 2π. Al destacar el argumento principal hemos elegido una forma muy natural de medir dicho ángulo, como vamos a ver.

Tenemos $0 < \arg z < \pi$ cuando $\operatorname{Im} z > 0$ (semiplano superior) y $-\pi < \arg z < 0$ cuando $\operatorname{Im} z < 0$ (semiplano inferior). En el eje real es $\arg x = 0$ para $x \in \mathbb{R}^+$ y $\arg x = \pi$ para $x \in \mathbb{R}^-$. Todo ello es muy acorde con la intuición geométrica.

Para estudiar las propiedades de los argumentos, conviene observar que el conjunto $2\pi\mathbb{Z}$, de los múltiplos enteros de 2π, es un subgrupo del grupo aditivo abeliano $\mathbb{R}$, que da lugar al grupo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Para cada $z \in \mathbb{C}^*$, es claro que $\operatorname{Arg} z \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, concretamente $\operatorname{Arg} z$ es la clase de equivalencia a la que pertenece el argumento principal $\arg z$, o cualquier otro argumento de z. Podemos por tanto pensar en la aplicación $z \mapsto \operatorname{Arg} z$, de $\mathbb{C}^*$ en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$, cuya propiedad clave es la siguiente:

- *Para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:*

$$\operatorname{Arg}(zw) = \operatorname{Arg} z + \operatorname{Arg} w = \{\theta + \varphi : \theta \in \operatorname{Arg} z,\ \varphi \in \operatorname{Arg} w\}$$

Basta probar que si $\theta \in \operatorname{Arg} z$ y $\varphi \in \operatorname{Arg} w$, entonces $\theta + \varphi \in \operatorname{Arg}(zw)$. En efecto, tenemos claramente:

$$\begin{aligned} zw &= |z|\big(\cos\theta + i\operatorname{sen}\theta\big)|w|\big(\cos\varphi + i\operatorname{sen}\varphi\big) \\ &= |z||w|\big(\cos\theta\cos\varphi - \operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\varphi + i\operatorname{sen}\theta\cos\varphi + i\cos\theta\operatorname{sen}\varphi\big) \\ &= |zw|\big(\cos(\theta+\varphi) + i\operatorname{sen}(\theta+\varphi)\big) \end{aligned}$$

donde hemos usado una propiedad del módulo ya conocida y las fórmulas de adición para el coseno y el seno. ■

Resaltamos la interpretación algebraica del resultado anterior: la aplicación $z \mapsto \operatorname{Arg} z$ es un epimorfismo del grupo multiplicativo $\mathbb{C}^*$ sobre el grupo aditivo cociente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$. Para obtener un isomorfismo de grupos basta restringirlo a un subgrupo adecuado de $\mathbb{C}^*$: el grupo multiplicativo $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ resulta ser isomorfo a $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.

Como consecuencia obvia del resultado anterior, para $z, w \in \mathbb{C}^*$ se tiene:

$$\operatorname{Arg}\left(\frac{z}{w}\right) = \operatorname{Arg} z - \operatorname{Arg} w \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Arg}\left(\frac{1}{z}\right) = \operatorname{Arg}\bar{z} = -\operatorname{Arg} z$$

Conviene resaltar que todos los resultados anteriores dejan de ser válidos si, en vez del conjunto de todos los argumentos, usamos el argumento principal. Tomando $z = w = -1$, es claro que $\arg(zw) = 0 \neq 2\pi = \arg z + \arg w$ y también que $\arg(1/z) \neq -\arg z$. Se podría pensar que este problema se debe a una errónea elección del argumento principal, pero no es así. No podemos elegir un argumento de cada $z \in \mathbb{C}^*$ de forma que se cumplan las propiedades algebraicas que hemos probado para el conjunto de todos los argumentos. Más concretamente, si una aplicación $\varphi : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$ verifica que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, entonces φ no puede verificar la igualdad $\varphi(zw) = \varphi(z) + \varphi(w)$ para cualesquiera $z, w \in \mathbb{C}^*$, pues en tal caso, tomando $w = 1$ tendríamos $\varphi(1) = 0$, pero tomando entonces $z = w = -1$, obtendríamos que $0 = \varphi(-1) \in \operatorname{Arg}(-1)$, lo cual es absurdo.

Comentemos finalmente la interpretación geométrica del producto de números complejos. En primer lugar, dado $u \in \mathbb{T}$, esto es, $u \in \mathbb{C}$ con $|u| = 1$, describimos geométricamente la multiplicación por u, es decir, la aplicación $z \mapsto uz$, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$.

Para todo $z \in \mathbb{C}^*$, sabemos que $\arg u + \arg z \in \operatorname{Arg}(uz)$ y $|uz| = |z|$, luego el punto uz se obtiene al girar el punto z, haciendo centro en el origen, un ángulo de amplitud $\theta = \arg u$, en sentido positivo (contrario a las agujas del reloj) cuando $\theta > 0$ y negativo si $\theta < 0$. Así pues, la multiplicación por $u \in \mathbb{T}$ se interpreta geométricamente como un *giro* de ángulo $\theta = \arg u$.

Por otra parte la multiplicación por $\rho \in \mathbb{R}^+$, es decir, la aplicación $z \mapsto \rho z$, de $\mathbb{C}$ en $\mathbb{C}$, es la *homotecia* de razón ρ, cuya interpretación geométrica es bien conocida. Para todo $z \in \mathbb{C}^*$, tenemos $\arg(\rho z) = \arg z$ y $|\rho z| = \rho|z|$, luego los puntos z y ρz están situados en una misma semirrecta que parte del origen, de forma que el cociente entre sus distancias al origen es la razón de homotecia.

Finalmente, fijado $w \in \mathbb{C}^*$, podemos escribir $w = \rho u$, con $\rho \in \mathbb{R}^+$ y $u \in \mathbb{T}$, con lo que la multiplicación por w se obtiene como composición de la homotecia de razón $\rho = |w|$ con el giro de ángulo $\arg u = \arg w$. Es claro que esta interpretación permite construir gráficamente el producto de dos números complejos cualesquiera.

1.4. Ejercicios

1. Probar que el conjunto de matrices

$$M = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \,:\, a,b \in \mathbb{R} \right\}$$

   con las operaciones de suma y producto de matrices, es un cuerpo isomorfo a $\mathbb{C}$.

2. Calcular la parte real, la parte imaginaria y el módulo de los números complejos

$$\frac{i-\sqrt{3}}{1+i} \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{i\sqrt{3}-1}$$

3. Sea $U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Fijado $a \in U$, se considera la función $f : U \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \frac{z-a}{1-\overline{a}\,z} \qquad \forall z \in U$$

   Probar que f es una biyección de U sobre sí mismo y calcular su inversa.

4. Dados $z_1, z_2, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^*$, encontrar una condición necesaria y suficiente para que se verifique la siguiente igualdad:

$$\left| \sum_{k=1}^{n} z_k \right| = \sum_{k=1}^{n} |z_k|$$

5. Describir geométricamente los subconjuntos del plano dados por

$$A = \big\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z+i| = 2|z-i| \big\} \quad \text{y} \quad B = \big\{ z \in \mathbb{C} \,:\, |z-i| + |z+i| = 4 \big\}$$

6. Probar que $\arg z = 2\,\mathrm{arc\,tg}\left(\dfrac{\mathrm{Im}\, z}{\mathrm{Re}\, z + |z|}\right)$ para todo $z \in \mathbb{C}^* \setminus \mathbb{R}^-$.

7. Probar que, si $z = x + i\,y \in \mathbb{C}^*$, con $x, y \in \mathbb{R}$, se tiene

$$\arg z = \begin{cases} \mathrm{arc\,tg}\,(y/x) & \text{si } x > 0 \\ \mathrm{arc\,tg}\,(y/x) + \pi & \text{si } x < 0,\ y > 0 \\ \mathrm{arc\,tg}\,(y/x) - \pi & \text{si } x < 0,\ y < 0 \\ \pi/2 & \text{si } x = 0,\ y > 0 \\ -\pi/2 & \text{si } x = 0,\ y < 0 \end{cases}$$

8. Probar las *fórmulas de De Moivre:*

$$\cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}\,(n\theta) = (\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)^n \quad \forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

9. Calcular las partes real e imaginaria del número complejo $\left(\dfrac{1 + i\sqrt{3}}{2}\right)^8$

10. Probar que, para todo $x \in \mathbb{R}$, se tiene

(a) $$\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=0}^{n}\cos(kx) = \cos\left(\frac{nx}{2}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$$

(b) $$\mathrm{sen}\left(\frac{x}{2}\right)\sum_{k=1}^{n}\mathrm{sen}\,(kx) = \mathrm{sen}\left(\frac{nx}{2}\right)\,\mathrm{sen}\left(\frac{(n+1)x}{2}\right)$$