Tema 9

Ceros de las funciones holomorfas

A partir de ahora vamos a ir obteniendo una serie de aplicaciones importantes de la teoría local desarrollada anteriormente. El desarrollo en serie de Taylor deja claro que la sucesión de las derivadas en un punto de una función holomorfa no puede ser arbitraria, puesto que la serie de Taylor tiene radio de convergencia no nulo. Esta idea se puede concretar de diversas formas, entre las que elegimos la más elemental, probando las llamadas *desigualdades de Cauchy*. De ellas se deduce el *teorema de Liouville*, que es el resultado básico para el estudio de las funciones enteras, y permite probar muy fácilmente el *teorema fundamental del Álgebra*, afirmando que el cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado. La demostración que así se obtiene es esencialmente la original, debida al genio matemático de Carl Friedrich Gauss (1777-1855), que la publicó como parte de su tesis doctoral en 1799.

A continuación hacemos un estudio de los *ceros de una función holomorfa*, viendo que se comportan en algunos aspectos como los ceros de un polinomio. Concretamente, se puede definir de forma coherente el *orden* de un cero y ello permite factorizar nuestra función de manera análoga a como se factoriza un polinomio usando uno de sus ceros. A partir de este estudio de los ceros, probamos el *principio de identidad* para funciones holomorfas, mejorando muy mucho el que conocemos para las sumas de series de potencias.

9.1. Desigualdades de Cauchy

Si f es una función holomorfa en un abierto $\Omega \subset \mathbb{C}$ y fijamos $a \in \Omega$, es natural preguntarse cómo es la sucesión $\{f^{(n)}(a)\}$ de las derivadas de f en el punto a, o lo que viene a ser lo mismo, tomando $\alpha_n = f^{(n)}(a)/n!$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, cómo es la sucesión $\{\alpha_n\}$ de los coeficientes del desarrollo en serie de Taylor de f centrado en a. Tomando $r \in \mathbb{R}^+$ de forma que $D(a,r) \subset \Omega$, sabemos que dicha serie tiene radio de convergencia mayor o igual que r y, usando la fórmula de Cauchy-Hadamard, podemos ver cómo se refleja esta observación en la sucesión $\{\alpha_n\}$, pero sólo tendremos una información de tipo asintótico, referente a lo que ocurre para valores grandes de n. Sin embargo, si disponemos de una acotación de f en una circunferencia de centro a, la fórmula de Cauchy para las derivadas nos nos va a permitir obtener fácilmente información válida *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Desigualdades de Cauchy. *Sean* Ω *un abierto de* $\mathbb{C}$*,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* $a \in \Omega$*. Dado* $r \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$*, sea* $M(f,a,r) = \max\left\{ |f(z)| : z \in C(a,r)^* \right\}$*. Se tiene entonces:*

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \frac{M(f,a,r)}{r^n} \qquad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \tag{1}$$

Demostración. Nótese que las hipótesis son exactamente las mismas de la fórmula de Cauchy para las derivadas. Usándola en el caso más sencillo, fijado $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos

$$\frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int_{C(a,r)} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\, dw$$

y bastará acotar la integral del segundo miembro. Puesto que f, a y r están fijos, abreviamos la notación escribiendo $M = M(f,a,r)$. Para $w \in C(a,r)^*$ tenemos $|f(w)| \leqslant M$, luego el integrando está acotado por M/r^{n+1}, mientras la longitud del camino es $2\pi r$. Por tanto,

$$\frac{|f^{(n)}(a)|}{n!} \leqslant \frac{1}{2\pi}\, 2\pi r \frac{M}{r^{n+1}} = \frac{M}{r^n}$$

y esto es cierto para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, como queríamos demostrar. ■

En general, para sacar partido a las desigualdades anteriores, fijados f y a, podemos aprovechar la libertad para elegir r, que cuando $\Omega \neq \mathbb{C}$, sólo debe cumplir $\overline{D}(a,r) \subset \Omega$, es decir, $0 < r < d(a, \mathbb{C} \setminus \Omega)$. Tratamos entonces de minimizar la función de r que aparece en el segundo miembro de (1), pero ello exige conocer bien la función $r \mapsto M(f,a,r)$, que es tanto como conocer bien la función $|f|$. La situación es muy sencilla en el caso de una función entera, como vamos a ver enseguida.

9.2. Teorema de Liouville

Cuando trabajamos con una función entera, podemos aplicar las desigualdades de Cauchy tomando por ejemplo $a = 0$ y $r \in \mathbb{R}^+$ arbitrario. Además, si nuestra función entera está acotada, podemos sustituir $M(f,a,r)$ por una constante y el resultado se ve venir:

Teorema de Liouville. *Toda función entera y acotada es constante. De hecho, la imagen de cualquier función entera no constante es un conjunto denso en* $\mathbb{C}$*.*

Demostración. Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ está acotada, y sea $M = \sup\{|f(z)| : z \in \mathbb{C}\}$. Para todo $r \in \mathbb{R}^+$ tenemos obviamente $\overline{D}(0,r) \subset \mathbb{C}$ y $M(f,0,r) \leqslant M$, luego las desigualdades de Cauchy nos dicen que

$$|f^{(n)}(0)| \leqslant \frac{n!\,M}{r^n} \qquad \forall r \in \mathbb{R}^+, \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Para $n \in \mathbb{N}$ tenemos $\lim\limits_{r \to +\infty} \dfrac{n!M}{r^n} = 0$, luego $f^{(n)}(0) = 0$. Ahora, como el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en el origen es válido en todo $\mathbb{C}$, deducimos que f es constante:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} z^n = f(0) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

La segunda afirmación del teorema se deducirá fácilmente de la primera. Supongamos que $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y que $f(\mathbb{C})$ no es denso en $\mathbb{C}$, para probar que f es constante.

Tomando $w \in \mathbb{C} \setminus \overline{f(\mathbb{C})}$, existirá $\delta > 0$ tal que $D(w,\delta) \cap f(\mathbb{C}) = \emptyset$, es decir, $|f(z) - w| \geqslant \delta$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por tanto, definiendo

$$g(z) = \frac{1}{f(z) - w} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

obtenemos una función $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ que está acotada, pues $|g(z)| \leqslant 1/\delta$ para todo $z \in \mathbb{C}$. Por la primera parte de la demostración, g es constante, luego lo mismo le ocurre a f. ■

9.3. Teorema fundamental del Álgebra

Este importante resultado, una piedra angular de la Matemática, se deduce fácilmente del teorema de Liouville. Preparamos la demostración observando que todo polinomio no constante P, con coeficientes complejos, diverge en el infinito: $P(z) \to \infty \ (z \to \infty)$. En efecto, si $n \in \mathbb{N}$ es el grado de P y $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$, con $\alpha_n \neq 0$, sus coeficientes, para todo $z \in \mathbb{C}^*$ se tiene

$$P(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k = z^n \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^{k-n}$$

luego basta usar que $z^n \to \infty \ (z \to \infty)$ y $\lim\limits_{z\to\infty} \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^{k-n} = a_n \in \mathbb{C}^*$.

Teorema fundamental del Álgebra. *El cuerpo $\mathbb{C}$ es algebraicamente cerrado, es decir, si P es un polinomio con coeficientes complejos, no constante, existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $P(z) = 0$.*

Demostración. Supongamos que $P(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$, para llegar a una contradicción. Basta para ello definir $f(z) = \dfrac{1}{P(z)}$ para todo $z \in \mathbb{C}$, obteniendo una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Por la observación hecha antes del enunciado, tenemos $\lim\limits_{z\to\infty} f(z) = 0$ y esto implica claramente que f está acotada. Así pues, f es una función entera y acotada pero no es constante, lo que contradice el teorema de Liouville. ■

9.4. Principio de identidad

Con el fin de hacer un estudio detallado de los ceros de funciones holomorfas, recordemos las cuestiones básicas referentes a los ceros de un polinomio. Por una parte, si P es una función polinómica no constante, el conjunto de sus ceros, $Z(P) = \{z \in \mathbb{C} : P(z) = 0\}$, es finito. Por otra, cada cero $a \in Z(P)$ tiene un orden, es decir, existe un único $m \in \mathbb{N}$ que nos permite escribir $P(z) = (z-a)^m Q(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$, donde Q es un polinomio que verifica $Q(a) \neq 0$. Equivalentemente, se tiene $P^{(k)}(a) = 0$ para $k \in \mathbb{Z}$ con $0 \leqslant k < m$, y $P^{(m)}(a) = 0$.

Para una función holomorfa y no constante en un dominio arbitrario, no podemos esperar que el conjunto de sus ceros tenga que ser finito, basta pensar por ejemplo en el seno y el coseno, que son funciones enteras con infinitos ceros. Sin embargo, vamos a poder definir el orden de un cero de una función holomorfa, generalizando al pie de la letra lo que ocurre para polinomios. Como consecuencia, obtendremos que el conjunto de los ceros, aunque puede ser infinito, no puede ser demasiado grande. Resumimos toda la información en el siguiente enunciado.

Teorema (Ceros de una función holomorfa). *Sea* Ω *un dominio,* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. *Supongamos que* f *no es idénticamente nula y sea* $Z(f) = \{z \in \mathbb{C} : f(z) = 0\}$ *el conjunto de sus ceros.*

(a) Orden de un cero. *Para cada* $a \in Z(f)$ *existe* $n \in \mathbb{N}$ *tal que* $f^{(n)}(a) \neq 0$. *Se dice que el número natural* $m = \min\{n \in \mathbb{N} : f^{(n)}(a) \neq 0\}$ *es el* ***orden*** *del cero de* f *en el punto* a.

(b) Caracterización del orden. *La función* f *tiene un cero de orden* $m \in \mathbb{N}$ *en el punto* $a \in \Omega$ *si, y sólo si, existe* $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ *tal que* $g(a) \neq 0$ *y* $f(z) = (z-a)^m g(z)$ *para todo* $z \in \Omega$.

(c) Principio de los ceros aislados. *Para cada* $a \in Z(f)$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $D(a,\delta) \subset \Omega$ *y* $f(z) \neq 0$ *para todo* $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$. *Por tanto,* $Z(f)$ *no tiene puntos de acumulación en* Ω*, es decir:* $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$.

Demostración. La idea clave es pensar que el desarrollo en serie de Taylor permite en gran medida trabajar localmente con la función f como si fuese un polinomio.

(a). Se trata obviamente de probar que $A = \emptyset$, donde

$$A = \left\{ a \in \Omega : f^{(n)}(a) = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\} = \bigcap_{n=0}^{\infty} Z\big(f^{(n)}\big)$$

Para ello, empezamos observando que, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $Z\big(f^{(n)}\big)$ es un subconjunto cerrado de Ω, por ser $f^{(n)}$ continua. Deducimos que A también es un cerrado relativo a Ω, como intersección de cerrados.

Por otra parte, comprobamos que A es abierto. Dado $a \in A$, tomamos $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$ y usamos el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en a, obteniendo que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = 0 \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Deducimos claramente que $f^{(n)}(z) = 0$ para todo $z \in D(a,r)$ y para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, luego $D(a,r) \subset A$ y esto prueba que A es abierto. Como hemos supuesto que f no es idénticamente nula, tenemos $A \neq \Omega$, luego al ser Ω conexo no queda más salida que $A = \emptyset$.

Usando la buena ordenación de los naturales, podemos pues definir el orden m de cada cero $a \in Z(f)$ como el orden de la primera derivada de f que no se anule en el punto a, así que m queda determinado por: $f(a) = f\,'(a) = \ldots = f^{(m-1)}(a) = 0$ y $f^{(m)}(a) \neq 0$.

(b). Supongamos que f tiene un cero de orden $m \in \mathbb{N}$ en un punto $a \in \Omega$. Fijado $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$, el desarrollo en serie de Taylor de f centrado en a tendrá la forma

$$f(z) = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(a)}{(m+n)!}(z-a)^n \quad \forall z \in D(a,r) \tag{2}$$

Está ya muy claro cómo debemos definir la función $g : \Omega \to \mathbb{C}$ que buscamos:

$$g(z) = \frac{f(z)}{(z-a)^m} \quad \forall z \in \Omega \setminus \{a\} \qquad \text{y} \qquad g(a) = \frac{f^{(m)}(a)}{m!}$$

De esta forma es obvio que $f(z) = (z-a)^m g(z)$ para todo $z \in \Omega$, así como que $g(a) \neq 0$. También es evidente que $g \in \mathcal{H}\big(\Omega \setminus \{a\}\big)$, pero la restricción de g al disco abierto $D(a,r)$ coincide con la suma de una serie de potencias, concretamente

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(m+n)}(a)}{(m+n)!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(a,r)$$

Para $z \in D(a,r) \setminus \{a\}$, esta igualdad se deduce de (2), mientras que para $z = a$, es la definición de $g(a)$. Por tanto g es derivable en el punto a, luego $g \in \mathcal{H}(\Omega)$, como queríamos.

Recíprocamente, supongamos que existe $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ verificando

$$f(z) = (z-a)^m g(z) \quad \forall z \in \Omega \qquad \text{y} \qquad g(a) \neq 0 \tag{3}$$

Fijado de nuevo $r \in \mathbb{R}^+$ con $D(a,r) \subset \Omega$, usamos (3) junto con el desarrollo en serie de Taylor de g centrado en a para obtener el de f:

$$f(z) = (z-a)^m \sum_{n=0}^{\infty} \frac{g^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{g^{(n-m)}(a)}{(n-m)!}(z-a)^n \qquad \forall z \in D(z,r)$$

Deducimos claramente que $f^{(n)}(a) = 0$ para $0 \leqslant n < m$, mientras que $f^{(m)}(a) = m!\, g(a) \neq 0$. Esto demuestra que f tiene un cero de orden m en el punto a.

(c). Dado $a \in Z(f)$, sea $m \in \mathbb{N}$ el orden del cero de f en a, y usando lo ya demostrado, sea $g \in \mathcal{H}(\Omega)$ que verifique (3). Como g es continua en el punto a con $g(a) \neq 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \subset \Omega$ y $g(z) \neq 0$ para todo $z \in D(a,\delta)$. Para $z \in D(a,\delta) \setminus \{a\}$ tenemos entonces $(z-a)^m \neq 0$ y $g(z) \neq 0$, luego $f(z) = (z-a)^m g(z) \neq 0$.

Para todo $a \in Z(f)$ hemos encontrado $\delta > 0$ tal que $D(a,\delta) \cap Z(f) = \{a\}$, así que todos los puntos de $Z(f)$ son aislados, es decir, $Z(f) \cap Z(f)' = \emptyset$. Pero como $Z(f)$ es un subconjunto cerrado de Ω, porque f es continua, tenemos $Z(f)' \cap \Omega \subset Z(f)$, luego $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$. ■

Obsérvese que, en lo referente al orden de sus ceros, una función f holomorfa en un dominio Ω, que no sea idénticamente nula, se comporta exactamente igual que una función polinómica. La hipótesis de que Ω sea conexo es esencial, pues en otro caso podríamos tener una función idénticamente nula en una componente conexa de Ω, pero no en todo Ω.

En cuanto al tamaño del conjunto $Z(f)$, no tiene por qué ser finito, pero sabemos que $Z(f)$ no tiene puntos de acumulación en Ω. Para una función entera, esto significa que $Z(f)' = \emptyset$. En general, $Z(f)$ puede tener puntos de acumulación, pero han de estar en $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Como ejemplo, consideremos la función $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ dada por $f(z) = \operatorname{sen} \dfrac{\pi}{1-z}$ para todo $z \in D(0,1)$. Se tiene claramente $Z(f) = \{1 - (1/n) : n \in \mathbb{N}\}$, luego $Z(f)' = \{1\}$, pero $1 \notin D(0,1)$.

En general, la condición $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$, de naturaleza topológica, indica que el conjunto $Z(f)$ no puede ser muy grande. En particular, vamos a ver que $Z(f)$ ha de ser numerable. Para ello necesitamos algunas observaciones básicas sobre la topología del plano.

Empezamos viendo que la función distancia de un punto a un conjunto no vacío es una función continua. Concretamente, si E es un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$, la función $\delta : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ definida por

$$\delta(z) = d(z,E) = \text{ínf}\,\{\,|z-w| : w \in E\,\} \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$

es continua. En efecto, para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ y $w \in E$ se tiene

$$\delta(z_1) \leqslant |z_1 - w| \leqslant |z_1 - z_2| + |z_2 - w|$$

de donde deducimos $\delta(z_1) - |z_1 - z_2| \leqslant \delta(z_2)$, es decir, $\delta(z_1) - \delta(z_2) \leqslant |z_1 - z_2|$. Pero ahora podemos intercambiar los papeles de z_1 y z_2, para obtener que de hecho δ es lipschitziana, más concretamente, $|\delta(z_1) - \delta(z_2)| \leqslant |z_1 - z_2|$ para cualesquiera $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$.

La siguiente es una útil propiedad topológica de todos los abiertos del plano. De hecho es válida para abiertos de $\mathbb{R}^n$, cualquiera que sea $n \in \mathbb{N}$.

- *Todo abierto Ω del plano es unión numerable de conjuntos compactos, es decir, existe una sucesión $\{K_n\}$ de conjuntos compactos, cuya unión es Ω.*

Si $\Omega = \mathbb{C}$, basta tomar $K_n = \overline{D}(0,n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En otro caso, para cada $n \in \mathbb{N}$ tomamos

$$K_n = \overline{D}(0,n) \cap \{\, z \in \mathbb{C} : d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geqslant 1/n \,\}$$

Es claro que $K_n \subset \Omega$ y, como la función $z \mapsto d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega)$ es continua, K_n es cerrado, pero obviamente está acotado, luego es compacto. Dado $z \in \Omega$, existe $r \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(z,r) \subset \Omega$, luego $d(z, \mathbb{C} \setminus \Omega) \geqslant r$. Tomando $n \in \mathbb{N}$ de forma que $1/n < r$ y $n > |z|$ tenemos claramente que $x \in K_n$. Esto prueba que $\Omega = \displaystyle\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ como queríamos. ■

La siguiente observación es una propiedad de los subconjuntos compactos de $\mathbb{C}$, válida en cualquier espacio métrico, que probablemente es conocida:

- *Si K es un subconjunto compacto de $\mathbb{C}$ y A es un subconjunto infinito de K, entonces A tiene un punto de acumulación en K, es decir, $A' \cap K \neq \emptyset$.*

Como A es infinito, existe una sucesión $\{z_n\}$ de puntos de A con términos todos distintos, es decir, $z_n \neq z_m$ para $n \neq m$. Por ser K compacto, la sucesión $\{z_n\}$ admite una sucesión parcial $\{z_{\sigma(n)}\}$ que converge a un punto $z \in K$. Entonces, para todo $r \in \mathbb{R}^+$ es claro que $D(z,r)$ contiene infinitos puntos de A, concretamente, todos los términos de la sucesión $\{z_{\sigma(n)}\}$, a partir de uno en adelante, luego $z \in A' \cap K$ como queríamos. ■

Obtenemos ya fácilmente el resultado que habíamos anunciado.

- *Si Ω un abierto de $\mathbb{C}$ y $A \subset \Omega$ verifica que $A' \cap \Omega = \emptyset$, entonces A es numerable.*

Escribimos $\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$ donde K_n es compacto para todo $n \in \mathbb{N}$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, observamos que el conjunto $A_n = A \cap K_n$ ha de ser finito, pues de lo contrario hemos visto que se tendría $\emptyset \neq A_n' \cap K_n \subset A' \cap \Omega$, lo que contradice la hipótesis sobre A. Tenemos claramente

$$A = A \cap \Omega = A \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (A \cap K_n) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$

así que A es numerable por ser una unión numerable de conjuntos finitos. ■

Volviendo al conjunto de los ceros de una función holomorfa tenemos claramente:

- *Sea Ω un dominio y $f \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si f no es idénticamente nula, entonces el conjunto de sus ceros $Z(f)$ es numerable.*

Conviene resaltar que, si de $Z(f)' \cap \Omega = \emptyset$ tan sólo deducimos que $Z(f)$ es numerable, perdemos mucha información. Un conjunto numerable $A \subset \Omega$ puede estar muy lejos de verificar que $A' \cap \Omega = \emptyset$. Por ejemplo, $A = \Omega \cap \{r + is : r, s \in \mathbb{Q}\}$ es numerable, pero $A' \cap \Omega = \Omega$.

Al aplicar el principio de los ceros aislados a la diferencia entre dos funciones, obtenemos:

Principio de identidad para funciones holomorfas. *Sea Ω un dominio y $f, g \in \mathcal{H}(\Omega)$. Si A es un subconjunto de Ω tal que $f(a) = g(a)$ para todo $a \in A$, y $A' \cap \Omega \neq \emptyset$, entonces f y g son idénticas: $f(z) = g(z)$ para todo $z \in \Omega$.*

Demostración. Basta observar que $\emptyset \neq A' \cap \Omega \subset Z(f-g)' \cap \Omega$, luego el teorema sobre los ceros de una función holomorfa no deja más salida que $f = g$. ■

En particular, si f y g coinciden en un subconjunto no numerable de Ω, son idénticas. Como ya se ha comentado, esto nos da un principio de identidad mucho más débil que el del enunciado anterior, aunque en la práctica puede ser más que suficiente.

Recordemos el principio de identidad que conocíamos para sumas de series de potencias: si f y g vienen dadas como sumas de series de potencias convergentes en un disco abierto $D(a,R)$ y existe δ con $0 < \delta < R$ tal que $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D(a,\delta)$, entonces ambas series de potencias son idénticas, luego $f(z) = g(z)$ para todo $z \in D(a,R)$. Puesto que $D(a,R)$ es un dominio y $D(a,\delta)' = \overline{D}(a,\delta)$, o simplemente $D(a,\delta)$ no es numerable, este resultado es un caso muy particular del que ahora conocemos.

Por ejemplo, la exponencial compleja es la única función entera que extiende a la real, y lo mismo se puede decir del seno, el coseno, o cualquier función entera que tome valores reales en el eje real. Pero podemos llegar mucho más lejos: si $f, g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ verifican que $f(1/n) = g(1/n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces $f = g$, ya que el conjunto $A = \{1/n : n \in \mathbb{N}\}$, aunque sea numerable, verifica que $A' = \{0\} \neq \emptyset$. Claramente, bastaría suponer que f y g son holomorfas en un dominio Ω que contenga al origen.

9.5. Ejercicios.

1. Sea $f \in \mathcal{H}\big(D(0,1)\big)$ tal que
$$|f(z)| \leqslant \frac{1}{1-|z|} \qquad \forall z \in D(0,1)$$
Probar que $|f^{(n)}(0)| \leqslant e\,(n+1)!$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

2. Sea f una función entera verificando que existen constantes $\alpha, \beta, \rho \in \mathbb{R}^+$ tales que
$$z \in \mathbb{C},\ |z| > \rho \implies |f(z)| \leqslant \alpha |z|^{\beta}$$
Probar que f es una función polinómica de grado menor o igual que β.

3. Sea f una función entera verificando que
$$f(z) = f(z+1) = f(z+i) \qquad \forall z \in \mathbb{C}$$
Probar que f es constante.

4. Sea f una función entera verificando que $f\big(f(z)\big) = f(z)$ para todo $z \in \mathbb{C}$. ¿Qué se puede afirmar sobre f?

5. En cada uno de los siguientes casos, decidir si existe una función f, holomorfa en un entorno del origen, y verificando que $f(1/n) = a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ suficientemente grande:

   (a) $a_{2n} = 0,\ a_{2n-1} = 1 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (b) $a_{2n} = a_{2n-1} = \dfrac{1}{2n} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

   (c) $a_n = \dfrac{n}{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}$

6. Enunciar y demostrar un resultado referente al orden de los ceros de una suma, producto o cociente de funciones holomorfas.

7. Dado un abierto Ω del plano, probar que el anillo $\mathcal{H}(\Omega)$ es un dominio de integridad si, y sólo si, Ω es conexo.

8. ¿Qué se puede afirmar sobre dos funciones enteras cuya composición es constante?

9. Sea f una función entera verificando que $f(z) \to \infty \ (z \to \infty)$. Probar que f es una función polinómica.

10. Sea f una función entera verificando que
$$z \in \mathbb{C},\ |z| = 1 \implies |f(z)| = 1$$
Probar que existen $\alpha \in \mathbb{C}$ con $|\alpha| = 1$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tales que $f(z) = \alpha z^n$ para todo $z \in \mathbb{C}$.