Tema 2

Topología del plano complejo

Repasamos algunos conceptos y resultados acerca de las propiedades métricas y topológicas del plano complejo. Todos ellos son bien conocidos, pues como espacio métrico, $\mathbb{C}$ es idéntico a $\mathbb{R}^2$ con la distancia euclídea, luego la topología usual de $\mathbb{C}$ es la topología usual de $\mathbb{R}^2$.

2.1. La topología de $\mathbb{C}$

El conjunto $\mathbb{C}$ de los números complejos y el plano euclídeo $\mathbb{R}^2$ no sólo se identifican como conjuntos, sino también como espacios métricos. Más concretamente, $\mathbb{C}$ es un espacio métrico con la distancia $d : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{R}_0^+$ definida por

$$d(z,w) = |w - z| \qquad \forall z,w \in \mathbb{C}$$

Decimos simplemente que d es **la distancia** de $\mathbb{C}$, pues nunca consideramos otra. Cualquier noción métrica que usemos en $\mathbb{C}$, como la complitud, la acotación o la continuidad uniforme, se refiere siempre a esta distancia. Recordando que $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, al restringir d a $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ obtenemos la distancia usual de $\mathbb{R}$, luego vemos siempre a $\mathbb{R}$ como *subespacio métrico* de $\mathbb{C}$.

Las bolas abiertas o cerradas en $\mathbb{C}$ suelen llamarse discos. Más concretamente, para $a \in \mathbb{C}$ y $r \in \mathbb{R}^+$, el *disco abierto* y el *disco cerrado*, de centro a y radio r, vienen dados por

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\} \qquad \text{y} \qquad \overline{D}(a,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$$

Naturalmente, **la topología** de $\mathbb{C}$ es la generada por su distancia, y es también la única topología que consideramos en $\mathbb{C}$. Cualquier noción topológica que usemos en $\mathbb{C}$, como la continuidad, la compacidad, la conexión y tantas otras, se refiere siempre a dicha topología. Por supuesto, la topología de $\mathbb{C}$ induce en $\mathbb{R}$ su topología usual.

Los abiertos de $\mathbb{C}$ son las uniones (arbitrarias) de discos abiertos. Equivalentemente, un conjunto $\Omega \subset \mathbb{C}$ es *abierto* cuando coincide con su *interior*:

$$\Omega \text{ abierto} \iff \Omega = \Omega^\circ \iff \forall\, z \in \Omega \ \exists\, r \in \mathbb{R}^+ \,:\, D(z,r) \subset \Omega$$

2.2. Sucesiones de números complejos

Como en cualquier espacio métrico, la topología de $\mathbb{C}$ puede caracterizarse mediante la convergencia de sucesiones, noción que ahora vamos a repasar.

Si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos y $z \in \mathbb{C}$, tenemos

$$\{z_n\} \to z \iff \big[\forall\, \varepsilon > 0 \ \exists\, m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \ \Rightarrow \ |z_n - z| < \varepsilon\big]$$

lo que equivale a $\big\{|z_n - z|\big\} \to 0$. En particular $\{z_n\} \to 0$ si, y sólo si, $\big\{|z_n|\big\} \to 0$.

Sabemos que, para un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ y un punto $z \in \mathbb{C}$, se tiene $z \in \overline{A}$ si, y sólo si, existe una sucesión de puntos de A que converge a z. Por tanto, A es cerrado si, y sólo si, contiene a los límites de todas las sucesiones de puntos de A que sean convergentes:

$$A \text{ cerrado} \iff A = \overline{A} \iff \big[z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}\, ,\, \{z_n\} \to z \in \mathbb{C} \ \Rightarrow \ z \in A\big]$$

Queda así caracterizada la topología de $\mathbb{C}$ mediante la convergencia de sucesiones.

La convergencia de una sucesión de números complejos equivale a la de las sucesiones de sus partes reales e imaginarias,

$$\{z_n\} \to z \qquad \iff \qquad \{\operatorname{Re} z_n\} \to \operatorname{Re} z \quad \text{y} \quad \{\operatorname{Im} z_n\} \to \operatorname{Im} z \tag{1}$$

equivalencia que se comprueba directamente usando que

$$\text{máx}\,\big\{\,|\operatorname{Re} w|\,,\,|\operatorname{Im} w|\,\big\} \leqslant |w| \leqslant |\operatorname{Re} w| + |\operatorname{Im} w| \qquad \forall w \in \mathbb{C} \tag{2}$$

Estas desigualdades también nos dicen que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ es de Cauchy si, y sólo si, tanto $\{\operatorname{Re} z_n\}$ como $\{\operatorname{Im} z_n\}$ son sucesiones de Cauchy de números reales. Del teorema de complitud de $\mathbb{R}$ deducimos la principal propiedad de $\mathbb{C}$ como espacio métrico:

- $\mathbb{C}$ *es un espacio métrico* ***completo****. Por tanto, un subespacio métrico de* $\mathbb{C}$ *es completo si, y sólo si, es un subconjunto cerrado de* $\mathbb{C}$.

2.3. Acotación y compacidad

Claramente, un conjunto $A \subset \mathbb{C}$ está **acotado**, si y sólo si, A está *acotado en módulo*:

$$A \text{ acotado} \iff \exists M \in \mathbb{R} \, : \, |z| \leqslant M \quad \forall z \in A$$

Recordamos también que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada cuando lo está el conjunto de sus términos:

$$\{z_n\} \text{ acotada} \iff \exists M \in \mathbb{R} \, : \, |z_n| \leqslant M \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Toda sucesión convergente de números complejos está acotada: si $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}$, se tiene $|z_n| \leqslant |z_n - z| + |z|$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y basta usar que $\big\{\,|z_n - z|\,\big\} \to 0$.

De las desigualdades (2) deducimos que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ está acotada si, y sólo si, las sucesiones de números reales $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$ están acotadas. Esto permite probar fácilmente para $\mathbb{C}$ el teorema de Bolzano-Weierstrass, que de hecho es válido en $\mathbb{R}^N$ para todo $N \in \mathbb{N}$. Así pues,

- *Toda sucesión acotada de números complejos admite una sucesión parcial convergente.*

Recordemos ahora que un subconjunto K de un espacio métrico E es compacto si, y sólo si, toda sucesión de puntos de K admite una sucesión parcial que converge a un punto de K. Esto implica siempre que K está acotado y es un subconjunto cerrado de E. En el caso $E = \mathbb{C}$, como ocurre en general en $\mathbb{R}^N$, usando el teorema de Bolzano-Weierstrass, obtenemos fácilmente el recíproco. Por tanto:

- *Un subconjunto de $\mathbb{C}$ es* **compacto** *si, y sólo si, es cerrado y acotado.*

En particular los discos cerrados son compactos, y obtenemos otra propiedad topológica clave de $\mathbb{C}$: *es un espacio topológico localmente compacto*, es decir, todo punto de $\mathbb{C}$ tiene un entorno compacto.

2.4. Cálculo de límites

Antes de repasar la reglas generales para el cálculo de límites de sucesiones, recordamos la noción de sucesión divergente.

Una sucesión $\{z_n\}$ de números complejos es **divergente**, cuando la sucesión de números reales $\{|z_n|\}$ diverge positivamente, en cuyo caso escribimos $\{z_n\} \to \infty$:

$$\{z_n\} \to \infty \iff \big\{|z_n|\big\} \to +\infty \iff \big[\forall M \in \mathbb{R}\ \exists m \in \mathbb{N} : n \geqslant m \Rightarrow |z_n| > M\big]$$

Es claro que entonces, toda sucesión parcial de $\{z_n\}$ también diverge. Como en $\mathbb{R}$, del teorema de Bolzano-Weierstrass deducimos que *una sucesión de números complejos es divergente si, y sólo si, no admite ninguna sucesión parcial convergente.*

Conviene resaltar que una sucesión de números complejos $\{z_n\}$ puede ser divergente, sin que lo sea ninguna de las sucesiones $\{\operatorname{Re} z_n\}$ y $\{\operatorname{Im} z_n\}$. Por ejemplo, tomando

$$z_n = n\left(\cos\frac{n\pi}{2} + i \operatorname{sen}\frac{n\pi}{2}\right) \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

tenemos $|z_n| = n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{z_n\} \to \infty$, pero $\operatorname{Re} z_{2n-1} = 0 = \operatorname{Im} z_{2n}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, luego $\{\operatorname{Re} z_n\}$ no es divergente, como tampoco lo es $\{\operatorname{Im} z_n\}$.

Las reglas para estudiar el comportamiento de una suma, producto o cociente, de sucesiones convergentes o divergentes de números complejos, son exactamente las mismas que teníamos en $\mathbb{R}$. De cualquier forma que se aborde, la demostración es rutinaria, pero no conviene trasladar sistemáticamente el problema a $\mathbb{R}^2$ usando las sucesiones de partes reales e imaginarias. Es preferible trabajar como en $\mathbb{R}$, aprovechando que el módulo de un número complejo tiene formalmente las mismas propiedades que el valor absoluto de un número real.

- *Sean* $\{z_n\}$ *y* $\{w_n\}$ *sucesiones de números complejos y* $z, w \in \mathbb{C}$. *Se tiene:*

(i) *Si* $\{z_n\} \to z$, *entonces* $\{|z_n|\} \to |z|$

(ii) *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$, *entonces* $\{z_n + w_n\} \to z + w$

(iii) *Si* $\{z_n\} \to \infty$ *y* $\{w_n\}$ *está acotada, entonces* $\{z_n + w_n\} \to \infty$

(iv) *Si* $\{z_n\} \to 0$ *y* $\{w_n\}$ *está acotada, entonces* $\{z_n w_n\} \to 0$

(v) *Si* $\{z_n\} \to z$ *y* $\{w_n\} \to w$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to zw$

(vi) *Si* $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ *y* $\{w_n\} \to \infty$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to \infty$

(vii) *Si* $\{z_n\} \to \infty$ *y* $\{w_n\} \to \infty$, *entonces* $\{z_n w_n\} \to \infty$

$(viii)$ *Si* $w_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$ *y* $\{w_n\} \to w \neq 0$, *entonces* $\{1/w_n\} \to 1/w$

(ix) *Si* $w_n \neq 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$, *entonces* $\{w_n\} \to 0$ *si, y sólo si,* $\{1/w_n\} \to \infty$

Indicamos en cada caso una igualdad o desigualdad de comprobación evidente, válida para todo $n \in \mathbb{N}$, de la que se deduce con facilidad el resultado, bien directamente, o bien usando resultados anteriores:

$$
\begin{array}{rl}
(i) & \big| |z_n| - |z| \big| \leqslant |z_n - z| \\
(ii) & \big| (z_n + w_n) - (z + w) \big| \leqslant |z_n - z| + |w_n - w| \\
(iii) & |z_n + w_n| \geqslant |z_n| - \sup\big\{ |w_k| : k \in \mathbb{N} \big\} \\
(iv) & |z_n w_n| \leqslant |z_n| \sup\big\{ |w_k| : k \in \mathbb{N} \big\} \\
(v) & z_n w_n - zw = (z_n - z) w_n + z(w_n - w) \\
(vi) & |z_n w_n| \geqslant |w_n| \big(|z| - |z - z_n| \big) \\
(vii) & |z_n w_n| = |z_n| \, |w_n| \\
(viii) & \left| \dfrac{1}{w_n} - \dfrac{1}{w} \right| = \dfrac{|w - w_n|}{|w_n| \, |w|} \\
(ix) & \left| \dfrac{1}{w_n} \right| = \dfrac{1}{|w_n|}
\end{array}
$$

Nótese que, en todos los casos, el razonamiento es literalmente el mismo que en $\mathbb{R}$. ■

2.5. Funciones complejas de variable compleja

Empezamos ya a trabajar con las funciones que desde ahora nos van a interesar. En todo lo que sigue, A será un subconjunto no vacío de $\mathbb{C}$ y denotaremos por $\mathcal{F}(A)$ al conjunto de todas las funciones de A en $\mathbb{C}$. En general, decimos que los elementos de $\mathcal{F}(A)$ son funciones complejas de variable compleja, pero puede ocurrir que A esté contenido en $\mathbb{R}$, con lo que los elementos de $\mathcal{F}(A)$ serán funciones complejas de variable real. Incluso, para $A \subset \mathbb{R}$, una función $f \in \mathcal{F}(A)$ puede verificar que $f(A) \subset \mathbb{R}$, en cuyo caso f es una función real de variable real. Por tanto, el estudio que ahora iniciamos no debe verse como una teoría paralela, sino como una auténtica generalización del estudio de las funciones reales de variable real. No obstante, en el caso que realmente más nos interesa, A será un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$, que obviamente no puede estar contenido en $\mathbb{R}$.

Las operaciones del cuerpo $\mathbb{C}$ se trasladan de forma natural a $\mathcal{F}(A)$. Concretamente, para dos funciones $f, g \in \mathcal{F}(A)$ definimos su *suma* $f+g$ y su *producto* fg por

$$\big(f+g\big)(z) = f(z) + g(z) \quad \text{y} \quad \big(fg\big)(z) = f(z)g(z) \quad \forall z \in A$$

Estas dos operaciones convierten $\mathcal{F}(A)$ en un *anillo conmutativo con unidad* que, salvo en el caso trivial de que A se reduzca a un punto, tiene divisores de cero, luego no es un cuerpo. No obstante, si $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, tenemos la función *cociente* $f/g \in \mathcal{F}(A)$ definida por

$$\left(\frac{f}{g}\right)(z) = \frac{f(z)}{g(z)} \qquad \forall z \in A$$

Como caso particular del producto de funciones, cuando una de ellas es constante, obtenemos un *producto por escalares complejos*. Concretamente, para $\lambda \in \mathbb{C}$ y $\mathcal{F}(A)$ escribimos

$$\big(\lambda f\big)(z) = \lambda f(z) \qquad \forall z \in A$$

Con la suma antes definida y este producto por escalares, $\mathcal{F}(A)$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{C}$, esto es, un *espacio vectorial complejo*.

Usaremos a menudo la composición de funciones. Si $f \in \mathcal{F}(A)$, $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{F}(B)$, la *composición* de f con g es la función $g \circ f \in \mathcal{F}(A)$ dada por $\big(g \circ f\big)(z) = g\big(f(z)\big)$ para todo $z \in A$. Componiendo una función $f \in \mathcal{F}(A)$ con las funciones parte real, parte imaginaria, conjugación y módulo, definidas en todo $\mathbb{C}$, obtenemos las funciones $\operatorname{Re} f$ *(parte real de f)*, $\operatorname{Im} f$ *(parte imaginaria de f)*, $\overline{f}$ *(conjugada de f)* y $|f|$ *(módulo de f)*. Así pues, para todo $z \in A$ tenemos

$$\big(\operatorname{Re} f\big)(z) = \operatorname{Re} f(z)\,, \quad \big(\operatorname{Im} f\big)(z) = \operatorname{Im} f(z)\,, \quad \overline{f}(z) = \overline{f(z)} \quad \text{y} \quad |f|(z) = |f(z)|$$

Mencionamos relaciones obvias entre estas funciones:

$$f = \operatorname{Re} f + i \operatorname{Im} f\,, \quad \overline{f} = \operatorname{Re} f - i \operatorname{Im} f\,, \quad \operatorname{Re} f = \frac{f+\overline{f}}{2}\,, \quad \operatorname{Im} f = \frac{f-\overline{f}}{2i} \tag{3}$$

$$|f| = \big|\overline{f}\big| = \big(f\,\overline{f}\big)^{1/2} = \big((\operatorname{Re} f)^2 + (\operatorname{Im} f)^2\big)^{1/2}$$

2.6. Continuidad en un punto

Ni que decir tiene, para una función $f \in \mathcal{F}(A)$, la continuidad de f en un punto $z \in A$ es caso particular de la noción general de continuidad en un punto para una función de un espacio topológico en otro, entendiendo claro está, que A tiene la topología inducida por la de $\mathbb{C}$. Como $\mathbb{C}$ es un espacio métrico y A un subespacio métrico de $\mathbb{C}$, dicha noción se expresa cómodamente usando la distancia de $\mathbb{C}$ y se caracteriza mediante la convergencia de sucesiones. Por tanto, tenemos:

$$\begin{aligned} f \text{ **continua** en } z \iff & \big[\,\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 : w \in A,\ |w - z| < \delta \ \Rightarrow\ |f(w) - f(z)| < \varepsilon\,\big] \\ \iff & \big[\, z_n \in A \ \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{z_n\} \to z \ \Rightarrow\ \big\{f(z_n)\big\} \to f(z)\,\big] \end{aligned}$$

Resaltamos el carácter local de la continuidad, cuya comprobación es clara:

- *Sea $f \in \mathcal{F}(A)$ y B un subconjunto no vacío de A. Si f es continua en un punto $z \in B$, entonces la restricción $f|_B$ es continua en z. En el otro sentido, si $f|_B$ es continua en z, y existe $\delta > 0$ tal que $D(z,\delta) \cap A \subset B$, entonces f es continua en z.*

Comprobamos también rutinariamente, que si $f, g \in \mathcal{F}(A)$ son continuas en un punto $z \in A$, entonces la suma $f + g$ y el producto fg también son funciones continuas en z. Si además se tiene $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, entonces la función cociente f/g es continua en z.

Recordamos también que la continuidad se conserva al componer funciones. Si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, $f(A) \subset B \subset \mathbb{C}$ y $g \in \mathcal{F}(B)$ es continua en el punto $f(z)$, entonces $g \circ f$ es continua en el punto z.

Por ejemplo, la conjugación es una *isometría* de $\mathbb{C}$ en sí mismo, es decir, para $w, z \in \mathbb{C}$ se tiene $|\overline{w} - \overline{z}| = |w - z|$, y en particular es una función continua en todo punto de $\mathbb{C}$. Por tanto, si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, $\overline{f}$ también lo es. El recíproco también es cierto, ya que $f = \overline{\overline{f}}$. De las igualdades (3) deducimos algo que merece la pena destacar, pues hace equivalente la continuidad de una función compleja a la de dos funciones reales:

- *Una función $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$ si, y sólo si, $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$ son continuas en z.*

Por otra parte, la desigualdad $\big||w| - |z|\big| \leqslant |w - z|$, válida para cualesquiera $w, z \in \mathbb{C}$, nos dice que la función módulo es continua en todo punto de $\mathbb{C}$. Usándola igual que hemos usado la conjugación, deducimos que si $f \in \mathcal{F}(A)$ es continua en un punto $z \in A$, entonces $|f|$ es continua en z. Esta vez el recíproco es obviamente falso.

2.7. Continuidad

Como bien sabemos, para una función $f \in \mathcal{F}(A)$, la continuidad en un sólo punto tiene poca utilidad. Decimos que f es *continua en un conjunto* no vacío $B \subset A$ cuando es continua en todo punto $z \in B$ y, si f es continua en A decimos simplemente que f es **continua**. Denotamos por $\mathcal{C}(A)$ al conjunto de todas las funciones continuas de A en $\mathbb{C}$. De nuevo, esta noción de continuidad es caso particular de la continuidad de una función entre dos espacios topológicos, entendiendo siempre que A tiene la topología inducida por la de $\mathbb{C}$. Denotamos por $\mathcal{T}$ a la topología de $\mathbb{C}$, con lo que los abiertos (relativos) de A son los conjuntos de la forma $U \cap A$ con $U \in \mathcal{T}$. Entonces, para $f \in \mathcal{F}(A)$ tenemos:

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff \forall V \in \mathcal{T} \ \exists U \in \mathcal{T} \ : \ f^{-1}(V) = U \cap A$$

El carácter local de la continuidad, ahora en todo el conjunto A, suele usarse como sigue:

- *Supongamos que $A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ donde Λ es un conjunto arbitrario y, para cada $\lambda \in \Lambda$, A_λ es un abierto (relativo) de A. Para $f \in \mathcal{F}(A)$ se tiene que $f \in \mathcal{C}(A)$ si, y sólo si, $f|_{A_\lambda} \in \mathcal{C}(A_\lambda)$ para todo $\lambda \in \Lambda$.*

La estabilidad por diversas operaciones de la continuidad en un punto, nos hace ver que $\mathcal{C}(A)$ es un *subanillo* y también un *subespacio vectorial* de $\mathcal{F}(A)$. También que para $f,g \in \mathcal{C}(A)$ con $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, se tiene $f/g \in \mathcal{C}(A)$, así como que si $f \in \mathcal{C}(A)$ y $g \in \mathcal{C}(B)$ con $f(A) \subset B$, entonces $g \circ f \in \mathcal{C}(A)$. Con respecto a la función conjugada, las partes real e imaginaria, o el módulo de una función, para $f \in \mathcal{F}(A)$ tenemos claramente que

$$f \in \mathcal{C}(A) \iff \operatorname{Re} f, \operatorname{Im} f \in \mathcal{C}(A) \iff \overline{f} \in \mathcal{C}(A)$$

y también que $f \in \mathcal{C}(A) \Rightarrow |f| \in \mathcal{C}(A)$, siendo falsa la implicación recíproca.

Pasamos ahora a comentar las propiedades clave de las funciones continuas, que usaremos muy a menudo. Las agrupamos en un sólo enunciado, que incluye las versiones para funciones complejas de los teoremas de Weierstrass, de Heine y del valor intermedio. No son más que casos particulares de resultados válidos para funciones continuas entre espacios métricos:

Teorema. *Para un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y $f \in \mathcal{C}(A)$ se tiene:*

- *Si A es compacto, entonces $f(A)$ es compacto y f es uniformemente continua.*
- *Si A es conexo, entonces $f(A)$ es conexo.*

Comentamos brevemente las dos nociones que han aparecido en el enunciado anterior. Recordamos que $f \in \mathcal{F}(A)$ es **uniformemente continua** cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \; : \; z, w \in A, \; |z - w| < \delta \implies |f(z) - f(w)| < \varepsilon$$

y es evidente que entonces $f \in \mathcal{C}(A)$, pero en general el recíproco no es cierto, de ahí el interés del teorema de Heine.

Recordemos una condición suficiente para la continuidad uniforme. Decimos que $f \in \mathcal{F}(A)$ es **lipschitziana** cuando existe una constante $M \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$|f(z) - f(w)| \leqslant M|z - w| \qquad \forall z, w \in A$$

La mínima constante que verifica la desigualdad anterior es la *constante de Lipschitz* de f, que claramente viene dada por

$$M_0 = \sup \left\{ \frac{|f(z) - f(w)|}{|z - w|} \; : \; z, w \in A, z \neq w \right\}$$

Las funciones parte real, parte imaginaria y módulo, son lipschitzianas con constante $M_0 = 1$. En general, es obvio que *toda función lipschitziana es uniformemente continua,* pero sabemos que el recíproco es falso.

La otra noción que ha aparecido en el teorema anterior es la conexión de un subconjunto de $\mathbb{C}$, que desde luego es caso particular de la noción de espacio topológico conexo. Para $A \subset \mathbb{C}$, sabemos que A es **conexo** cuando no se puede expresar como unión de dos abiertos relativos, no vacíos y disjuntos. Ello equivale claramente a que $\emptyset$ y A sean los únicos subconjuntos simultáneamente abiertos y cerrados relativos de A. Así pues, denotando por $\mathcal{T}_A$ a la topología inducida en A por la topología de $\mathbb{C}$, tenemos:

$$\begin{aligned} A \text{ conexo } &\iff \big[\, U, V \in \mathcal{T}_A, \; A = U \cup V, \; U \cap V = \emptyset \;\Rightarrow\; U = \emptyset \text{ o bien } V = \emptyset \,\big] \\ &\iff \big[\, U \in \mathcal{T}_A, \; A \setminus U \in \mathcal{T}_A \;\Rightarrow\; U = \emptyset \text{ o bien } U = A \,\big] \end{aligned}$$

Consideremos el conjunto $\mathbb{Z}$ de los números enteros, aunque cualquier otro espacio con la topología discreta podría servir. Si $A \subset \mathbb{C}$ es conexo y $f \in \mathcal{C}(A)$ verifica que $f(A) \subset \mathbb{Z}$, el teorema anterior nos dice que $f(A)$ es un subconjunto conexo de $\mathbb{Z}$, es decir, f es constante. Recíprocamente, supongamos que toda función continua de A en $\mathbb{Z}$ es constante, para probar que A es conexo. Dado $U \in \mathcal{T}_A$ tal que $A \setminus U \in \mathcal{T}_A$, la función característica de U, definida por $f(z) = 1$ para todo $z \in U$ y $f(z) = 0$ para todo $z \in A \setminus U$, que es continua por el carácter local de la continuidad, ha de ser constante, lo que claramente implica que $U = \emptyset$, o bien, $U = A$. Hemos comprobado la siguiente caracterización de los subconjuntos conexos de $\mathbb{C}$, que a poco que se piense, es válida para cualquier espacio topológico:

$$A \text{ conexo} \iff \big[\, f \in \mathcal{C}(A),\ f(A) \subset \mathbb{Z} \ \Rightarrow\ f \text{ constante} \,\big]$$

2.8. Límite funcional

Recordemos primeramente la definición del conjunto A' de los puntos de acumulación de un conjunto $A \subset \mathbb{C}$, así como su caracterización secuencial. Para $\alpha \in \mathbb{C}$ se tiene

$$\begin{aligned} \alpha \in A' \iff & D(\alpha,\varepsilon) \cap (A \setminus \{\alpha\}) \neq \emptyset \quad \forall \varepsilon > 0 \\ \iff & \exists \{z_n\} \ :\ z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{z_n\} \to \alpha \end{aligned}$$

Pues bien, si $f \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$ y $L \in \mathbb{C}$, sabemos que

$$\begin{aligned} \lim_{z\to\alpha} f(z) = L \iff & \big[\, \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ :\ z \in A,\ 0 < |z-\alpha| < \delta \ \Rightarrow\ |f(z) - L| < \varepsilon \,\big] \\ \iff & \big[\, z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N},\ \{z_n\} \to \alpha \ \Rightarrow\ \{f(z_n)\} \to L \,\big] \end{aligned}$$

Es evidente que $\lim_{z\to\alpha} f(z) = L$ si, y sólo si, $\lim_{z\to\alpha} |f(z) - L| = 0$. En particular, tomando $L = 0$ tenemos que $\lim_{z\to\alpha} f(z) = 0$ si, y sólo si, $\lim_{z\to\alpha} |f(z)| = 0$.

También relacionamos claramente el límite de una función compleja con los de su parte real e imaginaria:

$$\lim_{z\to\alpha} f(z) = L \quad \iff \quad \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Re} f(z) = \operatorname{Re} L \ \text{ y } \ \lim_{z\to\alpha} \operatorname{Im} f(z) = \operatorname{Im} L$$

Recordemos ahora la relación entre límite funcional y continuidad:

- *Para $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in A \cup A'$, se pueden dar tres casos:*
  - (i) *Si $\alpha \in A \setminus A'$, entonces f es continua en el punto α.*
  - (ii) *Si $\alpha \in A \cap A'$, entonces f es continua en α si, y sólo si, $\lim_{z\to\alpha} f(z) = f(\alpha)$.*
  - (iii) *Finalmente, si $\alpha \in A' \setminus A$, entonces f tiene límite en el punto α si, y sólo si, existe una función $g \in \mathcal{F}\big(A \cup \{\alpha\}\big)$ que es continua en α y extiende a f, en cuyo caso se tiene $g(\alpha) = \lim_{z\to\alpha} f(z)$.*

Usaremos también la divergencia de funciones. Para $f \in \mathcal{F}(A)$ y $\alpha \in A'$, decimos que f diverge en el punto α, y escribimos $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, cuando $|f|$ diverge positivamente en dicho punto, es decir:

$$\begin{aligned} f(z) \to \infty \ (z \to \alpha) &\iff \big[\, \forall M \in \mathbb{R} \ \exists \delta > 0 \ : \ z \in A, \ 0 < |z - \alpha| < \delta \ \Rightarrow \ |f(z)| > M \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \setminus \{\alpha\} \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \alpha \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to \infty \,\big] \end{aligned}$$

Resaltamos el carácter local del límite funcional y de la divergencia en un punto:

- *Sean $f \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$. Fijado $\delta > 0$, sea g la restricción de f al conjunto $A \cap D(z, \delta)$. Entonces α es punto de acumulación de dicho conjunto y, para cualquier $L \in \mathbb{C}$, se tiene:*

  $$\lim_{z \to \alpha} f(z) = L \iff \lim_{z \to \alpha} g(z) = L$$

  Análogamente, f diverge en el punto α si, y sólo si, g diverge en α.

Las reglas para el cálculo de límites, o el estudio de la divergencia de funciones, son análogas a las que teníamos para sucesiones, y de hecho se deducen rutinariamente de ellas. Las reunimos en un enunciado:

- *Sean $f, g \in \mathcal{F}(A)$, $\alpha \in A'$ y $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Se tiene:*

  (i) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} |f(z)| = |\lambda|$

  (ii) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(f + g\big)(z) = \lambda + \mu$

  (iii) *Si* $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$ *y* g *está acotada, entonces* $\big(f + g\big)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$

  (iv) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = 0$ *y* g *está acotada, entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(f g\big)(z) = 0$

  (v) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} \big(f g\big)(z) = \lambda\mu$

  (vi) *Si* $\lim_{z \to \alpha} f(z) = \lambda \in \mathbb{C}^*$ *y* $g(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, *entonces* $(f g)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$

  (vii) *Si* $f(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$ *y* $g(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$, *entonces* $(f g)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$

  $(viii)$ *Si* $g(A) \subset \mathbb{C}^*$ *y* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = \mu \in \mathbb{C}^*$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} (1/g)(z) = 1/\mu$

  (ix) *Si* $g(A) \subset \mathbb{C}^*$, *entonces* $\lim_{z \to \alpha} g(z) = 0$ *si, y sólo si,* $(1/g)(z) \to \infty \ (z \to \alpha)$

Comentemos finalmente las nociones de límite y divergencia en el infinito de una función. Si el conjunto A no está acotado, $f \in \mathcal{F}(A)$ y $L \in \mathbb{C}$, definimos

$$\begin{aligned} \lim_{z \to \infty} f(z) = L &\iff \big[\, \forall \varepsilon > 0 \ \exists R > 0 \ : \ z \in A, \ |z| > R \ \Rightarrow \ |f(z) - L| < \varepsilon \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \infty \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to L \,\big] \end{aligned}$$

y con respecto a la divergencia, tenemos

$$\begin{aligned} f(z) \to \infty \ (z \to \infty) &\iff \big[\, \forall M \in \mathbb{R} \ \exists R > 0 \ : \ z \in A, \ |z| > R \ \Rightarrow \ |f(z)| > M \,\big] \\ &\iff \big[\, z_n \in A \ \forall n \in \mathbb{N}, \ \{z_n\} \to \infty \ \Rightarrow \ \{f(z_n)\} \to \infty \,\big] \end{aligned}$$

El comportamiento en el infinito de una función equivale al comportamiento en el origen de otra, que se obtiene de ella mediante un cambio de variable:

- *Sea A un conjunto no acotado y $f \in \mathcal{F}(A)$. Sea $B = \{w \in \mathbb{C}^* : 1/w \in A\}$ y consideremos la función $g \in \mathcal{F}(B)$ definida por $g(w) = f(1/w)$ para todo $w \in B$. Entonces $0 \in B'$ y para $L \in \mathbb{C}$ se tiene*

$$\lim_{z\to\infty} f(z) = L \iff \lim_{w\to 0} g(w) = L \iff \lim_{w\to 0} f(1/w) = L$$

Análogamente, f diverge en el infinito si, y sólo si, g diverge en el origen.

Esta equivalencia permite aplicar al límite y la divergencia en el infinito de una función todas las propiedades antes comentadas para el límite o la divergencia en un punto del plano.

2.9. Ejercicios

1. Estudiar la continuidad de la función argumento principal, $\arg : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}$.

2. Dado $\theta \in \mathbb{R}$, se considera el conjunto $S_\theta = \{z \in \mathbb{C}^* : \theta \notin \operatorname{Arg} z\}$. Probar que existe una función $\varphi \in \mathcal{C}(S_\theta)$ que verifica $\varphi(z) \in \operatorname{Arg}(z)$ para todo $z \in S_\theta$.

3. Probar que no existe ninguna función $\varphi \in \mathcal{C}(\mathbb{C}^*)$ tal que $\varphi(z) \in \operatorname{Arg} z$ para todo $z \in \mathbb{C}^*$, y que el mismo resultado es cierto, sustituyendo $\mathbb{C}^*$ por $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.

4. Probar que la función $\operatorname{Arg} : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ es continua, considerando en $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ la topología cociente. Más concretamente, se trata de probar que, si $\{z_n\}$ es una sucesión de números complejos no nulos, tal que $\{z_n\} \to z \in \mathbb{C}^*$ y $\theta \in \operatorname{Arg} z$, se puede elegir $\theta_n \in \operatorname{Arg} z_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$, de forma que $\{\theta_n\} \to \theta$.

5. Dado $z \in \mathbb{C}$, probar que la sucesión $\left\{\left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^n\right\}$ es convergente y calcular su límite.