Tema 4

Funciones analíticas

Vamos a analizar un importante método para construir funciones holomorfas, como límites de sucesiones de funciones polinómicas. Previamente discutimos la convergencia de series de números complejos, así como la de sucesiones y series de funciones complejas. Nos interesa un tipo muy particular de series de funciones, llamadas *series de potencias*, cuyas sumas parciales son funciones polinómicas de forma muy concreta. Tras estudiar la convergencia de una serie de potencias complejas y definir su dominio de convergencia, probaremos que su suma es una función holomorfa, de hecho indefinidamente derivable, en dicho dominio. Llegamos así al concepto de función *analítica* en un abierto del plano.

4.1. Series de números complejos

Por conveniencia de notación, trabajaremos principalmente con series cuyos sumandos se numeran empezando en 0. Por tanto, llamamos **serie de números complejos** a toda sucesión de la forma

$$\sum_{n\geqslant 0} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} z_k \right\} = \{S_n\} \tag{1}$$

donde $z_n \in \mathbb{C}$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Cuando dicha serie converge, como sucesión que es, a su límite le llamamos **suma de la serie** y escribimos:

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} z_k$$

Está claro que entonces la sucesión $\{z_n\}$, el *término general de la serie*, converge a cero:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} \big(S_{n+1} - S_n\big) = 0$$

Fijado, $m \in \mathbb{N}$ también podemos considerar la serie

$$\sum_{n\geqslant m} z_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n\geqslant 0} z_{m+n} = \left\{ \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k \right\} = \{T_n\} \tag{2}$$

La suma de esta nueva serie, cuando es convergente, se denota por

$$\sum_{n=m}^{\infty} z_n \overset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k$$

En vista de (1) y (2), para todo $n \in \mathbb{N}$ tenemos

$$S_{m+n} = \sum_{k=0}^{m-1} z_k + \sum_{k=m}^{m+n-1} z_k = \sum_{k=0}^{m-1} z_k + T_n$$

de donde deducimos que la convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant m} z_n$ equivale a la de $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ y, cuando ambas convergen, se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{m-1} z_n + \sum_{n=m}^{\infty} z_n$$

Volviendo a la serie definida en (1), para todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\operatorname{Re} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Re} z_k \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Im} S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \operatorname{Im} z_k$$

de donde deducimos que la serie de números complejos $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ es convergente si, y sólo si, las series de números reales $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Re} z_n$ y $\sum_{n\geqslant 0} \operatorname{Im} z_n$ convergen, en cuyo caso se tiene

$$\sum_{n=0}^{\infty} z_n = \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Re} z_n + i \sum_{n=0}^{\infty} \operatorname{Im} z_n$$

Así pues el estudio de la convergencia de una serie de números complejos se reduce a estudiar dos series de números reales. Sin embargo, frecuentemente no es necesario usar esta idea, como vamos a ver.

Se dice que la serie de números complejos $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ es **absolutamente convergente** cuando la serie de números reales no negativos $\sum_{n\geqslant 0} |z_n|$ es convergente. Razonando como en $\mathbb{R}$, pero usando el teorema de complitud de $\mathbb{C}$ en lugar del de $\mathbb{R}$, o bien considerando las series de partes reales e imaginarias y aplicando el criterio de comparación para series de términos no negativos, comprobamos el siguiente resultado clave:

- *Toda serie de números complejos absolutamente convergente es convergente.*

Además, si la serie $\sum_{n\geqslant 0} z_n$ converge absolutamente, es claro que

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} z_n \right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$$

4.2. Sucesiones de funciones complejas

Una **sucesión de funciones**, definidas en un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y con valores en $\mathbb{C}$, no es más que una sucesión de elementos de $\mathcal{F}(A)$, es decir, una aplicación $\varphi : \mathbb{N} \to \mathcal{F}(A)$, que como es habitual, denotamos por $\{f_n\}$, donde $f_n = \varphi(n) \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En lo que sigue, para evitar repeticiones, fijamos una tal sucesión $\{f_n\}$ y un conjunto no vacío $B \subset A$.

Se dice que $\{f_n\}$ **converge puntualmente** en B cuando, para todo $z \in B$, la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ es convergente. Tenemos entonces la función $f \in \mathcal{F}(B)$ dada por

$$f(z) = \lim_{n\to\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in B$$

y decimos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en B, o bien que f es límite puntual en B de la sucesión $\{f_n\}$. En lo que sigue suponemos que se verifica esta convergencia puntual.

Estamos por tanto suponiendo que

$$\forall z \in B \;\; \forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$$

donde, en principio, m depende de ε y de z. Cuando podemos conseguir que m sólo dependa de ε pero no del punto $z \in B$ considerado, decimos que la convergencia es uniforme en B.

Así pues, $\{f_n\}$ **converge uniformemente** a f en B cuando

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; |f_n(z) - f(z)| < \varepsilon \;\; \forall z \in B \tag{3}$$

Tomando por ejemplo $\varepsilon = 1$ obtenemos $p \in \mathbb{N}$ tal que para $n \geqslant p$ la función $f_n - f$ está acotada en B. Entonces, para cualquier $\varepsilon > 0$, en (3) siempre podemos tomar $m \geqslant p$, con lo que (3) resulta equivalente a

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists m \in \mathbb{N} \, : \, n \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; \sup \big\{ |f_n(z) - f(z)| \, : \, z \in B \big\} < \varepsilon$$

Esto equivale a que $\{\alpha_n\} \to 0$, donde $\alpha_n = \big\{ \sup\{|f_n(z) - f(z)| : z \in B\}\big\}$ para $n \geqslant p$, sin que obviamente sea necesario especificar el valor de α_n para $n < p$. Obtenemos así un criterio útil para probar la convergencia uniforme, siempre que conozcamos la función f:

- *La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B si, y sólo si, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant p$ la función $f_n - f$ está acotada en B y*

$$\lim_{n\to\infty} \sup \big\{ |f_n(z) - f(z)| \, : \, z \in B \big\} = 0 \tag{4}$$

Este criterio se puede reformular de una manera que tiene especial utilidad cuando queremos probar que la convergencia no es uniforme:

- *Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*
  (i) *$\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B.*
  (ii) *Para toda sucesión $\{z_n\}$ de puntos de B, se tiene que $\{f_n(z_n) - f(z_n)\} \to 0$.*

$(i) \Rightarrow (ii)$. Sea $z_n \in B$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para cada $\varepsilon > 0$ existe $m \in \mathbb{N}$ tal que, si $n \geqslant m$ se tiene $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ para todo $z \in B$ y, en particular, $|f_n(z_n) - f(z)| < \varepsilon$.

$(ii) \Rightarrow (i)$. Fijado $n \in \mathbb{N}$, si la función $f_n - f$ no está acotada en B, existe $z_n \in B$ tal que $|f(z_n) - f(z_n)| > n$, y en otro caso podemos tomar $z_n \in B$ de forma que

$$\sup\big\{\, |f_n(z) - f(z)| \,:\, z \in B \big\} < |f_n(z_n) - f(z_n)| + \frac{1}{n} \tag{5}$$

Por (ii) tenemos $\{f_n(z_n) - f(z_n)\} \to 0$, con lo que el conjunto $\{n \in \mathbb{N} : |f_n(z_n) - f(z_n)| > n\}$ ha de ser finito, luego existe $p \in \mathbb{N}$ tal que, para $n \geqslant p$ la función $f_n - f$ está acotada en B y se verifica (5). Pero entonces es claro que también se cumple (4), luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B. ■

Ejemplo. Para ilustrar los criterios anteriores, consideremos la sucesión $\{f_n\}$ dada por

$$f_n(z) = z^n \qquad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Es claro que $\{z^n\} \to 0$ para todo $z \in D(0,1)$, mientras $\{z^n\} \to \infty$ para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \overline{D}(0,1)$. Si $z \in \mathbb{T}$, $\{z^n\}$ sólo es convergente cuando $z = 1$. En efecto, de $\{z^n\} \to u \in \mathbb{T}$, deducimos $\{z^{n+1}\} \to u$, pero $\{z^{n+1}\} = \{z^n z\} \to uz$, luego $uz = u$ y $z = 1$ como queríamos. En resumen, para $z \in \mathbb{C}$ vemos que $\{z^n\}$ es convergente si, y sólo si, $z \in D(0,1) \cup \{1\}$. Definiendo

$$f(z) = 0 \quad \forall z \in D(0,1) \qquad \text{y} \qquad f(1) = 1$$

tenemos que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en $D(0,1) \cup \{1\}$.

Dado ahora un conjunto no vacío $B \subset D(0,1) \cup \{1\}$, y excluyendo el caso trivial $B = \{1\}$, vamos a comprobar que $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B si, y sólo si, $\rho < 1$, donde $\rho = \sup\big\{\, |z| : z \in B \setminus \{1\} \big\}$.

Fijado $n \in \mathbb{N}$, puesto que $f_n(1) = f(1)$, vemos que

$$\sup\big\{\, |f_n(z) - f(z)| : z \in B \big\} = \sup\big\{\, |z|^n : z \in B \setminus \{1\} \big\} = \rho^n$$

Cuando $\rho < 1$ tenemos $\{\rho^n\} \to 0$ y usando (4) deducimos la convergencia uniforme en B. En cambio, si $\rho = 1$, para $n \in \mathbb{N}$ tomamos $z_n \in B$ tal que $n/(n+1) < |z_n| < 1$, con lo que

$$|f_n(z_n) - f(z_n)| = |z_n|^n > \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \qquad \forall n \in \mathbb{N}$$

luego $\{f_n(z_n) - f(z_n)\}$ no converge a cero y $\{f_n\}$ no converge uniformemente en B. ■

Nótese que la convergencia puntual tendría perfecto sentido para sucesiones de funciones definidas en un conjunto no vacío A totalmente arbitrario, con valores en cualquier espacio topológico. Para la convergencia uniforme, el conjunto de definición puede ser arbitrario, pero las funciones deben tomar valores en un espacio métrico. Cuando dicho espacio métrico es completo, como le ocurre a $\mathbb{C}$, tenemos un criterio de Cauchy para la convergencia uniforme. Su utilidad estriba, como ocurre con todos los criterios de este tipo, en que nos permite probar la convergencia uniforme de una sucesión de funciones, sin conocer la función límite, como ocurre sobre todo cuando trabajamos con series de funciones.

Volvamos a nuestra sucesión $\{f_n\}$ de funciones definidas en $A \subset \mathbb{C}$ y sea B un subconjunto no vacío de A. Decimos que $\{f_n\}$ es **uniformemente de Cauchy** en B cuando:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, m \in \mathbb{N} \, : \, p,q \geqslant m \;\; \Rightarrow \;\; |\, f_p(z) - f_q(z)\,| < \varepsilon \;\; \forall z \in B \tag{6}$$

Si $\{f_n\}$ converge uniformemente en B a una función $f \in \mathcal{F}(B)$, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $m \in \mathbb{N}$ de forma que, para $n \geqslant m$ y $z \in B$ se tenga $|\, f_n(z) - f(z)\,| < \varepsilon/2$. Entonces, para $p,q \geqslant m$ y $z \in B$ se tiene

$$|\, f_p(z) - f_q(z)\,| \leqslant |\, f_p(z) - f(z)\,| + |\, f(z) - f_q(z)\,| < \varepsilon$$

luego $\{f_n\}$ es uniformemente de Cauchy en B.

Recíprocamente, supongamos que se cumple (6). Entonces, para cada $z \in B$, la sucesión de números complejos $\{f_n(z)\}$ es de Cauchy, luego convergente. Tenemos por tanto una función $f \in \mathcal{F}(B)$ tal que $\{f_n\}$ converge puntualmente a f en B. Además, podemos aplicar (6) al número positivo $\varepsilon/2$, y fijar tanto $z \in B$ como $p \geqslant m$. Tomando $q = p + n$ tenemos

$$|\, f_p(z) - f_{p+n}(z)\,| < \varepsilon/2 \;\; \forall n \in \mathbb{N}\,, \qquad \text{luego} \quad |\, f_p(z) - f(z)\,| \leqslant \varepsilon/2 < \varepsilon$$

Esta última desigualdad es válida para todo $z \in B$ siempre que se tenga $p \geqslant m$, y está claro que m no depende de z, luego $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en B. Hemos probado:

- *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f_n \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en un conjunto $B \subset A$ si, y sólo si, es uniformemente de Cauchy en B.*

Resaltamos finalmente la principal ventaja de la convergencia uniforme frente a la puntual: permite deducir la continuidad de la función límite a partir de la continuidad de los términos de la sucesión.

- *Sea $A \subset \mathbb{C}$ y $f_n \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Supongamos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en A a una función $f \in \mathcal{F}(A)$. Si f_n es continua en un punto $z \in A$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces f es continua en z.*

Fijado $\varepsilon > 0$, la convergencia uniforme nos proporciona un $m \in \mathbb{N}$ tal que:

$$n \geqslant m \quad \Longrightarrow \quad |\, f_n(w) - f(w)\,| < \varepsilon/3 \quad \forall w \in A$$

Por otra parte, la función f_m es continua en el punto z, luego existe $\delta > 0$ tal que

$$w \in A\,, \;\; |w - z| < \delta \;\; \Longrightarrow \;\; |\, f_m(w) - f_m(z)\,| < \varepsilon/3$$

Entonces, para $w \in A$ con $|w - z| < \delta$ tenemos

$$|\, f(w) - f(z)\,| \leqslant |\, f(w) - f_m(w)\,| + |\, f_m(w) - f_m(z)\,| + |\, f_m(z) - f(z)\,| < \varepsilon$$

lo que demuestra que f es continua en el punto z. ■

4.3. Series de funciones complejas

Todo lo dicho anteriormente sobre sucesiones de funciones se aplica obviamente a las series de funciones, para las que también prestaremos atención a la convergencia absoluta.

Dado $A \subset \mathbb{C}$, llamamos **serie de funciones** definidas en A, a toda sucesión de la forma

$$\sum_{n \geqslant 0} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \sum_{k=0}^{n-1} f_k \right\} \tag{7}$$

donde $f_n \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Es claro que dicha serie **converge puntualmente** en un conjunto $B \subset A$ cuando, para cada $z \in B$, la serie de números $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n(z)$ es convergente. Definimos entonces en B la **suma de la serie**, que es la función $f \in \mathcal{F}(B)$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in B$$

La convergencia puntual de nuestra serie en un conjunto B implica claramente que $\{f_n(z)\} \to 0$ para todo $z \in B$, es decir, la sucesión de funciones $\{f_n\}$, *término general* de la serie, converge puntualmente en B a la función idénticamente nula.

Fijado $p \in \mathbb{N}$, podemos también considerar la serie de funciones

$$\sum_{n \geqslant p} f_n \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{n \geqslant 0} f_{p+n} = \left\{ \sum_{k=p}^{p+n-1} f_k \right\} \tag{8}$$

Es claro que la convergencia puntual de esta nueva serie en cualquier conjunto $B \subset A$, equivale a la de la serie que aparece en (7), en cuyo caso tendremos

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z) = \sum_{n=0}^{p-1} f_n(z) + \sum_{n=p}^{\infty} f_n(z) \qquad \forall z \in B \tag{9}$$

Como sucesión de funciones que es, la serie $\sum\limits_{n \geqslant 0} f_n$ puede converger uniformemente en B. Usando (9) esta **convergencia uniforme** se expresa como sigue:

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists m \in \mathbb{N} \ : \ n \geqslant m \ \Rightarrow \ \left| \sum_{k=n}^{\infty} f_k(z) \right| < \varepsilon \ \forall z \in B \tag{10}$$

Esto implica claramente que para $n \geqslant m$ se tiene $|f_n(z)| < 2\varepsilon$ para todo $z \in B$. Por tanto:

- *Si una serie de funciones converge uniformemente en un conjunto, entonces su término general converge uniformemente en dicho conjunto a la función idénticamente nula.*

Fijado $p \in \mathbb{N}$, también es fácil ver que la convergencia uniforme en un conjunto de la serie definida en (8) equivale a la de la serie que aparece en (7), igual que ocurría con la convergencia puntual.

La condición (10) para la convergencia uniforme no es fácil de manejar. Además, los dos criterios antes obtenidos para la convergencia uniforme de sucesiones de funciones, obviamente son válidos para series, pero tampoco se usan con comodidad. En la práctica, el problema es que rara vez se conoce explícitamente la suma de una serie de funciones. Enseguida veremos un criterio muy útil para trabajar con series de funciones, pero comentemos previamente la convergencia absoluta de tales series.

Naturalmente, decimos que la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ **converge absolutamente** en B cuando la serie $\sum_{n\geqslant 0} |f_n(z)|$ es convergente para todo $z \in B$, en cuyo caso está claro que $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ converge puntualmente en B y se tendrá

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} f_n(z)\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |f_n(z)| \qquad \forall z \in B$$

Por comparación con una serie convergente de números reales positivos, conseguimos a la vez la convergencia absoluta y la uniforme de una serie de funciones. Este es el criterio de convergencia para series de funciones que siempre vamos a usar:

Test de Weierstrass. *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *una serie de funciones complejas, definidas en un conjunto* $A \subset \mathbb{C}$, *y sea* $B \subset A$. *Supongamos que, para cada* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *existe una constante* $M_n \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$|f_n(z)| \leqslant M_n \qquad \forall z \in B$$

Si la serie de números reales $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ *es convergente, entonces la serie de funciones* $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ *converge absoluta y uniformemente en* B.

La convergencia absoluta se deduce del criterio de comparación para series de números reales no negativos: la serie $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ es convergente, luego la serie $\sum_{n\geqslant 0} |f_n(z)|$ es convergente para todo $z \in B$.

Con vistas a probar la convergencia uniforme, para cualesquiera $n \in \mathbb{N}$ y $z \in B$ escribimos

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} f_k(z) \qquad \text{y} \qquad \sigma_n = \sum_{k=0}^{n-1} M_k$$

Dados $p,q \in \mathbb{N}$, con $q < p$, para todo $z \in B$ tenemos

$$|S_p(z) - S_q(z)| = \left|\sum_{k=q}^{p-1} f_n(z)\right| \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} |f_k(z)| \leqslant \sum_{k=q}^{p-1} M_k = \sigma_p - \sigma_q = |\sigma_p - \sigma_q|$$

La desigualdad así obtenida es trivial cuando $p = q$ y no se altera al intercambiar p y q, luego:

$$|S_p(z) - S_q(z)| \leqslant |\sigma_p - \sigma_q| \quad \forall p,q \in \mathbb{N} \ \forall z \in B$$

Por hipótesis, la serie $\sum_{n\geqslant 0} M_n$ es convergente, es decir, $\{\sigma_n\}$ es una sucesión de Cauchy. De la desigualdad anterior deducimos claramente que $\{S_n\}$ es uniformemente de Cauchy en B, luego converge uniformemente en B, como queríamos demostrar. ■

4.4. Series de potencias

Presentamos ya las series de funciones complejas que más nos interesan, porque permitirán construir abundantes ejemplos de funciones holomorfas en ciertos dominios del plano.

Una **serie de potencias**, centrada en un punto $a \in \mathbb{C}$, es una serie de funciones $\sum_{n \geqslant 0} f_n$ donde, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función $f_n \in \mathcal{F}(\mathbb{C})$ viene dada por

$$f_n(z) = \alpha_n (z-a)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}$$

con $\alpha_n \in \mathbb{C}$. Dicha serie se denota simplemente por $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$, notación que no nos debe confundir: no hemos fijado $z \in \mathbb{C}$ para tener una serie de números complejos, sino que z es variable y tenemos una serie de funciones, la sucesión de funciones polinómicas dada por

$$S_n(z) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k (z-a)^k \quad \forall z \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El resultado clave para estudiar la convergencia de una serie de potencias es el siguiente:

Lema de Abel. *Dado $\rho \in \mathbb{R}^+$, supongamos que la sucesión $\{|\alpha_n| \rho^n\}$ está mayorada. Entonces la serie de potencias $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ converge absolutamente en el disco abierto $D(a,\rho)$ y uniformemente en cada compacto K que esté contenido en dicho disco.*

Demostración. Existe $M \in \mathbb{R}^+$ tal que $|\alpha_n| \rho^n \leqslant M$ para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Fijado un compacto $K \subset D(a,\rho)$, sea $r = \max\{|z-a| : z \in K\}$, que verifica $r < \rho$. Entonces, para cualesquiera $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ y $z \in K$ se tiene

$$|\alpha_n (z-a)^n| \leqslant |\alpha_n| r^n = |\alpha_n| \rho^n \left(\frac{r}{\rho}\right)^n \leqslant M \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$$

Como la serie geométrica $\sum_{n \geqslant 0} \left(\frac{r}{\rho}\right)^n$ es convergente, el test de Weierstrass nos dice que nuestra serie de potencias converge absoluta y uniformemente en K. Para cada $z \in D(a,\rho)$ podemos tomar $K = \{z\}$, luego tenemos convergencia absoluta en $D(a,\rho)$. ■

A partir de este lema podemos obtener abundante información sobre la convergencia de cualquier serie de potencias. Para estudiar la convergencia de la serie $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$, seguimos una clara estrategia: aplicar el lema de Abel con ρ tan grande como sea posible. Consideramos por tanto el conjunto

$$\Lambda = \left\{\rho \in \mathbb{R}^+ : \{|\alpha_n| \rho^n\} \text{ está mayorada}\right\}$$

y cabe distinguir tres casos, en cada uno de los cuales vamos a definir el **radio de convergencia** de nuestra serie de potencias, que denotaremos por R.

- Si $\Lambda = \emptyset$, el radio de convergencia es cero: $R = 0$.
- Si $\Lambda \neq \emptyset$ y Λ no está mayorado, el radio de convergencia es infinito: $R = \infty$.
- Finalmente, si $\Lambda \neq \emptyset$ y Λ está mayorado, el radio de convergencia es: $R = \sup \Lambda$.

Conociendo el radio de convergencia R, describimos con bastante precisión la convergencia de nuestra serie de potencias:

- *Sea R el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$. *Se tiene:*
  - (i) *Si $R \in \mathbb{R}^+$, la serie converge absolutamente en $D(a,R)$, converge uniformemente en cada compacto $K \subset D(a,R)$ y no converge en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \overline{D}(a,R)$.*
  - (ii) *Si $R = \infty$, la serie converge absolutamente en $\mathbb{C}$ y uniformemente en cada compacto $K \subset \mathbb{C}$.*
  - (iii) *Si $R = 0$, la serie no converge en ningún punto de $\mathbb{C} \setminus \{a\}$.*

Si $R \in \mathbb{R}^+$ y K es un compacto con $K \subset D(a,R)$, tendremos $\text{máx}\{|z-a| : z \in K\} < R$, luego por definición de R, existirá $\rho \in \Lambda$ tal que $K \subset D(a,\rho)$. El lema de Abel nos dice que la serie converge absoluta y uniformemente en K. En particular, converge absolutamente en $D(a,R)$.

Cuando $R = \infty$, el razonamiento anterior es válido para cualquier compacto $K \subset \mathbb{C}$, puesto que siempre existe $\rho \in \Lambda$ tal que $K \subset D(a,\rho)$. Esto demuestra (ii).

Volviendo al caso $R \in \mathbb{R}^+$, sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z-a| > R$. Entonces $|z-a| \in \mathbb{R}^+ \setminus \Lambda$, luego la sucesión $\{\alpha_n (z-a)^n\}$ no está acotada, mucho menos puede converger a cero, así que la serie de potencias no converge en el punto z. Esto completa la demostración de (i).

En el caso $R = 0$, el último razonamiento es válido para todo $z \in \mathbb{C} \setminus \{a\}$, pues entonces $|z-a| \in \mathbb{R}^+ \setminus \Lambda$. Por tanto la serie sólo converge en el punto a, lo que demuestra (iii). ■

Comentemos las preguntas que no tienen una respuesta general, conociendo sólo el radio de convergencia de una serie de potencias. En el caso $R = \infty$ cabe preguntar si la serie converge uniformemente en $\mathbb{C}$. Cuando $R \in \mathbb{R}^+$, nada hemos dicho sobre el comportamiento de la serie en la circunferencia de centro a y radio R, y también cabría preguntarse si hay convergencia uniforme en $D(a,R)$ o incluso en $\overline{D}(a,R)$. Veremos con ejemplos que estas preguntas no tienen una respuesta general, habría que estudiarlas en cada caso concreto.

Concluimos el estudio de la convergencia de una serie de potencias, dando un método muy expeditivo para calcular el radio de convergencia. Como dicho radio no depende del punto a en el que centramos la serie, suponemos sin perder generalidad que $a = 0$.

Fórmula de Cauchy-Hadamard. *Sea R el radio de convergencia de la serie* $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n z^n$.

(i) *Si la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\}$ no está mayorada, entonces $R = 0$.*
(ii) *Si $\left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\} \to 0$, entonces $R = \infty$.*
(iii) *En otro caso se tiene:*

$$R = \frac{1}{\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\}} \tag{7}$$

Demostración. Basta estudiar la convergencia absoluta de la serie de potencias, aplicando el criterio de la raíz para series de números reales no negativos, lo que nos lleva a estudiar, para cada $z \in \mathbb{C}$, la sucesión

$$\left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|} \right\} = \left\{ |z| \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\}$$

(i). Para todo $z \in \mathbb{C}^*$, la sucesión anterior no está mayorada, y el criterio de la raíz nos dice que la serie de potencias no converge absolutamente en z, luego $R = 0$.

(ii). En este caso tenemos $\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|} \right\} = 0 < 1$, para todo $z \in \mathbb{C}$ y el criterio de la raíz nos dice que la serie de potencias converge absolutamente en $\mathbb{C}$, luego $\mathbb{R} = \infty$.

(iii). Excluidos los casos (i) y (ii) podemos escribir $\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\} = \lambda \in \mathbb{R}^+$ y, para todo $z \in \mathbb{C}$ tenemos claramente

$$\limsup \left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n z^n|} \right\} = \lambda |z|$$

El criterio de la raíz nos dice que la serie de potencias converge absolutamente en el punto z cuando $|z| < 1/\lambda$, y no lo hace cuando $|z| > 1/\lambda$, luego $R = 1/\lambda$. ■

Ha quedado claro que siempre se presenta uno, y sólo uno, de los tres casos del enunciado, luego las tres implicaciones dadas son en realidad equivalencias. La igualdad (7) es la fórmula de Cauchy-Hadamard y se puede entender que el radio de convergencia siempre viene dado por dicha fórmula. Concretamente, en el caso (i) podemos entender que el límite superior es $+\infty$ y que $R = 1/+\infty = 0$, mientras en el caso (ii) podemos entender que $R = 1/0 = \infty$.

Naturalmente, a la hora de estudiar la sucesión $\left\{ \sqrt[n]{|\alpha_n|} \right\}$, puede ser útil el criterio de la raíz para sucesiones de números positivos, que nos da directamente lo siguiente:

- *Supongamos que* $\alpha_n \in \mathbb{C}^*$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$*, y sea* R *el radio de convergencia de la serie de potencias* $\sum_{n \geqslant 0} \alpha_n z^n$.

  (i) *Si* $\left\{ \alpha_{n+1}/\alpha_n \right\} \to \infty$*, entonces* $R = 0$.

  (ii) *Si* $\left\{ \alpha_{n+1}/\alpha_n \right\} \to 0$*, entonces* $R = \infty$.

  (iii) *Si* $\left\{ |\alpha_{n+1}|/|\alpha_n| \right\} \to \lambda \in \mathbb{R}^+$*, entonces* $R = 1/\lambda$.

Vamos a comentar algunos ejemplos, en los que calculamos el radio de convergencia de una serie de potencias y contestamos algunas preguntas adicionales.

Como primer ejemplo sencillo, la serie $\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^n}{n^n}$ tiene obviamente radio de convergencia ∞. Es fácil ver que su término general no converge uniformemente en $\mathbb{C}$, luego la serie tampoco. Invirtiendo sus coeficientes obtenemos la serie $\sum_{n \geqslant 1} n^n z^n$, que tiene radio de convergencia cero.

Consideremos la **serie geométrica** $\sum_{n \geqslant 0} z^n$, que obviamente tiene radio de convergencia 1. Su suma se calcula exactamente igual que cuando la razón es un número real. Concretamente, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $z \in \mathbb{C}$ se tiene

$$(z-1) \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=0}^{n-1} z^{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = \sum_{k=1}^{n} z^k - \sum_{k=0}^{n-1} z^k = z^n - 1$$

Para $z \in D(0,1)$ tenemos $\{z^n\} \to 0$ y deducimos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad \forall z \in D(0,1)$$

Observamos que para $z \in \mathbb{T}$, la sucesión $\{z^n\}$ no converge a cero, luego la serie geométrica no converge en ningún punto de $\mathbb{T}$, que es la circunferencia centrada en el origen con radio igual al de convergencia.

De hecho, el término general de la serie geométrica se estudió como ejemplo de sucesión de funciones, y vimos que no converge uniformemente en ningún conjunto $B \subset D(0,1)$ tal que $\sup\{|z| : z \in B\} = 1$, luego la serie geométrica no converge uniformemente en $D(0,1)$.

Como último ejemplo, la serie $\sum_{n\geqslant 1} \frac{z^n}{n^2}$ también tiene radio de convergencia 1, pero se comporta de manera totalmente opuesta a como lo hace la serie geométrica. Ahora tenemos

$$\left|\frac{z^n}{n^2}\right| \leqslant \frac{1}{n^2} \qquad \forall z \in \overline{D}(0,1) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

y el test de Weierstrass nos dice que tenemos convergencia absoluta y uniforme en $\overline{D}(0,1)$.

Los dos últimos ejemplos ponen de manifiesto que en general, si sólo conocemos el radio de convergencia R de una serie de potencias centrada en un punto $a \in \mathbb{C}$, nada podemos afirmar sobre el comportamiento de la serie en la circunferencia de centro a y radio R, ni sobre la convergencia uniforme en $D(a,R)$. Hemos visto que pueden darse los dos casos extremos y podríamos dar ejemplos de situaciones intermedias. En realidad no vamos a profundizar en este tema, que forma parte del Análisis de Fourier.

4.5. La suma de una serie de potencias

Nuestro próximo objetivo es estudiar la función que se obtiene como suma de una serie de potencias. Esto carece de sentido cuando la serie tiene radio de convergencia cero, en cuyo caso diremos que la serie de potencias es *trivial*. Para una serie de potencias no trivial, centrada en $a \in \mathbb{C}$ y con radio de convergencia R, definimos su **dominio de convergencia** Ω de la siguiente forma: $\Omega = D(a,R)$ cuando $R \in \mathbb{R}^+$ y $\Omega = \mathbb{C}$ cuando $R = \infty$. Obsérvese que en ambos casos, Ω es el interior del conjunto de puntos del plano en los que la serie converge. De toda la discusión anterior acerca de la convergencia de las series de potencias, resaltamos lo que realmente nos interesa:

- *Si Ω es el dominio de convergencia de una serie de potencias no trivial, entonces la serie converge absolutamente en Ω y uniformemente en cada compacto $K \subset \Omega$.*

Si $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ es una serie de potencias no trivial y Ω su dominio de convergencia, definimos la **suma de la serie** como la función $f : \Omega \to \mathbb{C}$ dada por

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n \qquad \forall z \in \Omega$$

Usando la convergencia uniforme de la serie en cada subconjunto compacto de Ω, junto con el carácter local de la continuidad, sería fácil comprobar que f es continua, pero vamos a probar algo mejor. Concretamente, vamos a ver que f es holomorfa en Ω y que f' es la suma de la serie de potencias que se obtiene al derivar término a término la de partida:

$$\sum_{n\geqslant 1} n\,\alpha_n\,(z-a)^{n-1} = \sum_{n\geqslant 0}(n+1)\alpha_{n+1}(z-a)^n$$

Para que tal afirmación tenga sentido, el dominio de convergencia de esta nueva serie deberá contener a Ω. Empezamos viendo que, de hecho, coincide con Ω.

Lema. *Las series de potencias* $\sum\limits_{n\geqslant 0}\alpha_n\,(z-a)^n$ *y* $\sum\limits_{n\geqslant 0}(n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n$ *tienen el mismo radio de convergencia.*

Demostración. Sean respectivamente R y R_1 los radios de convergencia de las series en cuestión. Para ver que $R = R_1$ se puede usar la fórmula de Cauchy-Hadamard, junto con propiedades elementales del límite superior de una sucesión de números reales no negativos. Preferimos usar la definición de R y R_1, así que consideramos los conjuntos

$$\Lambda = \big\{\rho\in\mathbb{R}^+ \,:\, \{|\alpha_n|\,\rho^n\}\text{ mayorada}\big\} \quad \text{y}$$
$$\Lambda_1 = \big\{\rho\in\mathbb{R}^+ \,:\, \{(n+1)|\alpha_{n+1}|\,\rho^n\}\text{ mayorada}\big\}$$

Es fácil ver que $\Lambda_1\subset\Lambda$. En efecto, si $\rho\in\Lambda_1$ y $M_1\in\mathbb{R}^+$ verifica $(n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,\rho^n\leqslant M_1$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, tenemos claramente

$$|\alpha_{n+1}|\,\rho^{n+1}\leqslant\frac{M_1\,\rho}{n+1}\leqslant M_1\,\rho \quad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

y deducimos que la sucesión $\{|\alpha_n|\,\rho^n\}$ está mayorada, es decir, $\rho\in\Lambda$.

En el otro sentido, vamos a ver que si $\rho\in\Lambda$ y $r\in\,]0,\rho[$, entonces $r\in\Lambda_1$. Para ello, si $M\in\mathbb{R}^+$ verifica que $|\alpha_n|\,\rho^n\leqslant M$ para todo $n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$, tenemos

$$(n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,r^n = |\alpha_{n+1}|\,\rho^{n+1}\,\frac{n+1}{\rho}\left(\frac{r}{\rho}\right)^n\leqslant\frac{M}{\rho}\,(n+1)\left(\frac{r}{\rho}\right)^n \qquad \forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$$

Puesto que $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,(r/\rho)^n = 0$, deducimos que $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,r^n = 0$ y, en particular, $r\in\Lambda_1$. En resumen, para $\rho\in\mathbb{R}^+$ hemos probado que

$$\rho\in\Lambda_1 \implies \rho\in\Lambda \implies \,]0,\rho[\,\subset\Lambda_1$$

A partir de estas dos implicaciones, la igualdad $R_1 = R$ es ya evidente. Si $\Lambda=\emptyset$, la primera implicación nos dice que $\Lambda_1=\emptyset$ luego $R_1 = R = 0$. Si $\Lambda\neq\emptyset$ y Λ no está mayorado, la segunda implicación nos dice que lo mismo le ocurre a Λ_1, luego $R_1 = R = \infty$. Finalmente, si $\Lambda\neq\emptyset$ y Λ está mayorado, la segunda implicación nos dice que $\Lambda_1\neq\emptyset$, y la primera que Λ_1 está mayorado con $\sup\Lambda_1\leqslant\sup\Lambda$, pero esta desigualdad ha de ser una igualdad, pues en otro caso tomaríamos $\rho\in\Lambda$ tal que $\sup\Lambda_1<\rho$ y $r\in\mathbb{R}^+$ tal que $\sup\Lambda_1<r<\rho$, con lo que la segunda implicación nos diría que $r\in\Lambda_1$, una contradicción. Así pues, en este último caso queda también probado que $R_1 = \sup\Lambda_1 = \sup\Lambda = R$. ■

Pasamos ya a probar la holomorfía de la suma de una serie de potencias:

Teorema. *Sea f la suma de una serie de potencias no trivial, es decir, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n$ para todo $z \in \Omega$, donde Ω es el dominio de convergencia de la serie. Entonces $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con*

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\,\alpha_{n+1}\,(z-a)^n = \sum_{n=1}^{\infty} n\,\alpha_n\,(z-a)^{n-1} \qquad \forall z \in \Omega$$

Demostración. Trasladamos el problema al origen, definiendo $\Omega_0 = \{z-a : z \in \Omega\}$, que es el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n\, w^n$, cuya suma viene dada por

$$g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n\, w^n \qquad \forall w \in \Omega_0$$

Tenemos claramente $f(z) = g(z-a)$ para todo $z \in \Omega$, luego trabajamos con g, para luego aplicar la regla de la cadena. Nótese que se tiene $\Omega_0 = \mathbb{C}$, o bien $\Omega_0 = D(0,R)$ con $R \in \mathbb{R}^+$, según sea $\Omega = \mathbb{C}$, o bien $\Omega = D(a,R)$ respectivamente.

Fijamos $b \in \Omega_0$ para probar que g es derivable en b y calcular $g'(b)$. Observamos que existe $\delta > 0$ tal que $|b| + \delta \in \Omega_0$ y $\overline{D}(b,\delta) \subset \Omega_0$. Si $\Omega_0 = \mathbb{C}$, δ puede ser arbitrario, y en otro caso tenemos $\Omega_0 = D(0,R)$ con $0 \leqslant |b| < R$, luego basta tomar $0 < \delta < R - |b|$, pues entonces es obvio que $|b| + \delta \in D(0,R)$ y que para $w \in \overline{D}(b,\delta)$ se tiene $|w| \leqslant |b| + \delta < R$.

Por el lema anterior, el dominio de convergencia de la serie $\sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,\alpha_{n+1}\, w^n$ es Ω_0, luego dicha serie converge absolutamente en el punto $|b| + \delta$. Anotemos este hecho:

$$\text{la serie } \sum_{n\geqslant 0} (n+1)\,|\alpha_{n+1}|\,\big(|b| + \delta\big)^n \text{ converge} \tag{8}$$

Pues bien, para todo $w \in \Omega_0$ tenemos

$$g(w) - g(b) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\,(w^n - b^n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1}\,(w^{n+1} - b^{n+1})$$

luego, para $w \in \Omega_0 \setminus \{b\}$ será

$$g_b(w) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{n+1} \frac{w^{n+1} - b^{n+1}}{w - b} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\alpha_{n+1} \sum_{k=0}^{n} w^{n-k}\, b^k \right) \tag{9}$$

donde, para la última igualdad, hemos usado algo bien conocido:

$$\begin{aligned}(w - b) \sum_{k=0}^{n} w^{n-k}\, b^k &= \sum_{k=0}^{n} w^{n-k+1}\, b^k - \sum_{k=0}^{n} w^{n-k}\, b^{k+1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} w^{n-k+1}\, b^k - \sum_{k=1}^{n+1} w^{n-k+1}\, b^k = w^{n+1} - b^{n+1}\end{aligned}$$

Considerando, para cada $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, la función polinómica P_n definida por

$$P_n(w) = \alpha_{n+1} \sum_{k=0}^{n} w^{n-k} b^k \quad \forall w \in \mathbb{C}$$

la igualdad (9) nos dice que la serie $\sum_{n \geqslant 0} P_n$ converge puntualmente en $\Omega_0 \setminus \{b\}$ a la función g_b cuyo límite en el punto b pretendemos calcular. Estudiemos pues dicha serie con más detalle.

Para cualesquiera $w \in \overline{D}(b,\delta)$ y $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ tenemos

$$\begin{aligned} |P_n(w)| &\leqslant |\alpha_{n+1}| \sum_{k=0}^{n} |w|^{n-k} |b|^k \leqslant |\alpha_{n+1}| \sum_{k=0}^{n} \big(|b| + \delta\big)^{n-k} \big(|b| + \delta\big)^k \\ &= (n+1) |\alpha_{n+1}| \big(|b| + \delta\big)^n \end{aligned}$$

En vista de (8), el test de Weierstrass nos dice que la serie $\sum_{n \geqslant 0} P_n$ converge uniformemente en $\overline{D}(b,\delta)$. Consideremos su suma, es decir, la función $\varphi : \overline{D}(b,\delta) \to \mathbb{C}$ definida por

$$\varphi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(w) \quad \forall w \in \overline{D}(b,\delta)$$

Como la convergencia uniforme preserva la continuidad, φ es continua. En vista de (9), para $0 < |w-b| \leqslant \delta$ tenemos $g_b(w) = \varphi(w)$ y esto es suficiente para estudiar el límite de g_b en el punto b. Concluimos pues que g es derivable en b, y calculamos la derivada:

$$\lim_{w \to b} \frac{g(w) - g(b)}{w - b} = \lim_{w \to b} \varphi(w) = \varphi(b) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(b) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, \alpha_{n+1}\, b^n$$

Puesto que $b \in \Omega_0$ era arbitrario, hemos probado que $g \in \mathcal{H}(\Omega_0)$ con

$$g'(w) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, \alpha_{n+1}\, w^n \quad \forall w \in \Omega_0$$

Finalmente, la regla de la cadena nos dice que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ con

$$f'(z) = g'(z-a) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\, \alpha_{n+1}\, (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega \qquad \blacksquare$$

La siguiente observación cae por su peso: la función derivada f' ha resultado ser la suma de una serie de potencias cuyo dominio de convergencia sigue siendo Ω, luego el teorema anterior puede aplicarse a f', y así sucesivamente. Ha llegado pues el momento de comprobar que la definición de las derivadas sucesivas de una función compleja de variable compleja no tiene ninguna dificultad. Se hace por inducción, exactamente igual que para funciones reales de variable real.

4.6. Derivadas sucesivas

Dado un conjunto no vacío $A \subset \mathbb{C}$ y una función $f \in \mathcal{F}(A)$, definimos por inducción, cuando y donde ello sea posible, su n-ésima derivada $f^{(n)}$, con $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Usamos el convenio habitual $f^{(0)} = f$ y para $n = 1$ tenemos la función derivada $f^{(1)} = f' : A_1 \to \mathbb{C}$ donde A_1 es el conjunto de puntos de $A \cap A'$ en los que f es derivable.

Sea ahora $n \in \mathbb{N}$ y supongamos definida la función derivada n-ésima $f^{(n)} : A_n \to \mathbb{C}$. Cuando $z \in A_n \cap A_n'$ y $f^{(n)}$ es derivable en z, decimos que f es $n+1$ *veces derivable* en z, la derivada de $f^{(n)}$ en z recibe el nombre de $(n+1)$-*ésima derivada* de f en z, y se denota por $f^{(n+1)}(z)$. Si ahora A_{n+1} es el conjunto de puntos de $A_n \cap A_n'$ en los que f es $n+1$ veces derivable, cuando sea $A_{n+1} \neq \emptyset$, podemos considerar la *función derivada* $(n+1)$-*ésima* de f, es decir, la función $f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{C}$ que a cada punto de A_{n+1} hace corresponder la $(n+1)$-ésima derivada de f en dicho punto. En resumen:

$$A_{n+1} = \{z \in A_n \cap A_n' : f^{(n)} \text{ es derivable en } z\}, \qquad \text{y si } A_{n+1} \neq \emptyset,$$
$$f^{(n+1)} : A_{n+1} \to \mathbb{C}, \quad f^{(n+1)}(z) = \lim_{w \to z} \frac{f^{(n)}(w) - f^{(n)}(z)}{w - z} \quad \forall z \in A_{n+1}$$

Finalmente, cuando $A \subset A'$ y, para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que f es n veces derivable en todo punto de A, decimos que f es *indefinidamente derivable* en A y tendremos definidas en A todas las derivadas: $f^{(n)} \in \mathcal{F}(A)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Por ejemplo, si f es una función racional, definida en un conjunto $A \subset A'$, mediante una obvia inducción vemos que f es indefinidamente derivable en A y $f^{(n)} \in \mathcal{F}(A)$ es una función racional para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como casos particulares de las definiciones anteriores, podemos considerar los mismos que para la primera derivada. Si $A \subset \mathbb{R}$ y $f(A) \subset \mathbb{R}$ no hemos hecho más que repetir la definición de las derivadas sucesivas de una función real de variable real.

Cuando $A \subset \mathbb{R}$ pero f puede tomar valores complejos cualesquiera, una obvia inducción nos dice que, para todo $n \in \mathbb{N}$, f es n veces derivable en un punto $t \in A$ si, y sólo si, lo son las funciones $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, en cuyo caso:

$$f^{(n)}(t) = \big(\operatorname{Re} f\big)^{(n)}(t) + i\big(\operatorname{Im} f\big)^{(n)}(t)$$

Por tanto, cuando $A \subset A'$, tenemos que f es indefinidamente derivable en A si, y sólo si, lo son $\operatorname{Re} f$ y $\operatorname{Im} f$, verificándose la igualdad anterior para todo $t \in A$ y para todo $n \in \mathbb{N}$.

Pero vayamos ya al caso que más nos interesa: $A = \Omega$ es el dominio de convergencia de una serie de potencias no trivial y f es la suma de dicha serie. Como ya hemos adelantado, a partir del teorema que nos dio la holomorfía de f obtenemos fácilmente que f es indefinidamente derivable en Ω y que las derivadas sucesivas de f se obtienen derivando término a término la serie usada para definir f, manteniéndose constante el radio de convergencia.

Enunciamos explícitamente el resultado, que sólo tiene un interés provisional, pues más adelante probaremos algo mucho más general:

- *Sea* $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ *una serie de potencias no trivial, sea* Ω *su dominio de convergencia y denotemos por* f *a la suma de la serie:*

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n \quad \forall z \in \Omega$$

Entonces f *es indefinidamente derivable en* Ω. *De hecho, para todo* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, *la serie* $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+k)!}{n!} \alpha_{n+k} (z-a)^n$ *tiene dominio de convergencia* Ω *y se verifica que:*

$$f^{(k)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k)!}{n!} \alpha_{n+k} (z-a)^n = \sum_{n=k}^{\infty} \frac{n!}{(n-k)!} \alpha_n (z-a)^{n-k} \quad \forall z \in \Omega$$

En particular, tomando $z = a$, *se tiene:* $f^{(k)}(a) = k!\, \alpha_k$ *para todo* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Se razona obviamente por inducción sobre k. El caso $k = 0$ no es más que la definición de f y el caso $k = 1$ es el último teorema, junto con su lema previo. Suponiendo cierto el resultado para $k \in \mathbb{N}$ empezamos aplicando el mismo lema que, junto con la hipótesis de inducción, nos dice que la serie

$$\sum_{n\geqslant 0} (n+1) \frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} \alpha_{n+1+k}(z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(n+k+1)!}{n!} \alpha_{n+k+1}(z-a)^n$$

tiene dominio de convergencia Ω. Usando otra vez la hipótesis de inducción, que nos da $f^{(k)}$ como suma de una serie de potencias con dominio de convergencia Ω, el último teorema nos dice que $f^{(k)} \in \mathcal{H}(\Omega)$, luego f es $k+1$ veces derivable en Ω, y para todo $z \in \Omega$ se tiene

$$f^{(k+1)}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) \frac{(n+1+k)!}{(n+1)!} \alpha_{n+1+k}(z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+k+1)!}{n!} \alpha_{n+k+1}(z-a)^n$$

Esto completa el proceso de inducción y prueba que f es indefinidamente derivable en Ω. ■

La última igualdad del enunciado anterior tiene interés, pues nos dice que la función f determina de forma única a la serie de potencias usada para definirla, concretamente:

$$\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n = \sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (z-a)^n$$

Es natural decir que esta serie de potencias es la *serie de Taylor* de la función f centrada en el punto a. En vista del carácter local del concepto de derivada, que se transmite claramente a las derivadas sucesivas, para conocer esta serie basta conocer f en un entorno de a. Tenemos por tanto el siguiente resultado, conocido como *principio de identidad* para series de potencias. Permite identificar los coeficientes de dos series de potencias, igual que podemos identificar los coeficientes de dos polinomios que coincidan en suficientes puntos:

- *Sean* $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n (z-a)^n$ *y* $\sum_{n\geqslant 0} \beta_n (z-a)^n$ *series de potencias no triviales, con dominios de convergencia* Ω_1 *y* Ω_2 *respectivamente. Supongamos que existe* $\rho \in \mathbb{R}^+$ *tal que* $D(a,\rho) \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ *y*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n (z-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,\rho)$$

Entonces, ambas series son idénticas, es decir, $\alpha_n = \beta_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Sean $f \in \mathcal{H}(\Omega_1)$ y $g \in \mathcal{H}(\Omega_2)$ las sumas de las respectivas series y denotemos por f_ρ y g_ρ a las restricciones de f y g al disco $D(a,\rho)$. Por hipótesis tenemos $f_\rho = g_\rho$, con lo que basta aplicar el resultado anterior, teniendo en cuenta el carácter local de las sucesivas derivadas:

$$\alpha_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} = \frac{f_\rho^{(n)}(a)}{n!} = \frac{g_\rho^{(n)}(a)}{n!} = \frac{g^{(n)}(a)}{n!} = \beta_n \quad \forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$$

Por supuesto, esto implica que $\Omega_1 = \Omega_2$ y $f = g$. ■

4.7. Funciones analíticas

Ha quedado claro que las series de potencias nos dan un procedimiento muy útil para definir funciones holomorfas, pero tienen una clara limitación: siempre obtenemos funciones enteras o funciones holomorfas en un disco. Por ejemplo, si una función holomorfa en un semiplano es la suma de una serie de potencias, dicha función ha de ser la restricción al semiplano de una función entera. Sin embargo, las principales propiedades obtenidas para las sumas de series de potencias, en particular su holomorfía, son propiedades locales, luego también las tendrá cualquier función que pueda expresarse *localmente* como suma de una serie de potencias. Esto motiva la definición que sigue. Fijamos un abierto no vacío $\Omega \subset \mathbb{C}$.

Se dice que $f \in \mathcal{F}(\Omega)$ es una **función analítica** en Ω, cuando para cada $a \in \Omega$ se puede encontrar $\rho_a \in \mathbb{R}^+$, con $D(a,\rho_a) \subset \Omega$, y una serie de potencias $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n^{(a)} (z-a)^n$, centrada en a y con radio de convergencia mayor o igual que ρ_a, tales que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(a)} (z-a)^n \quad \forall z \in D(a,\rho_a) \tag{10}$$

La definición anterior puede parecer enrevesada, pero formaliza con precisión la idea anunciada: f es analítica en Ω cuando localmente, es decir en un entorno de cada punto $a \in \Omega$, puede expresarse como suma de una serie de potencias.

Es inmediato establecer para las funciones analíticas las mismas propiedades (locales) que hemos probado para la suma de una serie de potencias. Concretamente:

- *Si* f *es una función analítica en* Ω, *entonces* $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ *y* f' *también es analítica en* Ω.

Fijado $a \in \Omega$, tenemos $\rho_a \in \mathbb{R}^+$ tal que $D(a,\rho_a) \subset \Omega$ y se verifica (10) para conveniente serie de potencias con radio de convergencia mayor o igual que ρ_a. El teorema que nos da la holomorfía de la suma de una serie de potencias se puede aplicar entonces a la restricción de f a $D(a,\rho_a)$. El carácter local de la derivada nos dice que f es derivable en $D(a,\rho_a)$ con

$$f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\alpha_{n+1}^{(a)}(z-a)^n \quad \forall z \in D(a,\rho_a)$$

y esta serie de potencias tiene radio de convergencia mayor o igual que ρ_a. Como $a \in \Omega$ era arbitrario, hemos probado que $f \in \mathcal{H}(\Omega)$ y que f' es analítica en Ω. ■

Una obvia inducción nos dice que, si f es analítica en Ω, entonces f es indefinidamente derivable en Ω y las sucesivas derivadas de f son funciones analíticas en Ω.

Conviene resaltar que para la suma de una serie de potencias no trivial, digamos f, no hemos probado que f sea analítica en el dominio de convergencia Ω de la serie. Si $\Omega = D(a,R)$ con $a \in \mathbb{C}$ y $R \in \mathbb{R}^+$, para probarlo deberíamos expresar f como suma de una serie de potencias centrada en cada punto $b \in \Omega$, cosa que en principio sólo sabemos para $b = a$, y a poco que se piense, esto no es del todo fácil. No vamos a profundizar en el estudio de las funciones analíticas, por una sencilla razón: como resultado fundamental de la *teoría local de Cauchy*, que vamos a desarrollar más adelante, probaremos que *toda función holomorfa en un abierto del plano, es analítica, y en particular indefinidamente derivable, en dicho abierto.*

4.8. Ejercicios

1. Calcular el radio de convergencia de las siguientes series de potencias:

$$\text{(a)} \sum_{n\geqslant 1} \frac{n!}{n^n} z^n \qquad \text{(b)} \sum_{n\geqslant 0} z^{2n} \qquad \text{(c)} \sum_{n\geqslant 0} 2^n z^{n!} \qquad \text{(d)} \sum_{n\geqslant 0} \big(3+(-1)^n\big)^n z^n$$

$$\text{(e)} \sum_{n\geqslant 0} (n+a^n)z^n \quad (a \in \mathbb{R}^+) \qquad \text{(f)} \sum_{n\geqslant 0} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C})$$

2. Conocido el radio de convergencia R de la serie $\sum_{n\geqslant 0} \alpha_n z^n$, calcular el de las siguientes:

$$\text{(a)} \sum_{n\geqslant 0} n^k \alpha_n z^n \quad (k \in \mathbb{N} \text{ fijo}) \qquad \text{(b)} \sum_{n\geqslant 0} \frac{\alpha_n}{n!} z^n$$

3. Caracterizar las series de potencias que convergen uniformemente en todo el plano.

4. Estudiar la convergencia puntual, absoluta y uniforme, de la serie $\sum_{n\geqslant 0} f_n$ donde

$$f_n(z) = \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n \quad \forall z \in \mathbb{C}\setminus\{-1\}$$