Tema 4: Teoría de distribuciones

Objetivos que se persiguen

La idea general consiste en extender la clase de las funciones diferenciables a una clase de objetos mucho mayor (llamadas distribuciones o funciones generalizadas) en la que las reglas del cálculo diferencial se pueden seguir aplicando

Objetivos que se persiguen

La idea general consiste en extender la clase de las funciones diferenciables a una clase de objetos mucho mayor (llamadas distribuciones o funciones generalizadas) en la que las reglas del cálculo diferencial se pueden seguir aplicando

propiedades deseables

- Toda función continua debería ser una distribución (trabajando en un abierto de $\mathbb{R}^n$)
- Toda distribución debería tener derivadas parciales que deben ser de nuevo distribuciones. La nueva noción de diferenciabilidad debe coincidir con la clásica para funciones diferenciables de verdad (las distribuciones serán infinitamente diferenciables)
- Las reglas usuales del cálculo deben seguir siendo válidas
- Debe haber teoremas de convergencia que permitan manejar los procesos de paso al límite habituales

Espacio de las funciones test

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente integrable (es integrable sobre cada compacto de $\mathbb{R}$). Podemos verla como una máquina que asigna el número $\int f\phi$ a cada función ϕ adecuada.

Espacio de las funciones test

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente integrable (es integrable sobre cada compacto de $\mathbb{R}$). Podemos verla como una máquina que asigna el número $\int f\phi$ a cada función ϕ adecuada.

Llamando $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R})\colon \phi \text{ con soporte compacto}\}$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ el número $\int f\phi$ tiene sentido.

Espacio de las funciones test

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ localmente integrable (es integrable sobre cada compacto de $\mathbb{R}$). Podemos verla como una máquina que asigna el número $\int f\phi$ a cada función ϕ adecuada.
Llamando $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \phi$ con soporte compacto$\}$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ el número $\int f\phi$ tiene sentido.

Supongamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

- $\int_{\mathbb{R}} f'\phi = [f\phi]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f\phi' = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$

Espacio de las funciones test

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ localmente integrable (es integrable sobre cada compacto de $\mathbb{R}$). Podemos verla como una máquina que asigna el número $\int f\phi$ a cada función ϕ adecuada.
Llamando $\mathcal{D}(\mathbb{R}) = \{\phi \in C^\infty(\mathbb{R}) : \phi$ con soporte compacto$\}$, para cada $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ el número $\int f\phi$ tiene sentido.

Supongamos que $f \in C^\infty(\mathbb{R})$

- $\int_\mathbb{R} f'\phi = [f\phi]_{-\infty}^{\infty} - \int_\mathbb{R} f\phi' = -\int_\mathbb{R} f\phi' \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}))$
- $\int_\mathbb{R} f^{(k)}\phi = (-1)^k \int_\mathbb{R} f\phi^{(k)} \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}),\ k = 1, 2, \ldots)$

El miembro derecho de ambas igualdades tiene sentido aunque f no sea diferenciable y esas expresiones definen funcionales lineales sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.

Espacio de las funciones test

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ localmente integrable (es integrable sobre cada compacto de $\mathbb{R}$). Podemos verla como una máquina que asigna el número $\int f\phi$ a cada función ϕ adecuada.
Llamando $\mathcal{D}(\mathbb{R})=\{\phi\in C^\infty(\mathbb{R}):\ \phi$ con soporte compacto$\}$, para cada $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ el número $\int f\phi$ tiene sentido.

Supongamos que $f\in C^\infty(\mathbb{R})$

- $\int_{\mathbb{R}} f'\phi=[f\phi]_{-\infty}^{\infty}-\int_{\mathbb{R}} f\phi'=-\int_{\mathbb{R}} f\phi' \qquad (\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}))$
- $\int_{\mathbb{R}} f^{(k)}\phi=(-1)^k\int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)} \qquad (\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ k=1,2,\dots)$

El miembro derecho de ambas igualdades tiene sentido aunque f no sea diferenciable y esas expresiones definen funcionales lineales sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Por tanto, podemos asignar una “derivada k-ésima” a cada f localmente integrable:
$f^{(k)}$ es el funcional lineal sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ que asigna $\phi\mapsto(-1)^k\int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)}$

Espacio de las funciones test

Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ localmente integrable (es integrable sobre cada compacto de $\mathbb{R}$).
Podemos verla como una máquina que asigna el número $\int f\phi$ a cada función ϕ adecuada.
Llamando $\mathcal{D}(\mathbb{R})=\{\phi\in C^{\infty}(\mathbb{R}) \colon \phi$ con soporte compacto$\}$, para cada $\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R})$ el número $\int f\phi$ tiene sentido.

Supongamos que $f\in C^{\infty}(\mathbb{R})$

- $\int_{\mathbb{R}} f'\phi = [f\phi]_{-\infty}^{\infty} - \int_{\mathbb{R}} f\phi' = -\int_{\mathbb{R}} f\phi' \qquad (\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}))$
- $\int_{\mathbb{R}} f^{(k)}\phi = (-1)^k \int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)} \qquad (\phi\in\mathcal{D}(\mathbb{R}),\ k=1,2,\dots)$

El miembro derecho de ambas igualdades tiene sentido aunque f no sea diferenciable y esas expresiones definen funcionales lineales sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$.
Por tanto, podemos asignar una "derivada k-ésima" a cada f localmente integrable:
$f^{(k)}$ es el funcional lineal sobre $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ que asigna $\phi\mapsto(-1)^k\int_{\mathbb{R}} f\phi^{(k)}$
Observación: identificamos f con el funcional que asigna $\phi\mapsto\int_{\mathbb{R}} f\phi$

Espacio de las funciones test

- Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $C^\infty(\Omega)$ espacio de las funciones de clase C^∞ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.

Espacio de las funciones test

- Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $C^\infty(\Omega)$ espacio de las funciones de clase C^∞ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
- K compacto en Ω, llamamos $\mathcal{D}(K)$ al subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones cuyo soporte está en Ω. Con la topología inducida, es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.

Espacio de las funciones test

- Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $C^\infty(\Omega)$ espacio de las funciones de clase C^∞ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
- K compacto en Ω, llamamos $\mathcal{D}(K)$ al subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones cuyo soporte está en Ω. Con la topología inducida, es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
- El espacio de las funciones test es

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \mathrm{sop}(f) \text{ compacto}\} = \bigcup \mathcal{D}(K)$$

Dotado de la topología supremo de las topologías localmente convexas que hacen continuas todas las inclusiones $\mathcal{D}(K) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$

Espacio de las funciones test

Propiedades

- La topología de $\mathcal{D}(K)$ coincide con la que hereda de $\mathcal{D}(\Omega)$

Espacio de las funciones test

Propiedades

- La topología de $\mathcal{D}(K)$ coincide con la que hereda de $\mathcal{D}(\Omega)$
- $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel

Espacio de las funciones test

Propiedades

- La topología de $\mathcal{D}(K)$ coincide con la que hereda de $\mathcal{D}(\Omega)$
- $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel
- $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo

Espacio de las funciones test

Propiedades

- La topología de $\mathcal{D}(K)$ coincide con la que hereda de $\mathcal{D}(\Omega)$
- $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel
- $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo
- Si $\{\phi_n\} \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ que contiene al soporte de cada ϕ_n y de modo que $\{D^\alpha \phi_n\} \to 0$ uniformemente para cada multiíndice α

Espacio de las funciones test

Propiedades

- La topología de $\mathcal{D}(K)$ coincide con la que hereda de $\mathcal{D}(\Omega)$
- $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel
- $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo
- Si $\{\phi_n\} \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ que contiene al soporte de cada ϕ_n y de modo que $\{D^\alpha \phi_n\} \to 0$ uniformemente para cada multiíndice α

Teorema

Y ELC, $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$. Equivalen:

- Λ es continuo
- Λ es acotado
- $\{\phi_n\} \to 0 \longrightarrow \{\Lambda \phi_n\} \to 0$
- Las restricciones de Λ a cada $\mathcal{D}(K)$ son continuas

Espacio de las funciones test

Propiedades

- La topología de $\mathcal{D}(K)$ coincide con la que hereda de $\mathcal{D}(\Omega)$
- $\mathcal{D}(\Omega)$ tiene la propiedad de Heine-Borel
- $\mathcal{D}(\Omega)$ es completo
- Si $\{\phi_n\} \to 0$ en $\mathcal{D}(\Omega)$ entonces existe un compacto $K \subset \Omega$ que contiene al soporte de cada ϕ_n y de modo que $\{D^\alpha \phi_n\} \to 0$ uniformemente para cada multiíndice α

Teorema

Y ELC, $\Lambda : \mathcal{D}(\Omega) \to Y$. Equivalen:

- Λ es continuo
- Λ es acotado
- $\{\phi_n\} \to 0 \longrightarrow \{\Lambda\phi_n\} \to 0$
- Las restricciones de Λ a cada $\mathcal{D}(K)$ son continuas

Corolario

$D^\alpha \in L(\mathcal{D}(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$ para cada multiíndice α

Espacio de distribuciones

Espacio de distribuciones

Es $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$, lo dotamos de la topología débil* $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$

Espacio de distribuciones

Espacio de distribuciones

Es $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$, lo dotamos de la topología débil* $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$

Teorema

Λ funcional lineal sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Equivalen:

- $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$
- Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $N \in \mathbb{N}$ y una constante C de modo que

$$|\Lambda(\phi)| \leqslant C \max\{|D^\alpha(\phi)| : x \in K,\ |\alpha| \leqslant N\} = C\|\phi\|_N \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(K)$$

Si el mismo natural es válido para cada $K \subset \Omega$ (C puede variar) y llamamos N al menor de los que cumplen esa propiedad decimos que Λ tiene orden N. Si ningún N cumple lo anterior decimos que Λ tiene orden infinito

Espacio de distribuciones

Espacio de distribuciones

Es $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$, lo dotamos de la topología débil* $\sigma(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega))$

Teorema

Λ funcional lineal sobre $\mathcal{D}(\Omega)$. Equivalen:

- $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$
- Para cada compacto $K \subset \Omega$ existe $N \in \mathbb{N}$ y una constante C de modo que

$$|\Lambda(\phi)| \leqslant C \max\{|D^\alpha(\phi)| : x \in K,\ |\alpha| \leqslant N\} = C\|\phi\|_N \qquad \forall \phi \in \mathcal{D}(K)$$

Si el mismo natural es válido para cada $K \subset \Omega$ (C puede variar) y llamamos N al menor de los que cumplen esa propiedad decimos que Λ tiene orden N. Si ningún N cumple lo anterior decimos que Λ tiene orden infinito

Observación

Para cada $x \in \Omega$ podemos definir $\delta_x \in L(\mathcal{D}(\Omega), \mathbb{K})$ mediante la fórmula

$$\delta_x(\phi) = \phi(x) \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

El teorema anterior nos dice que $\delta_x \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y que tiene orden cero

Cálculo con distribuciones

Funciones vistas como distribuciones

$f : \Omega \to \mathbb{K}$ localmente integrable. Definimos

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi(x) f(x) dx \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

Cálculo con distribuciones

Funciones vistas como distribuciones

$f : \Omega \to \mathbb{K}$ localmente integrable. Definimos

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi(x) f(x) dx \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

Como se cumple

$$|\Lambda_f(\phi)| \leqslant \left(\int_K f \right) \|\phi\|_0 \qquad (\phi \in \mathcal{D}(K))$$

el teorema anterior nos dice que $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y el orden de Λ_f es cero.

Cálculo con distribuciones

Funciones vistas como distribuciones

$f : \Omega \to \mathbb{K}$ localmente integrable. Definimos

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi(x) f(x) dx \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

Como se cumple

$$|\Lambda_f(\phi)| \leqslant \left(\int_K f \right) \|\phi\|_0 \qquad (\phi \in \mathcal{D}(K))$$

el teorema anterior nos dice que $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y el orden de Λ_f es cero.
Se suele identificar la distribución Λ_f con f y se dice que este tipo de distribuciones "son" funciones

Cálculo con distribuciones

Funciones vistas como distribuciones

$f : \Omega \to \mathbb{K}$ localmente integrable. Definimos

$$\Lambda_f(\phi) = \int_\Omega \phi(x) f(x) dx \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

Como se cumple

$$|\Lambda_f(\phi)| \leqslant \left(\int_K f \right) \|\phi\|_0 \qquad (\phi \in \mathcal{D}(K))$$

el teorema anterior nos dice que $\Lambda_f \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y el orden de Λ_f es cero. Se suele identificar la distribución Λ_f con f y se dice que este tipo de distribuciones "son" funciones

Medidas vistas como distribuciones

Si μ es una medida positiva sobre Ω con $\mu(K) < \infty$ para cada compacto $K \subset \Omega$ la igualdad

$$\Lambda_\mu(\phi) = \int_\Omega \phi d\mu \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

define una distribución Λ_μ que se suele identificar con μ

Cálculo con distribuciones

Derivación de distribuciones

Si α es un multi-índice y $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la fórmula

$$(D^{\alpha}\Lambda)(\phi) := (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^{\alpha}\phi)$$

define un funcional $D^{\alpha}\Lambda$ lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$.

Cálculo con distribuciones

Derivación de distribuciones

Si α es un multi-índice y $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la fórmula

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) := (-1)^{|\alpha|} \Lambda(D^\alpha \phi)$$

define un funcional $D^\alpha \Lambda$ lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $|\Lambda(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_N$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(K)$ entonces

$$|(D^\alpha \Lambda)(\phi)| \leqslant C\|D^\alpha \phi\|_N \leqslant C\|\phi\|_{N+|\alpha|}$$

luego $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$

Cálculo con distribuciones

Derivación de distribuciones

Si α es un multi-índice y $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ la fórmula

$$(D^\alpha \Lambda)(\phi) := (-1)^{|\alpha|}\Lambda(D^\alpha \phi)$$

define un funcional $D^\alpha \Lambda$ lineal en $\mathcal{D}(\Omega)$. Si $|\Lambda(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_N$ para cada $\phi \in \mathcal{D}(K)$ entonces

$$|(D^\alpha \Lambda)(\phi)| \leqslant C\|D^\alpha \phi\|_N \leqslant C\|\phi\|_{N+|\alpha|}$$

luego $D^\alpha \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, α y β multi-índices. Se cumple

$$D^\alpha D^\beta \Lambda = D^{\alpha+\beta}\Lambda = D^\beta D^\alpha \Lambda$$

Cálculo con distribuciones

Derivada distribucional de funciones

Si α es un multi-índice y f es una función localmente integrable en Ω definimos la α-ésima derivada distribucional de f por $D^\alpha \Lambda_f$.

Cálculo con distribuciones

Derivada distribucional de funciones

Si α es un multi-índice y f es una función localmente integrable en Ω definimos la α-ésima derivada distribucional de f por $D^\alpha \Lambda_f$.
Cuando $D^\alpha f$ existe en el sentido clásico y es localmente integrable, tiene la distribución asociada $\Lambda_{D^\alpha f}$ y tiene sentido plantearse si se cumple

$$D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$$

Cálculo con distribuciones

Derivada distribucional de funciones

Si α es un multi-índice y f es una función localmente integrable en Ω definimos la α-ésima derivada distribucional de f por $D^\alpha \Lambda_f$.
Cuando $D^\alpha f$ existe en el sentido clásico y es localmente integrable, tiene la distribución asociada $\Lambda_{D^\alpha f}$ y tiene sentido plantearse si se cumple

$$D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$$

Si f tiene dervadas parciales continuas de todos los órdenes hasta N, se cumple la igualdad anterior para $|\alpha| \leqslant N$

Cálculo con distribuciones

Derivada distribucional de funciones

Si α es un multi-índice y f es una función localmente integrable en Ω definimos la α-ésima derivada distribucional de f por $D^\alpha \Lambda_f$.
Cuando $D^\alpha f$ existe en el sentido clásico y es localmente integrable, tiene la distribución asociada $\Lambda_{D^\alpha f}$ y tiene sentido plantearse si se cumple

$$D^\alpha \Lambda_f = \Lambda_{D^\alpha f}$$

Si f tiene dervadas parciales continuas de todos los órdenes hasta N, se cumple la igualdad anterior para $|\alpha| \leqslant N$

Multiplicación por funciones

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $f \in C^\infty(\Omega)$. Podemos definir la distribución $f\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ por

$$(f\Lambda)(\phi) = \Lambda(f\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

Cálculo con distribuciones

Proposición

$\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\{\Lambda_n\} \overset{w^*}{\to} \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\{g_n\} \to g$ en $C^\infty(\Omega)$. Para cada multi-índice α se tiene

- $\{D^\alpha \Lambda_n\} \overset{w^*}{\to} D^\alpha \Lambda$
- $\{g_n \Lambda_n\} \overset{w^*}{\to} g\Lambda$

Cálculo con distribuciones

Proposición

$\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\{\Lambda_n\} \xrightarrow{w^*} \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\{g_n\} \to g$ en $C^\infty(\Omega)$. Para cada multi-índice α se tiene

- $\{D^\alpha \Lambda_n\} \xrightarrow{w^*} D^\alpha \Lambda$
- $\{g_n \Lambda_n\} \xrightarrow{w^*} g\Lambda$

Ejemplos

- $H' = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\delta(\phi) = \phi(0) = -\int_0^\infty \phi'(t)dt = -\int_{-\infty}^\infty H(t)\phi'(t)dt = (-1)H(\phi') = H'(\phi)$$

Cálculo con distribuciones

Proposición

$\{\Lambda_n\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$ con $\{\Lambda_n\} \stackrel{w^*}{\to} \Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $\{g_n\} \to g$ en $C^\infty(\Omega)$. Para cada multi-índice α se tiene

- $\{D^\alpha \Lambda_n\} \stackrel{w^*}{\to} D^\alpha \Lambda$
- $\{g_n \Lambda_n\} \stackrel{w^*}{\to} g\Lambda$

Ejemplos

- $H' = \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$:

$$\delta(\phi) = \phi(0) = -\int_0^\infty \phi'(t)dt = -\int_{-\infty}^\infty H(t)\phi'(t)dt = (-1)H(\phi') = H'(\phi)$$

- Derivada de δ

$$\delta'(\phi) = (-1)\delta(\phi) = -\phi'(0)$$

Cálculo con distribuciones

Ejemplos

Consideramos $\{h_n\}$ dada por $h_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(nt)}{\pi} \qquad (t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$

Cálculo con distribuciones

Ejemplos

Consideramos $\{h_n\}$ dada por $h_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(nt)}{\pi} \qquad (t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$
que cumple $0 \leqslant h_n \leqslant 1$ y $\{h_n\} \to H$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por tanto

Cálculo con distribuciones

Ejemplos

Consideramos $\{h_n\}$ dada por $h_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(nt)}{\pi} \qquad (t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$
que cumple $0 \leqslant h_n \leqslant 1$ y $\{h_n\} \to H$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)\phi(t)dt \overset{\text{TCD}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\phi(t)dt$$

Cálculo con distribuciones

Ejemplos

Consideramos $\{h_n\}$ dada por $h_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{\arctan(nt)}{\pi} \qquad (t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N})$
que cumple $0 \leqslant h_n \leqslant 1$ y $\{h_n\} \to H$ en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Por tanto

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h_n(t)\phi(t)dt \overset{\text{TCD}}{=} \int_{-\infty}^{\infty} H(t)\phi(t)dt$$

Por tanto:

- $\{h_n\} \to H$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- $\{h'_n\} \to \delta$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$
- $\{h_n^{(k)}\} \to \delta^{(k)}$ en $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$

Principio de localización

Distribución inducida

$U \subset \Omega$ abierto, si $\phi \in \mathcal{D}(U)$, extendiendo por cero $\rightsquigarrow \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dada $\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos la distribución inducida en U como $\Lambda_{|U} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dada por

$$\Lambda_{|U}(\phi) = \Lambda(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{D}(U))$$

Principio de localización

Distribución inducida

$U \subset \Omega$ abierto, si $\phi \in \mathcal{D}(U)$, extendiendo por cero $\rightsquigarrow \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dada $\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos la distribución inducida en U como $\Lambda_{|U} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dada por

$$\Lambda_{|U}(\phi) = \Lambda(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{D}(U))$$

- Decimos que Λ es cero en U si $\Lambda_{|U} = 0$
- Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{R}^d$, $U \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ abierto, $\Lambda_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $\Lambda_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Decimos que Λ_1 y Λ_2 son iguales en U si $\Lambda_{1|U} = \Lambda_{2|U}$

Principio de localización

Distribución inducida

$U \subset \Omega$ abierto, si $\phi \in \mathcal{D}(U)$, extendiendo por cero $\rightsquigarrow \phi \in \mathcal{D}(\Omega)$. Dada $\lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ definimos la distribución inducida en U como $\Lambda_{|U} \in \mathcal{D}'(\Omega)$ dada por

$$\Lambda_{|U}(\phi) = \Lambda(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{D}(U))$$

- Decimos que Λ es cero en U si $\Lambda_{|U} = 0$
- Ω_1, Ω_2 abiertos de $\mathbb{R}^d$, $U \subset \Omega_1 \cap \Omega_2$ abierto, $\Lambda_1 \in \mathcal{D}'(\Omega_1)$, $\Lambda_2 \in \mathcal{D}'(\Omega_2)$. Decimos que Λ_1 y Λ_2 son iguales en U si $\Lambda_{1|U} = \Lambda_{2|U}$

Principio de localización

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ abierto. Si para cada $x \in U$ existe V_x abierto con $x \in V_x$ y Λ es cero en V_x entonces Λ es cero en U

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\mathrm{sop}(\Lambda)$.

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\operatorname{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\operatorname{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\operatorname{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\operatorname{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω
- $x \in \operatorname{sop}(\Lambda) \iff \forall V$ entorno de x existe $\phi \in \mathcal{D}(V)$ con $\Lambda(\phi) \neq 0$

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\mathrm{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\mathrm{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω
- $x \in \mathrm{sop}(\Lambda) \iff \forall V$ entorno de x existe $\phi \in \mathcal{D}(V)$ con $\Lambda(\phi) \neq 0$
- $x \in \Omega \setminus \mathrm{sop}(\Lambda) \iff$ existe U entorno de x tal que $\Lambda(\phi) = 0$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(U)$

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\operatorname{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\operatorname{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω
- $x \in \operatorname{sop}(\Lambda) \iff \forall V$ entorno de x existe $\phi \in \mathcal{D}(V)$ con $\Lambda(\phi) \neq 0$
- $x \in \Omega \setminus \operatorname{sop}(\Lambda) \iff$ existe U entorno de x tal que $\Lambda(\phi) = 0$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(U)$
- $\operatorname{sop}(\Lambda) = \emptyset \Longrightarrow \Lambda = 0$

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\operatorname{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\operatorname{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω
- $x \in \operatorname{sop}(\Lambda) \iff \forall V$ entorno de x existe $\phi \in \mathcal{D}(V)$ con $\Lambda(\phi) \neq 0$
- $x \in \Omega \setminus \operatorname{sop}(\Lambda) \iff$ existe U entorno de x tal que $\Lambda(\phi) = 0$ $\forall \phi \in \mathcal{D}(U)$
- $\operatorname{sop}(\Lambda) = \emptyset \Longrightarrow \Lambda = 0$
- $\operatorname{sop}(\Lambda + \Gamma) \subset \operatorname{sop}(\Lambda) \cup \operatorname{sop}(\Gamma)$ y $\operatorname{sop}(\lambda\Lambda) = \operatorname{sop}(\Lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\mathrm{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\mathrm{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω
- $x \in \mathrm{sop}(\Lambda) \iff \forall V$ entorno de x existe $\phi \in \mathcal{D}(V)$ con $\Lambda(\phi) \neq 0$
- $x \in \Omega \setminus \mathrm{sop}(\Lambda) \iff$ existe U entorno de x tal que $\Lambda(\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(U)$
- $\mathrm{sop}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda = 0$
- $\mathrm{sop}(\Lambda + \Gamma) \subset \mathrm{sop}(\Lambda) \cup \mathrm{sop}(\Gamma)$ y $\mathrm{sop}(\lambda\Lambda) = \mathrm{sop}(\Lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- $\mathrm{sop}(D^\alpha \Lambda) \subset \mathrm{sop}(\Lambda)$ para cada multi-índice α

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\operatorname{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\operatorname{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω
- $x \in \operatorname{sop}(\Lambda) \iff \forall V$ entorno de x existe $\phi \in \mathcal{D}(V)$ con $\Lambda(\phi) \neq 0$
- $x \in \Omega \setminus \operatorname{sop}(\Lambda) \iff$ existe U entorno de x tal que $\Lambda(\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(U)$
- $\operatorname{sop}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda = 0$
- $\operatorname{sop}(\Lambda + \Gamma) \subset \operatorname{sop}(\Lambda) \cup \operatorname{sop}(\Gamma)$ y $\operatorname{sop}(\lambda\Lambda) = \operatorname{sop}(\Lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- $\operatorname{sop}(D^\alpha \Lambda) \subset \operatorname{sop}(\Lambda)$ para cada multi-índice α
- Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\operatorname{sop}(\phi) \cap \operatorname{sop}(\Lambda) = \emptyset$ entonces $\Lambda(\phi) = 0$

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\operatorname{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\operatorname{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω
- $x \in \operatorname{sop}(\Lambda) \iff \forall V$ entorno de x existe $\phi \in \mathcal{D}(V)$ con $\Lambda(\phi) \neq 0$
- $x \in \Omega \setminus \operatorname{sop}(\Lambda) \iff$ existe U entorno de x tal que $\Lambda(\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(U)$
- $\operatorname{sop}(\Lambda) = \emptyset \Longrightarrow \Lambda = 0$
- $\operatorname{sop}(\Lambda + \Gamma) \subset \operatorname{sop}(\Lambda) \cup \operatorname{sop}(\Gamma)$ y $\operatorname{sop}(\lambda\Lambda) = \operatorname{sop}(\Lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- $\operatorname{sop}(D^\alpha \Lambda) \subset \operatorname{sop}(\Lambda)$ para cada multi-índice α
- Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\operatorname{sop}(\phi) \cap \operatorname{sop}(\Lambda) = \emptyset$ entonces $\Lambda(\phi) = 0$
- Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ entonces $\operatorname{sop}(f\Lambda) \subset \operatorname{sop}(f) \cap \operatorname{sop}(\Lambda)$

Soporte de una distribución

Soporte

$\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$, $U \subset \Omega$ el mayor abierto tal que Λ es cero en U. Llamamos soporte de Λ al conjunto $\Omega \setminus U$ y lo denotamos por $\operatorname{sop}(\Lambda)$.

Propiedades del soporte

$\Lambda, \Gamma \in \mathcal{D}'(\Omega)$

- $\operatorname{sop}(\Lambda)$ es cerrado en Ω
- $x \in \operatorname{sop}(\Lambda) \iff \forall V$ entorno de x existe $\phi \in \mathcal{D}(V)$ con $\Lambda(\phi) \neq 0$
- $x \in \Omega \setminus \operatorname{sop}(\Lambda) \iff$ existe U entorno de x tal que $\Lambda(\phi) = 0 \ \forall \phi \in \mathcal{D}(U)$
- $\operatorname{sop}(\Lambda) = \emptyset \implies \Lambda = 0$
- $\operatorname{sop}(\Lambda + \Gamma) \subset \operatorname{sop}(\Lambda) \cup \operatorname{sop}(\Gamma)$ y $\operatorname{sop}(\lambda\Lambda) = \operatorname{sop}(\Lambda)$ para cada $\lambda \in \mathbb{K}^*$
- $\operatorname{sop}(D^\alpha \Lambda) \subset \operatorname{sop}(\Lambda)$ para cada multi-índice α
- Si $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $\operatorname{sop}(\phi) \cap \operatorname{sop}(\Lambda) = \emptyset$ entonces $\Lambda(\phi) = 0$
- Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ entonces $\operatorname{sop}(f\Lambda) \subset \operatorname{sop}(f) \cap \operatorname{sop}(\Lambda)$
- Si $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ y $f \equiv 1$ en un abierto W con $\operatorname{sop}(\Lambda) \subset W$ entonces $f\Lambda = \Lambda$

Distribuciones de soporte compacto

Proposición: definición local de una distribución

$\{U_i\}$ recubrimiento por abiertos de Ω. Si para cada U_i existe $\Lambda_i \in \mathcal{D}'(U_i)$ de modo que $\Lambda_i = \Lambda_j$ en $U_i \cap U_j$ entonces existe una única distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ verificando $\Lambda_{|U_i} = \Lambda_i$ para cada i.

Distribuciones de soporte compacto

Proposición: definición local de una distribución

$\{U_i\}$ recubrimiento por abiertos de Ω. Si para cada U_i existe $\Lambda_i \in \mathcal{D}'(U_i)$ de modo que $\Lambda_i = \Lambda_j$ en $U_i \cap U_j$ entonces existe una única distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ verificando $\Lambda_{|U_i} = \Lambda_i$ para cada i.

Corolario

Si $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tiene soporte compacto se puede extender a una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Distribuciones de soporte compacto

Proposición: definición local de una distribución

$\{U_i\}$ recubrimiento por abiertos de Ω. Si para cada U_i existe $\Lambda_i \in \mathcal{D}'(U_i)$ de modo que $\Lambda_i = \Lambda_j$ en $U_i \cap U_j$ entonces existe una única distribución $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ verificando $\Lambda_{|U_i} = \Lambda_i$ para cada i.

Corolario

Si $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tiene soporte compacto se puede extender a una distribución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Teorema

Si $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ tiene soporte compacto entonces tiene orden finito. De hecho, existen $C > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ fijos de modo que

$$|\Lambda(\phi)| \leqslant C\|\phi\|_m \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\Omega))$$

Además Λ se extiende de forma única a un funcional lineal y continuo sobre $C^\infty(\Omega)$. Es más, $C^\infty(\Omega)^*$ se identifica con el espacio de las distribuciones de soporte compacto

Soporte de una distribución

Teorema (caracterización de las distribuciones con soporte puntual)

Sea $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $x_0 \in \Omega$ con $\operatorname{sop}(\Lambda) = \{x_0\}$, sea N el orden finito de Λ. Entonces existen constantes c_α de modo que

$$\Lambda = \sum_{|\alpha| \leqslant N} c_\alpha D^\alpha \delta_{x_0}$$

Estructura de una distribución

Teorema de estructura local

Sea $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ compacto. Entonces existen una función continua f en K y un multi-índice α de modo que $\Lambda = D^\alpha f$ en $\mathcal{D}(K)$

Estructura de una distribución

Teorema de estructura local

Sea $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ y $K \subset \Omega$ compacto. Entonces existen una función continua f en K y un multi-índice α de modo que $\Lambda = D^\alpha f$ en $\mathcal{D}(K)$

Teorema de estructura global

Dada $\Lambda \in \mathcal{D}'(\Omega)$ existen funciones f_α continuas en Ω para cada multi-índice α de modo que

- Cada $K \subset \Omega$ compacto corta solo a los soportes de una cantidad finita de f_α
- $\Lambda = \sum_\alpha D^\alpha f_\alpha$

Una aplicación en EDP

Teorema de Ehrenpreis-Malgrange

Sea J un conjunto finito de multi-índices, sea $c_\alpha \in \mathbb{K}$ para cada $\alpha \in J$ y sea δ la delta de Dirac centrada en el origen. Entonces la ecuación en derivadas parciales con coeficientes constantes

$$\sum_{\alpha \in J} c_\alpha D^\alpha \Lambda = \delta$$

tiene solución en $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier clásica

Dada $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ su transformada de Fourier es la función $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ dada por

$$[\mathcal{F}(f)](\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x) dx$$

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier clásica

Dada $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ su transformada de Fourier es la función $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ dada por

$$[\mathcal{F}(f)](\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x) dx$$

$\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ y por tanto es localmente integrable luego define una distribución $\Lambda_{\mathcal{F}(f)}$ que cumple

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier clásica

Dada $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ su transformada de Fourier es la función $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ dada por

$$[\mathcal{F}(f)](\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

$\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ y por tanto es localmente integrable luego define una distribución $\Lambda_{\mathcal{F}(f)}$ que cumple

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{F}(f), \phi\rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} [\mathcal{F}(f)](\xi)\phi(\xi)d\xi = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d}\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\phi(\xi)dxd\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} [\mathcal{F}(\phi)](x)f(x)dx = \langle f, \mathcal{F}(\phi)\rangle \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d))\end{aligned}$$

Transformada de Fourier

Transformada de Fourier clásica

Dada $f \in L_1(\mathbb{R}^d)$ su transformada de Fourier es la función $\mathcal{F}(f) : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ dada por

$$[\mathcal{F}(f)](\xi) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)dx$$

$\mathcal{F}(f) \in C_0(\mathbb{R}^d)$ y por tanto es localmente integrable luego define una distribución $\Lambda_{\mathcal{F}(f)}$ que cumple

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{F}(f), \phi \rangle &= \int_{\mathbb{R}^d} [\mathcal{F}(f)](\xi)\phi(\xi)d\xi = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-ix\cdot\xi} f(x)\phi(\xi)dxd\xi \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} [\mathcal{F}(\phi)](x)f(x)dx = \langle f, \mathcal{F}(\phi) \rangle \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)) \end{aligned}$$

Idea más sencilla posible

Dada $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ¿se puede definir $\mathcal{F}(\Lambda)$ con la igualdad anterior?

$$\langle \mathcal{F}(\Lambda), \phi \rangle = \langle \Lambda, \mathcal{F}(\phi) \rangle$$

Pero $\mathcal{F}(\phi)$ puede no estar en $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$!!

Transformada de Fourier

Problema

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es demasiado pequeño como espacio de funciones test (equivalentemente, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ es demasiado grande) para el propósito de extender la transformada de Fourier.

Transformada de Fourier

Problema

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es demasiado pequeño como espacio de funciones test (equivalentemente, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ es demasiado grande) para el propósito de extender la transformada de Fourier.
Por otra parte $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ no está incluido en $L_1(\mathbb{R}^d)$ luego la transformada de Fourier de una función de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ puede no existir $\rightsquigarrow$ $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ es demasiado grande como espacio de funciones test

Transformada de Fourier

Problema

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es demasiado pequeño como espacio de funciones test (equivalentemente, $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ es demasiado grande) para el propósito de extender la transformada de Fourier.
Por otra parte $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ no está incluido en $L_1(\mathbb{R}^d)$ luego la transformada de Fourier de una función de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ puede no existir $\rightsquigarrow$ $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ es demasiado grande como espacio de funciones test

Restricciones sobre el espacio de las funciones test

- Buscamos X subespacio de $C^\infty(\mathbb{R}^d)$ para poder definir las derivadas parciales de los elementos de X^*
- La transformada de Fourier debe estar definida en X y llevarlo en sí mismo
- Como $D_k[\mathcal{F}(\phi)] = -i\mathcal{F}(x_k\phi)$, X debe ser cerrado para el producto por polinomios

La clase de Schwartz

Funciones C^∞ con decrecimiento rápido en infinito

$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ es una función C^∞ con decrecimiento rápido en infinito si para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada multi-índice α existe una constante $M_{n,\alpha} > 0$ verificando

$$\sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|_2^2)^n |D^\alpha \phi(x)| \leqslant M_{n,\alpha}$$

Estas funciones forman un espacio vectorial, que denotamos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la clase de Schwartz

La clase de Schwartz

Funciones C^∞ con decrecimiento rápido en infinito

$\phi \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$ es una función C^∞ con decrecimiento rápido en infinito si para cada $n \in \mathbb{N}$ y cada multi-índice α existe una constante $M_{n,\alpha} > 0$ verificando

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+\|x\|_2^2)^n |D^\alpha \phi(x)| \leqslant M_{n,\alpha}$$

Estas funciones forman un espacio vectorial, que denotamos $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, la clase de Schwartz
En $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ consideramos la topología (localmente convexa y metrizable) asociada a la familia de seminormas

$$\sup_{|\alpha|\leqslant N} \sup_{x\in\mathbb{R}^d} (1+\|x\|_2^2)^k |D^\alpha \phi(x)| \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d), k, N \in \mathbb{N})$$

$\{\phi_n\} \to 0$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \iff \|x\|_2^k D^\alpha \phi_n(x) \to 0$ uniformemente en $\mathbb{R}^d$ $\forall\ k, \alpha$

La clase de Schwartz

Propiedades

- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow PD^{\alpha}\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ para todo polinomio P y multi-índice α

La clase de Schwartz

Propiedades

- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow P,\ D^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ para todo polinomio P y multi-índice α
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L_1(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L_1(\mathbb{R}^d)$

La clase de Schwartz

Propiedades

- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow P,\ D^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ para todo polinomio P y multi-índice α
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L_1(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L_1(\mathbb{R}^d)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Fréchet

La clase de Schwartz

Propiedades

- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow P,\ D^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ para todo polinomio P y multi-índice α
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L_1(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L_1(\mathbb{R}^d)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Fréchet
- Las derivaciones, la multiplicación por un polinomio, o por un elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ son aplicaciones continuas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

La clase de Schwartz

Propiedades

- $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow P,\ D^\alpha \phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ para todo polinomio P y multi-índice α
- $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L_1(\mathbb{R}^d)$ y $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $L_1(\mathbb{R}^d)$
- $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es un espacio de Fréchet
- Las derivaciones, la multiplicación por un polinomio, o por un elemento de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ son aplicaciones continuas de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$
- $\mathcal{F}(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, de hecho $\mathcal{F} \in L(\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$

Transormada inversa

Transformada de Fourier inversa

Dada $\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ su transformada inversa es

$$[\mathcal{F}^{-1}(\phi)](x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} \phi(\xi) d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

Transormada inversa

Transformada de Fourier inversa

Dada $\phi \in L_1(\mathbb{R}^d)$ su transformada inversa es

$$[\mathcal{F}^{-1}(\phi)](x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} \phi(\xi) d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

Teorema de inversión

Para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ se tiene

$$\phi(x) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{ix\cdot\xi} [\mathcal{F}(\phi)](\xi) d\xi \qquad (x \in \mathbb{R}^d)$$

Es decir, $\mathcal{F}^{-1} \circ \mathcal{F} = \mathrm{Id}$ en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Como consecuencia $\mathcal{F}$ es un isomorfismo topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ en sí mismo

Transformada de Fourier en $L_2(\mathbb{R}^d)$

Teorema de Plancherel

Existe un isomorfismo isométrico $\Psi : L_2(\mathbb{R}^d) \to L_2(\mathbb{R}^d)$ unívocamente determinado por la condición

$$\Psi(\phi) = \mathcal{F}(\phi) \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)).$$

Es decir, la transformada de Fourier se extiende a una isometría sobreyectiva de $L_2(\mathbb{R}^d)$ en sí mismo.

Distribuciones temperadas

o funciones generalizadas de crecimiento lento

Son funcionales lineales y continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ al espacio de las distribuciones temperadas, es decir, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ y lo consideramos dotado de la topología w^*

Distribuciones temperadas

o funciones generalizadas de crecimiento lento

Son funcionales lineales y continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ al espacio de las distribuciones temperadas, es decir, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ y lo consideramos dotado de la topología w^*

Proposición

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y la inclusión $I : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua. Como consecuencia, las distribuciones temperadas son precisamente aquellas $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ que se pueden extender de manera continua a todo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Distribuciones temperadas

o funciones generalizadas de crecimiento lento

Son funcionales lineales y continuos en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Denotamos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ al espacio de las distribuciones temperadas, es decir, $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) = \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)^*$ y lo consideramos dotado de la topología w^*

Proposición

$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ es denso en $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ y la inclusión $I : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ es continua. Como consecuencia, las distribuciones temperadas son precisamente aquellas $\Lambda \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ que se pueden extender de manera continua a todo $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$

Proposición

$\Lambda : \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \to \mathbb{K}$ funcional lineal. Equivalen:

- Λ es una distribución temperada
- Existen naturales k, N y una constante $M > 0$ de modo que

$$|\langle \Lambda, \phi \rangle| \leqslant M \sup_{|\alpha| \leqslant N} \sup_{x \in \mathbb{R}^d} (1 + \|x\|_2^2)^k |D^\alpha \phi(x)| \qquad (\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d))$$

Distribuciones temperadas

Corolario

α multi-índice, P polinomio, $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

$$\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \Longrightarrow D^\alpha \Lambda,\ P\Lambda,\ \phi\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$$

Ejemplos

Ejemplos

- Las distribuciones de soporte compacto son temperadas

Ejemplos

Ejemplos

- Las distribuciones de soporte compacto son temperadas
- μ medida de Borel positiva de modo que $\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|x\|_2^2)^{-k}d\mu(x) < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, la fórmula

$$\langle \Lambda, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\mu(x) \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$$

define una distribución temperada

Ejemplos

Ejemplos

- Las distribuciones de soporte compacto son temperadas
- μ medida de Borel positiva de modo que $\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|x\|_2^2)^{-k}d\mu(x)<\infty$ para algún $k\in\mathbb{N}$. Entonces, la fórmula

$$\langle\Lambda,\phi\rangle=\int_{\mathbb{R}^d}\phi(x)d\mu(x)\qquad(\phi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$$

  define una distribución temperada
- $1\leqslant p<\infty$,$N>0$, $g:\mathbb{R}^d\to\mathbb{K}$ medible de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^d}\left|(1+\|x\|_2^2)^{-N}g(x)\right|^p dx<\infty.$$

  Entonces Λ_g es una distribución temperada. Como consecuencia toda función de $L_p(\mathbb{R}^d)$, todo polinomio y toda función medible mayorada en valor absoluto por un polinomio definen distribuciones temperadas

Ejemplos

Ejemplos

- Las distribuciones de soporte compacto son temperadas
- μ medida de Borel positiva de modo que $\int_{\mathbb{R}^d}(1+\|x\|_2^2)^{-k}d\mu(x) < \infty$ para algún $k \in \mathbb{N}$. Entonces, la fórmula

$$\langle \Lambda, \phi \rangle = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) d\mu(x) \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$$

  define una distribución temperada
- $1 \leqslant p < \infty$,$N > 0$, $g : \mathbb{R}^d \to \mathbb{K}$ medible de modo que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left| (1+\|x\|_2^2)^{-N} g(x) \right|^p dx < \infty.$$

  Entonces Λ_g es una distribución temperada. Como consecuencia toda función de $L_p(\mathbb{R}^d)$, todo polinomio y toda función medible mayorada en valor absoluto por un polinomio definen distribuciones temperadas
- $\mathrm{e}^t \cos(\mathrm{e}^t)$ no está mayorada por ningún polinomio pero define una distribución temperada

Transformada de Fourier de una distribución temperada

Transformada de Fourier

Dada $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, definimos su transformada de Fourier $\mathcal{F}(\Lambda)$ por

$$\langle \mathcal{F}(\Lambda), \phi \rangle = \langle \Lambda, \mathcal{F}(\phi) \rangle \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$$

$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es un isomorfismo sobreyectivo

Transformada de Fourier de una distribución temperada

Transformada de Fourier

Dada $\Lambda \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$, definimos su transformada de Fourier $\mathcal{F}(\Lambda)$ por

$$\langle \mathcal{F}(\Lambda), \phi \rangle = \langle \Lambda, \mathcal{F}(\phi) \rangle \qquad (\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d))$$

$\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ es un isomorfismo sobreyectivo

Ejemplo

- $\mathcal{F}(\delta) = (2\pi)^{-d/2}\mathbf{1}$

$$\langle \mathcal{F}(\delta), \phi \rangle = \langle \delta, \mathcal{F}(\phi) \rangle = [\mathcal{F}(\phi)](0) = (2\pi)^{-d/2} \int_{\mathbb{R}^d} \phi(x) dx = \langle (2\pi)^{-d/2}\mathbf{1}, \phi \rangle$$

para cada $\phi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$