Tema 3: Teoría de dualidad

Notación

Notación

Dual de un espacio normado

X normado, $L(X,\mathbb{K}) = X^*$ funcionales lineales continuos, $f \in X^*$:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X\,,\ \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\} \end{aligned}$$

X^* es siempre un espacio de Banach, el dual de X.

Notación

Dual de un espacio normado

X normado, $L(X,\mathbb{K}) = X^*$ funcionales lineales continuos, $f \in X^*$:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X\,,\ \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\} \end{aligned}$$

X^* es siempre un espacio de Banach, el dual de X.

Dual algebraico y dual topológico

★ X espacio vectorial

$$X^\sharp = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ f \text{ lineal}\}$$

dual algebraico de X.

Notación

Dual de un espacio normado

X normado, $L(X,\mathbb{K}) = X^*$ funcionales lineales continuos, $f \in X^*$:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \sup\{|f(x)| : x \in X\,,\ \|x\| \leqslant 1\} \\ &= \min\{M \geqslant 0 : |f(x)| \leqslant M\|x\| \ \ \forall x \in X\} \end{aligned}$$

X^* es siempre un espacio de Banach, el dual de X.

Dual algebraico y dual topológico

★ X espacio vectorial

$$X^\sharp = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ f \text{ lineal}\}$$

dual algebraico de X.

★ (X,τ) EVT (X espacio vectorial, τ topología vectorial)

$$(X,\tau)^* = \{f : X \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ f \text{ lineal y } \tau\text{-continuo}\}$$

dual topológico de (X,τ). Si τ se sobrentiende, escribimos X^*.

Par dual

Par dual

Par dual

X espacio vectorial, $Y \leqslant X^\sharp$ que separa los puntos de X.
Escribimos $\langle x, y \rangle$ para denotar la acción de $y \in Y \leqslant X^\sharp$ sobre $x \in X$.

- (X, Y) es un par dual.
- Como X separa los puntos de Y y $X \leqslant \big(Y\big)^\sharp$, (Y, X) es también un par dual.
- Si $(X, \mathcal{T})$ un ELC separado, el dual topológico $X^* = (X, \mathcal{T})^*$ separa los puntos de X (Teorema de Hahn-Banach), luego (X, X^*) es un par dual.

Una topología localmente convexa τ es compatible con el par dual (X, Y) si $(X, \tau)^* = Y$. Si no hay confusión posible, diremos solamente que la topología τ es compatible.

Par dual

Par dual

X espacio vectorial, $Y \leqslant X^\sharp$ que separa los puntos de X.
Escribimos $\langle x, y \rangle$ para denotar la acción de $y \in Y \leqslant X^\sharp$ sobre $x \in X$.

- (X, Y) es un par dual.
- Como X separa los puntos de Y y $X \leqslant \big(Y\big)^\sharp$, (Y, X) es también un par dual.
- Si $(X, \mathcal{T})$ un ELC separado, el dual topológico $X^* = (X, \mathcal{T})^*$ separa los puntos de X (Teorema de Hahn-Banach), luego (X, X^*) es un par dual.

Una topología localmente convexa τ es compatible con el par dual (X, Y) si $(X, \tau)^* = Y$. Si no hay confusión posible, diremos solamente que la topología τ es compatible.

Siempre existen topologías en X compatibles con el par dual (X, Y):

Topología débil asociada a un par dual

Topología débil asociada a un par dual

Topología débil asociada a un par dual

(X, Y) par dual. La topología inicial en X para los elementos de Y se denota por $\sigma(X, Y)$ y se llama topología débil en X asociada al par dual (X, Y).

Topología débil asociada a un par dual

Topología débil asociada a un par dual

(X,Y) par dual. La topología inicial en X para los elementos de Y se denota por $\sigma(X,Y)$ y se llama topología débil en X asociada al par dual (X,Y).

- $\sigma(X,Y)$ es una topología locamente convexa separada en X.
- Es la topología asociada a la familia de seminormas

$$\varphi_y(x) = |\langle x,y\rangle| \qquad \big(x \in X,\ y \in Y\big).$$

- Es la menor topología en X que hace continuos a los elementos de Y.
- Los conjuntos de la forma

$$U(J,\varepsilon) = \{x \in X \ : \ |\langle x,y\rangle| \leqslant \varepsilon \quad \forall y \in J\}$$

  donde J es un subconjunto finito de Y y $\varepsilon > 0$, forman una base de entornos de cero para $\sigma(X,Y)$.
- Es la topología en X de la convergencia puntual sobre los elementos de Y.

Topología débil. II

Topología débil. II

Propiedad importante

Sea (X,Y) un par dual.

- Un funcional lineal f en X es $\sigma(X,Y)$-continuo si, y sólo si, existe un $y_0 \in Y$ tal que
$$f(x) = \langle x, y_0 \rangle \qquad (x \in X).$$
- La topología $\sigma(X,Y)$ es compatible con el par dual (X,Y) (esto es, $\big(X, \sigma(X,Y)\big)^* = Y$ y es la mínima topología en X con esta propiedad.

Polares absolutos

Polares absolutos

Polar absoluto. Bipolar

Dado un par dual (X,Y) y un subconjunto no vacío A de X, el polar absoluto de A es

$$A^\circ = \{y \in Y \ : \ |\langle a,y\rangle| \leqslant 1 \ \ \forall a \in A\}.$$

Análogamente, para un subconjunto no vacío B de Y se define su polar absoluto por

$$B^\circ = \{x \in X \ : \ |\langle x,b\rangle| \leqslant 1 \ \ \forall b \in B\}.$$

Para $A \subset X$ tiene sentido el bipolar $A^{\circ\circ}$, que vuelve a ser subconjunto de X.

Polares absolutos

Polar absoluto. Bipolar

Dado un par dual (X,Y) y un subconjunto no vacío A de X, el polar absoluto de A es

$$A^\circ = \{y \in Y \ : \ |\langle a, y\rangle| \leqslant 1 \ \ \forall a \in A\}.$$

Análogamente, para un subconjunto no vacío B de Y se define su polar absoluto por

$$B^\circ = \{x \in X \ : \ |\langle x, b\rangle| \leqslant 1 \ \ \forall b \in B\}.$$

Para $A \subset X$ tiene sentido el bipolar $A^{\circ\circ}$, que vuelve a ser subconjunto de X.

Observación

Si (X,Y) es un par dual, la familia de conjuntos $\{J^\circ : J \subset Y, \ J \text{ finito}\}$ es base de entornos de cero para la topología $\sigma(X,Y)$.

Teorema del bipolar

Teorema del bipolar

Teorema del bipolar

(X,Y) par dual, $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{D}A)$
(cierre en cualquier topología en X compatible con el par dual (X,Y)).

Teorema del bipolar

Teorema del bipolar

(X,Y) par dual, $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{D}A)$
(cierre en cualquier topología en X compatible con el par dual (X,Y)).

Consecuencia 1

(X,Y) par dual, τ_1 topología compatible en X, τ_2 topología compatible en Y. Entonces la aplicación $M \longmapsto M^{\circ}$ es un anti-isomorfismo del retículo de los subespacios τ_1-cerrados de X en el retículo de los subespacios τ_2-cerrados de Y. En particular, $\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)^{\circ} = \overline{\sum_{i\in I} M_i^{\circ}}$.

Teorema del bipolar

Teorema del bipolar

(X,Y) par dual, $\emptyset \neq A \subset X \implies A^{\circ\circ} = \overline{\mathrm{co}}(\mathbb{D}A)$
(cierre en cualquier topología en X compatible con el par dual (X,Y)).

Consecuencia 1

(X,Y) par dual, τ_1 topología compatible en X, τ_2 topología compatible en Y. Entonces la aplicación $M \longmapsto M^{\circ}$ es un anti-isomorfismo del retículo de los subespacios τ_1-cerrados de X en el retículo de los subespacios τ_2-cerrados de Y. En particular, $\left(\bigcap_{i\in I} M_i\right)^{\circ} = \overline{\sum_{i\in I} M_i^{\circ}}$.

Consecuencia 2

(X,X_1), (Y,Y_1) pares duales, $T : X \longrightarrow Y$ lineal. Equivalen:

- T es $\sigma(X,X_1) - \sigma(Y,Y_1)$ continua,
- Existe $S : Y_1 \longrightarrow X_1$ tal que

$$\langle Tx, v\rangle = \langle x, Sv\rangle \quad \big(x \in X,\ v \in Y_1\big).$$

En este caso, S es única ($S = T^*$), lineal, $\sigma(Y_1,Y) - \sigma(X_1,X)$ continua y $T^{**} = T$.

Topologías débil y débil-$*$ de un ELC

Topologías débil y débil-$*$ de un ELC

Topología débil y topología débil-$*$ de un ELC

X ELC separado, (X, X^*) par dual.

- $\sigma(X, X^*)$ es LA topología débil de X.
  - Es la menor topología en X que hace continuos a los elementos de X^*.
  - En particular, $(X, \sigma(X, X^*))^* = X^*$.
  - Es la topología en X de la convergencia puntual sobre los elementos de X^*.
  - Esto es, topología en X de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos finitos de X^*.
- $\sigma(X^*, X)$ es la topología débil-$*$ de X^* como dual de X (o asociada al par dual (X, X^*).
  - Es la menor topología en X^* que hace continuos a los elementos de X.
  - En particular, $(X^*, \sigma(X^*, X))^* = X$.
  - Es la topología en X^* de la convergencia puntual sobre los elementos de X.
  - Esto es, topología en X^* de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos finitos de X.

Observaciones

Observaciones

Observaciones

X ELC separado.

- En general, en X^* puede que no tengamos ninguna topología destacada.

Observaciones

Observaciones

X ELC separado.

- En general, en X^* puede que no tengamos ninguna topología destacada.
- En ese caso, al menos disponemos de la topología $\sigma(X^*, X)$.

Ejemplo: espacio de las distribuciones

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $\mathcal{D}(\Omega)$ funciones test (ELC con su topología natural).

★ En $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$ se considera la topología $\sigma\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)$.

★ $\Big(\mathcal{D}'(\Omega), \sigma\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)\Big)$ es un ELC separado secuencialmente completo.

Observaciones

Observaciones

X ELC separado.

- En general, en X^* puede que no tengamos ninguna topología destacada.
- En ese caso, al menos disponemos de la topología $\sigma(X^*, X)$.
- Este es sólo el comienzo de la teoría de dualidad, podemos considerar otras topologías en X^*:
  - Topología de Mackey $\tau(X^*, X)$: supremo de todas las topologías compatibles y topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos absolutamente convexos y $\sigma(X, X^*)$-compactos de X.
  - Topología fuerte $\beta(X^*, X)$: topología de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados de X.

Ejemplo: espacio de las distribuciones

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ abierto, $\mathcal{D}(\Omega)$ funciones test (ELC con su topología natural).

★ En $\mathcal{D}'(\Omega) = \mathcal{D}(\Omega)^*$ se considera la topología $\sigma\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)$.

★ $\Big(\mathcal{D}'(\Omega), \sigma\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)\Big)$ es un ELC separado secuencialmente completo.

★ $\Big(\mathcal{D}'(\Omega), \beta\big(\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)\big)\Big)$ es un ELC separado completo y con la propiedad de Heine-Borel.

Algunos resultados

Algunos resultados

Teorema de Mazur

(X,τ) ELC separado, $M \subset X$ convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

Algunos resultados

Teorema de Mazur

(X, τ) ELC separado, $M \subset X$ convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

Topología débil de un subespacio

X ELC separado, Y subespacio de X. Entonces la topología débil $\sigma(Y, Y^*)$ de Y coincide con la restricción a Y de la topología débil $\sigma(X, X^*)$ de X.

Algunos resultados

Teorema de Mazur

(X, τ) ELC separado, $M \subset X$ convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

Topología débil de un subespacio

X ELC separado, Y subespacio de X. Entonces la topología débil $\sigma(Y, Y^*)$ de Y coincide con la restricción a Y de la topología débil $\sigma(X, X^*)$ de X.

¡Los dos resultados anteriores son falsos para la topología débil-$*$!

Algunos resultados

Teorema de Mazur

(X,τ) ELC separado, $M \subset X$ convexo, entonces

$$\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\tau}.$$

Topología débil de un subespacio

X ELC separado, Y subespacio de X. Entonces la topología débil $\sigma(Y,Y^*)$ de Y coincide con la restricción a Y de la topología débil $\sigma(X,X^*)$ de X.

¡Los dos resultados anteriores son falsos para la topología débil-$*$!

Teorema de Alaoglu-Bourbaki

Sea X un ELC separado y U un entorno de cero en X. Entonces U° es un subconjunto $\sigma(X^*,X)$-compacto de X^*.

Algunos resultados en espacios normados

Algunos resultados en espacios normados

Observación

X espacio normado.

- La familia de todos los conjuntos de la forma

$$\{x \in X : |f_i(x)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \dots, n\} = \varepsilon \{f_1, f_2, \dots, f_n\}^\circ$$

moviendo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $f_1, \dots, f_n \in S_{X^*}$, es base de entornos de cero para la topología $\sigma(X, X^*)$.

- La familia de todos los conjuntos de la forma

$$\{x^* \in X^* : |x^*(x_i)| < \varepsilon,\ i = 1, 2, \dots, n\} = \varepsilon \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^\circ$$

moviendo $n \in \mathbb{N}$, $\varepsilon > 0$ y $x_1, \dots, x_n \in S_X$, es base de entornos de cero para la topología $\sigma(X^*, X)$.

Algunos resultados en espacios normados. II

Algunos resultados en espacios normados. II

Proposición

X espacio normado de dimensión infinita.

- Los subconjuntos $\sigma(X,X^*)$-abiertos de X y los subconjunto $\sigma(X^*,X)$-abiertos de X^* no están acotados (contienen subespacios de codimensión finita).
- $\overline{S_X}^{\sigma(X,X^*)} = B_X$ y $\overline{S_{X^*}}^{\sigma(X^*,X)} = B_{X^*}$.
- En consecuencia, las aplicaciones

  $$x \longmapsto \|x\| \quad (x \in X) \quad \text{y} \quad x^* \longmapsto \|x^*\| \quad (x^* \in X)$$

  son inferiormente semicontinuas para las topologías débil y débil-* (resp.) pero no son continuas.
- (Tª de Mazur) $M \subset X$ convexo, entonces $\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\|\cdot\|}$.

Algunos resultados en espacios normados. II

Proposición

X espacio normado de dimensión infinita.

- Los subconjuntos $\sigma(X,X^*)$-abiertos de X y los subconjunto $\sigma(X^*,X)$-abiertos de X^* no están acotados (contienen subespacios de codimensión finita).
- $\overline{S_X}^{\sigma(X,X^*)} = B_X$ y $\overline{S_{X^*}}^{\sigma(X^*,X)} = B_{X^*}$.
- En consecuencia, las aplicaciones

$$x \longmapsto \|x\| \quad (x \in X) \quad \text{y} \quad x^* \longmapsto \|x^*\| \quad (x^* \in X)$$

son inferiormente semicontinuas para las topologías débil y débil-* (resp.) pero no son continuas.

- (Tª de Mazur) $M \subset X$ convexo, entonces $\overline{M}^{\sigma(X,X^*)} = \overline{M}^{\|\cdot\|}$.

Teorema de Banach-Alaoglu

X espacio normado: B_{X^*} es $\sigma(X^*,X)$-compacto. Por tanto, todo subconjunto de X^* acotado en norma y $\sigma(X^*,X)$-cerrado es compacto.

Bidual. Espacios reflexivos

Bidual. Espacios reflexivos

Bidual. Espacio reflexivo

X espacio normado, $X^{**} = (X^*)^*$ bidual de X.
Definimos $J_X : X \longrightarrow X^{**}$ por

$$[J_X(x)](x^*) = x^*(x) \qquad \big(x^* \in X^*,\ x \in X\big)$$

inclusión canónica de X en X^{**}, isométrica por el Teorema de Hahn-Banach.

★ En X^{**} podemos considerar la topología $\sigma(X^{**}, X^*)$ que al restringirla a $X = J_X(X)$ nos queda $\sigma(X, X^*)$.

★ Es claro (THB) que X es $\sigma(X^{**}, X)$ denso en X^{**}.

★ X es reflexivo si J_X es sobreyectiva (equivalentemente, si $J_X(B_X) = B_{X^{**}}$).

Algunos resultados importantes

Algunos resultados importantes

Teorema de Goldstine

X espacio normado, $J_X(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$.

Algunos resultados importantes

Teorema de Goldstine

X espacio normado, $J_X(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$.

Teorema de Dieudonné

X espacio normado. X reflexivo $\iff$ B_X $\sigma(X, X^*)$-compacta.

Algunos resultados importantes

Teorema de Goldstine

X espacio normado, $J_X(B_X)$ es $\sigma(X^{**}, X^*)$-denso en $B_{X^{**}}$.

Teorema de Dieudonné

X espacio normado. X reflexivo $\iff$ B_X $\sigma(X, X^*)$-compacta.

Consecuencia

X reflexivo $\implies$ todo conjunto $\sigma(X, X^*)$-cerrado y acotado es $\sigma(X, X^*)$-compacto.

Convergencia débil y débil-$*$

Convergencia débil y débil-$*$

Convergencia

X espacio normado, $\{x_n\}$ sucesión en X, $\{f_n\}$ sucesión en X^*.

- $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ en la topología $\sigma(X, X^*)$ si $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para cada $f \in X^*$.
  ★ En este caso, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.
- $\{f_n\}$ converge a $f \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ si $\{f_n(x)\} \longrightarrow f(x)$ para cada $x \in X$.
  ★ Si X es completo, en este caso, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Convergencia débil y débil-$*$

Convergencia

X espacio normado, $\{x_n\}$ sucesión en X, $\{f_n\}$ sucesión en X^*.

- $\{x_n\}$ converge a $x \in X$ en la topología $\sigma(X, X^*)$ si $\{f(x_n)\} \longrightarrow f(x)$ para cada $f \in X^*$.
  ★ En este caso, $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.
- $\{f_n\}$ converge a $f \in X^*$ en la topología $\sigma(X^*, X)$ si $\{f_n(x)\} \longrightarrow f(x)$ para cada $x \in X$.
  ★ Si X es completo, en este caso, $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ está acotado.

Algunos casos particulares

Para las topologías

$$\sigma(c_0, \ell_1), \quad \sigma(\ell_1, c_0), \quad \sigma(\ell_\infty, \ell_1) \quad \text{y} \quad \sigma(\ell_p, \ell_q) \;\; (1 < p, q < \infty),$$

la convergencia de una sucesión $\{x_n\}$ es equivalente a la acotación en norma y la convergencia coordenada a coordenada.

Metrizabilidad de las topologías débiles

Metrizabilidad de las topologías débiles

Observación

X espacio de Banach de dimensión infinita.
Entonces ni $\sigma(X, X^*)$ ni $\sigma(X^*, X)$ son metrizables.

Metrizabilidad de las topologías débiles

Observación

X espacio de Banach de dimensión infinita.
Entonces ni $\sigma(X, X^*)$ ni $\sigma(X^*, X)$ son metrizables.

Proposición

- Si X es separable $\implies (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es metrizable.
- Si X^* es separable $\implies (B_X, \sigma(X, X^*))$ es metrizable.

Metrizabilidad de las topologías débiles

Observación

X espacio de Banach de dimensión infinita.
Entonces ni $\sigma(X, X^*)$ ni $\sigma(X^*, X)$ son metrizables.

Proposición

- Si X es separable $\implies$ $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es metrizable.
- Si X^* es separable $\implies$ $(B_X, \sigma(X, X^*))$ es metrizable.

Consecuencia

- Toda sucesión acotada de un espacio reflexivo admite una subsucesión débilmente convergente.
- Toda sucesión acotada del dual de un espacio de Banach separable admite una subsucesión débil-$*$-mente convergente.

Metrizabilidad de las topologías débiles

Observación

X espacio de Banach de dimensión infinita.
Entonces ni $\sigma(X, X^*)$ ni $\sigma(X^*, X)$ son metrizables.

Proposición

- Si X es separable $\implies$ $(B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$ es metrizable.
- Si X^* es separable $\implies$ $(B_X, \sigma(X, X^*))$ es metrizable.

Consecuencia

- Toda sucesión acotada de un espacio reflexivo admite una subsucesión débilmente convergente.
- Toda sucesión acotada del dual de un espacio de Banach separable admite una subsucesión débil-$*$-mente convergente.

Teorema de Banach-Mazur

Todo espacio normado separable es isométricamente isomorfo a un subespacio de $C[0,1]$.

Algunos teoremas importantes

Algunos teoremas importantes

Lema de Schur

Toda sucesión de vectores en ℓ_1 que sea $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-convergente es convergente en norma.

Algunos teoremas importantes

Lema de Schur

Toda sucesión de vectores en ℓ_1 que sea $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-convergente es convergente en norma.

Teorema de Josefson-Nissenzweig

X espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión en S_{X^*} que es $\sigma(X^*, X)$-convergente a cero.

Algunos teoremas importantes

Lema de Schur

Toda sucesión de vectores en ℓ_1 que sea $\sigma(\ell_1, \ell_\infty)$-convergente es convergente en norma.

Teorema de Josefson-Nissenzweig

X espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión en S_{X^*} que es $\sigma(X^*, X)$-convergente a cero.

Rosenthal–Odell

X espacio de Banach separable. Equivalen

- X no contiene (un subespacio isomorfo) a ℓ_1
- B_X es $\sigma(X^{**}, X^*)$-secuencialmente densa en $B_{X^{**}}$.

Algunos teoremas importantes

Lema de Schur

Toda sucesión de vectores en ℓ_1 que sea $\sigma(\ell_1,\ell_\infty)$-convergente es convergente en norma.

Teorema de Josefson-Nissenzweig

X espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces existe una sucesión en S_{X^*} que es $\sigma(X^*,X)$-convergente a cero.

Rosenthal–Odell

X espacio de Banach separable. Equivalen

- X no contiene (un subespacio isomorfo) a ℓ_1
- B_X es $\sigma(X^{**},X^*)$-secuencialmente densa en $B_{X^{**}}$.

Observaciones

- La topología $\sigma(\ell_1,\ell_\infty)$ no es metrizable en B_{ℓ_1}.
- Para $X=\ell_1$, B_X es $\sigma(X^{**},X^*)$-secuencialmente cerrada.

Compacidad débil y sucesiones

Compacidad débil y sucesiones

Teorema de Eberlein-Smulian

X espacio normado, $A \subset X$. Equivalen:

- A es $\sigma(X, X^*)$-compacto.
- A es $\sigma(X, X^*)$ secuencialmente compacto (esto es, de cualquier sucesión de elementos de A puede extraerse una subsucesión $\sigma(X, X^*)$-convergente a un elemento de A).

Compacidad débil y sucesiones

Teorema de Eberlein-Smulian

X espacio normado, $A \subset X$. Equivalen:

- A es $\sigma(X, X^*)$-compacto.
- A es $\sigma(X, X^*)$ secuencialmente compacto (esto es, de cualquier sucesión de elementos de A puede extraerse una subsucesión $\sigma(X, X^*)$-convergente a un elemento de A).

Corolario

Si X es reflexivo, cualquier sucesión acotada en norma admite una subsucesión $\sigma(X, X^*)$ convergente.

Tercer dual. Teorema de Dixmier

Tercer dual. Teorema de Dixmier

X espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \qquad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \qquad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección con $\|P_X\| = 1$ y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^\perp.$$

Tercer dual. Teorema de Dixmier

X espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \qquad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \qquad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección con $\|P_X\| = 1$ y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^{\perp}.$$

Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^{\perp}$ y la suma es topológico directa.

Tercer dual. Teorema de Dixmier

X espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \qquad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \qquad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección con $\|P_X\| = 1$ y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^{\perp}.$$

Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^{\perp}$ y la suma es topológico directa.
Recíprocamente, si Y es un espacio de Banach y existe una proyección $P : Y^{**} \longrightarrow J_Y(Y)$ con $\|P\| = 1$ y tal que $\ker P$ es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$-cerrado, entonces existe un espacio X tal que $Y \equiv X^*$.

Tercer dual. Teorema de Dixmier

X espacio normado, consideramos

$$J_X : X \longrightarrow X^{**}, \qquad J_{X^*} : X^* \longrightarrow X^{***}, \qquad P_X = J_{X^*} \circ (J_X)^*.$$

Entonces $P_X : X^{***} \longrightarrow X^{***}$ es una proyección con $\|P_X\| = 1$ y

$$P_X(X^{***}) = J_{X^*}(X^*) \equiv X^* \quad \text{y} \quad \ker P_X = [J_X(X)]^{\perp}.$$

Teorema de Dixmier

$X^{***} = J_{X^*}(X^*) \oplus [J_X(X)]^{\perp}$ y la suma es topológico directa.
Recíprocamente, si Y es un espacio de Banach y existe una proyección $P : Y^{**} \longrightarrow J_Y(Y)$ con $\|P\| = 1$ y tal que $\ker P$ es $\sigma(Y^{**}, Y^*)$-cerrado, entonces existe un espacio X tal que $Y \equiv X^*$.

Ejemplo

$X = c_0$, $X^* = \ell_1$, $X^{**} = \ell_\infty$. $\implies$ $X^{***} = \ell_\infty^* \equiv \ell_1 \oplus_{\mathbf{1}} c_0^{\perp}$.
Esto es, c_0 es un M-ideal en ℓ_∞.

Puntos extremos y subconjuntos extremales

Puntos extremos y subconjuntos extremales

X espacio vectorial, $A \subset X$.

★ $\emptyset \neq E \subset A$ es subconjunto extremal de A si

$$x, y \in A, \ \ 0 < t < 1, \ \ (1-t)x + ty \in E \quad \Longrightarrow \quad x, y \in E.$$

★ $a \in A$ es un punto extremo de A cuando $\{a\}$ es un subconjunto extremal de A, es decir,

$$x, y \in A, \ \ 0 < t < 1, \ \ (1-t)x + ty = a \quad \Longrightarrow \quad x = y = a.$$

★ $\mathrm{ext}(A)$ conjunto (posiblemente vacío) de los puntos extremos de A.

Puntos extremos y subconjuntos extremales

X espacio vectorial, $A \subset X$.

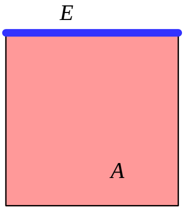
★ $\emptyset \neq E \subset A$ es subconjunto extremal de A si

$$x, y \in A, \quad 0 < t < 1, \quad (1-t)x + ty \in E \qquad \Longrightarrow \qquad x, y \in E.$$

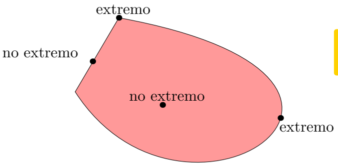
★ $a \in A$ es un punto extremo de A cuando $\{a\}$ es un subconjunto extremal de A, es decir,

$$x, y \in A, \quad 0 < t < 1, \quad (1-t)x + ty = a \qquad \Longrightarrow \qquad x = y = a.$$

★ $\mathrm{ext}(A)$ conjunto (posiblemente vacío) de los puntos extremos de A.



E es un subconjunto extremal de A



Teorema de Minkowski-Carathéodory

Teorema de Minkowski-Carathéodory

Teorema de Minkowski-Carathéodory

$K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces, cada $x \in K$ se puede escribir como combinación convexa de, a lo sumo, $n+1$ puntos extremos de K.
En particular,

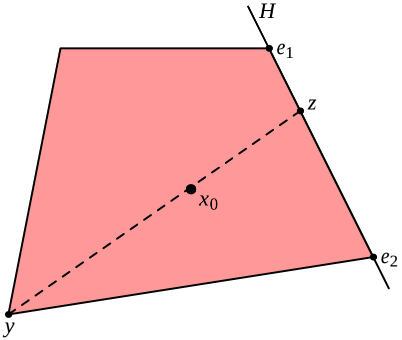
$$K = \mathrm{co}\left(\mathrm{ext}(K)\right).$$

Teorema de Minkowski-Carathéodory

Teorema de Minkowski-Carathéodory

$K \subset \mathbb{R}^N$ compacto y convexo de $\mathbb{R}^n$. Entonces, cada $x \in K$ se puede escribir como combinación convexa de, a lo sumo, $n+1$ puntos extremos de K.
En particular,

$$K = \operatorname{co}\big(\operatorname{ext}(K)\big).$$



Teorema de Krein-Milman

Teorema de Krein-Milman

Lema

X espacio vectorial, $A \subset X$, $f \in X^\sharp$ tal que $\operatorname{Re} f$ alcanza su máximo en A. Entonces,

$$E = \{x \in A \ : \ \operatorname{Re} f(x) = \text{máx } \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de A.

Teorema de Krein-Milman

Lema

X espacio vectorial, $A \subset X$, $f \in X^\sharp$ tal que $\operatorname{Re} f$ alcanza su máximo en A. Entonces,

$$E = \{x \in A \ : \ \operatorname{Re} f(x) = \text{máx } \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de A.

Teorema

X EVT tal que X^* separa puntos, $\emptyset \neq A \subset X$ compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de A contiene un punto extremo de A. En particular, A tiene puntos extremos.

Teorema de Krein-Milman

Lema

X espacio vectorial, $A \subset X$, $f \in X^\sharp$ tal que $\operatorname{Re} f$ alcanza su máximo en A. Entonces,

$$E = \{x \in A \ : \ \operatorname{Re} f(x) = \text{máx } \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de A.

Teorema

X EVT tal que X^* separa puntos, $\emptyset \neq A \subset X$ compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de A contiene un punto extremo de A. En particular, A tiene puntos extremos.

Teorema de Krein-Milman para ELC

X ELC separado, $A \subset X$ compacto. Entonces $A \subseteq \overline{\text{co}}\big(\text{ext}(A)\big)$. Si A es convexo, se da la igualdad.

Teorema de Krein-Milman

Lema

X espacio vectorial, $A \subset X$, $f \in X^\sharp$ tal que $\operatorname{Re} f$ alcanza su máximo en A. Entonces,

$$E = \{x \in A \ : \ \operatorname{Re} f(x) = \text{máx} \ \operatorname{Re} f(A)\}$$

es un subconjunto extremal de A.

Teorema

X EVT tal que X^* separa puntos, $\emptyset \neq A \subset X$ compacto. Entonces todo subconjunto extremal cerrado de A contiene un punto extremo de A. En particular, A tiene puntos extremos.

Teorema de Krein-Milman para ELC

X ELC separado, $A \subset X$ compacto. Entonces $A \subseteq \overline{\text{co}}\big(\text{ext}(A)\big)$. Si A es convexo, se da la igualdad.

Teorema de Krein-Milman revertido

X ELC separado, $\emptyset \neq C \subset X$ convexo y compacto, $E \subset C$ tal que $C = \overline{\text{co}}(E)$. Entonces, $\text{ext}(C) \subseteq \overline{E}$.

Principio del máximo de Bauer

Principio del máximo de Bauer

Lema

K compacto T_2, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente

$$\Longrightarrow \quad f \text{ alcanza máximo en } K$$

Principio del máximo de Bauer

Lema

K compacto T_2, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente

$$\Longrightarrow \quad f \text{ alcanza máximo en } K$$

Definición

X espacio vectorial, $A \subset X$ convexo, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es casi-convexa si

$$f\big((1-t)x+ty\big) \leqslant \max\{f(x),\ f(y)\} \qquad \big(x,y \in A,\ t \in [0,1]\big).$$

Principio del máximo de Bauer

Lema

K compacto T_2, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ semicontinua superiormente

$$\Longrightarrow \quad f \text{ alcanza máximo en } K$$

Definición

X espacio vectorial, $A \subset X$ convexo, $f : A \longrightarrow \mathbb{R}$ es casi-convexa si

$$f\big((1-t)x + ty\big) \leqslant \text{máx}\{f(x),\ f(y)\} \qquad \big(x, y \in A,\ t \in [0,1]\big).$$

Principio del máximo de Bauer

X EVT tal que X^* separa puntos, $K \subset X$ convexo y compacto, $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ casi-convexa y semicontinua superiormente.

$$\Longrightarrow f \quad \text{alcanza su máximo en un punto extremo de } K$$

Teorema clásico de Banach-Stone

Teorema clásico de Banach-Stone

Teorema de Arens-Kelley

K compacto T_2. Entonces $\operatorname{ext}\left(B_{C(K)^*}\right) = \{\lambda\delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$.

Teorema clásico de Banach-Stone

Teorema de Arens-Kelley

K compacto T_2. Entonces $\operatorname{ext}\left(B_{C(K)^*}\right) = \{\lambda\,\delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$.

Teorema clásico de Banach-Stone

H y K compactos y $\Phi : C(H) \longrightarrow C(K)$ isomorfismo isométrico. Entonces, existe $\sigma : K \longrightarrow H$ homeomorfismo y $\theta \in C(K)$ con $\theta(K) \subseteq \mathbb{T}$ tales que

$$\big[\Phi(x)\big](t) = \theta(t)\,x\big(\sigma(t)\big) \qquad \big(t \in K,\ x \in C(H)\big)$$

En particular, K y H son homeomorfos.

Teorema clásico de Banach-Stone

Teorema de Arens-Kelley

K compacto T_2. Entonces $\operatorname{ext}\left(B_{C(K)^*}\right) = \{\lambda\,\delta_t : t \in K, |\lambda| = 1\}$.

Teorema clásico de Banach-Stone

H y K compactos y $\Phi : C(H) \longrightarrow C(K)$ isomorfismo isométrico. Entonces, existe $\sigma : K \longrightarrow H$ homeomorfismo y $\theta \in C(K)$ con $\theta(K) \subseteq \mathbb{T}$ tales que

$$\big[\Phi(x)\big](t) = \theta(t)\,x\big(\sigma(t)\big) \qquad \big(t \in K,\ x \in C(H)\big)$$

En particular, K y H son homeomorfos.

Observación (Milyutin)

K y H compactos metrizables no numerables

$$\Longrightarrow\ C(K) \text{ y } C(H) \text{ son isomorfos}$$

Una extensión: el Teorema de Choquet

Una extensión: el Teorema de Choquet

Teorema de Choquet

X ELC separado, $K \subset X$ convexo, compacto y metrizable. Entonces para cada $x_0 \in K$, existe una medida de probabilidad μ_{x_0} en K tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k)\, d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \qquad \mu_{x_0}\big(\mathrm{ext}(K)\big) = 1.$$

Una extensión: el Teorema de Choquet

Teorema de Choquet

X ELC separado, $K \subset X$ convexo, compacto y metrizable. Entonces para cada $x_0 \in K$, existe una medida de probabilidad μ_{x_0} en K tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k)\, d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \qquad \mu_{x_0}\big(\mathrm{ext}(K)\big) = 1.$$

Se puede aplicar a...

- X separable, $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$.
- X reflexivo separable, $K = (B_X, \sigma(X, X^*))$.

Una extensión: el Teorema de Choquet

Teorema de Choquet

X ELC separado, $K \subset X$ convexo, compacto y metrizable. Entonces para cada $x_0 \in K$, existe una medida de probabilidad μ_{x_0} en K tal que

$$f(x_0) = \int_K f(k)\, d\mu_{x_0}(k) \quad \forall f \in X^*, \qquad \mu_{x_0}\big(\mathrm{ext}(K)\big) = 1.$$

Se puede aplicar a...

- X separable, $K = (B_{X^*}, \sigma(X^*, X))$.
- X reflexivo separable, $K = (B_X, \sigma(X, X^*))$.

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \mathrm{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Teorema de Rainwater

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Teorema de Rainwater

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Es una extensión del siguiente resultado:

Teorema de Rainwater

Corolario (Teorema de Rainwater)

X espacio normado, (x_n) sucesión en X y $x \in X$. Si (x_n) está acotada en norma y $\lim x^*(x_n) = x^*(x)$ para cada $x^* \in \operatorname{ext}(B_{X^*})$, entonces $(x_n) \longrightarrow x$ en la topología $\sigma(X, X^*)$.

Es una extensión del siguiente resultado:

Proposición

K espacio topológico compacto, $\{f_n\}$ sucesión en $C(K)$, $f \in C(K)$. Equivalen:

- $\{f_n\} \longrightarrow f$ en la topología $\sigma(C(K), C(K)^*)$,
- $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ acotado y $\{f_n(t)\} \longrightarrow f(t)$ para cada $t \in K$.