

## Tema 2: Los tres principios del Análisis Funcional

## 1 Lema de Categoría de Baire

- Nociones de categoría
- Lema de Baire y primeras aplicaciones

## 2 Teorema de la Aplicación Abierta

- Esquema de la demostración
- Versiones del Teorema
- Aplicación a series de Fourier
- Aplicación a ecuaciones diferenciales

## 3 Teorema de la Gráfica Cerrada

- Enunciado del Teorema
- Ejemplos de aplicación

## Categoría y espacios de Baire

Conjuntos de primera y segunda categoría

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:



## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

$$(1) A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ categoría en } E$$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

- (1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de  $2^a$  categoría en  $E$
- (2)  $A$  de  $1^a$  categoría en  $E \implies \text{ int } A = \emptyset$

## Categoría y espacios de Baire

### Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

### Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

- (1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de  $2^a$  categoría en  $E$
- (2)  $A$  de  $1^a$  categoría en  $E \implies \text{ int } A = \emptyset$
- (3)  $F_n = \overline{F_n} \subset E \forall n \in \mathbb{N}, \text{ int } \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \text{ int } F_m \neq \emptyset$

# Categoría y espacios de Baire

## Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

## Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

- (1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de  $2^a$  categoría en  $E$
- (2)  $A$  de  $1^a$  categoría en  $E \implies \text{ int } A = \emptyset$
- (3)  $F_n = \overline{F_n} \subset E \forall n \in \mathbb{N}, \text{ int } \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \text{ int } F_m \neq \emptyset$
- (4)  $G_n = \text{ int } G_n, \overline{G_n} = E \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = E$

# Categoría y espacios de Baire

## Conjuntos de primera y segunda categoría

$E$  espacio topológico,  $A \subset E$

$A$  es de **primera categoría** en  $E$  cuando:

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \text{ donde } F_n = \overline{F_n} \subset E, \text{ int } F_n = \emptyset, \forall n \in \mathbb{N}$$

En otro caso,  $A$  es de **segunda categoría** en  $E$

## Espacios de Baire

Para un espacio topológico  $E$ , son equivalentes:

- (1)  $A \subset E, \text{ int } A \neq \emptyset \implies A$  de  $2^a$  categoría en  $E$
- (2)  $A$  de  $1^a$  categoría en  $E \implies \text{ int } A = \emptyset$
- (3)  $F_n = \overline{F_n} \subset E \forall n \in \mathbb{N}, \text{ int } \left( \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right) \neq \emptyset \implies \exists m \in \mathbb{N} : \text{ int } F_m \neq \emptyset$
- (4)  $G_n = \text{ int } G_n, \overline{G_n} = E \forall n \in \mathbb{N} \implies \overline{\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n} = E$

Se dice que  $E$  es un **espacio de Baire** cuando las verifica. En particular, un espacio de Baire es de segunda categoría en sí mismo

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

Lema de categoría de Baire

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire



## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$  (luego  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no es numerable)

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$  (luego  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no es numerable)

### Aplicaciones

## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$  (luego  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no es numerable)

### Aplicaciones

- “Abundan” las funciones continuas no derivables así como las de clase  $C^\infty$  no analíticas



## Lema de Baire y primeras aplicaciones

### Lema de categoría de Baire

- Todo espacio métrico completo es un espacio de Baire
- Todo espacio topológico localmente compacto es un espacio de Baire

### Ejemplos

- La categoría es relativa:  $\mathbb{R}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$ , de  $1^a$  en  $\mathbb{C}$
- $A \subset E_1 \subset E_2$ ,  $A$  de  $1^a$  en  $E_1 \Rightarrow A$  de  $1^a$  en  $E_2$
- Una unión numerable de conjuntos de  $1^a$  categoría es de  $1^a$  categoría
- $\mathbb{Q}$  es de  $1^a$  categoría en sí mismo, luego no es metrizable-completo
- $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  es de  $2^a$  categoría en  $\mathbb{R}$  (luego  $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$  no es numerable)

### Aplicaciones

- “Abundan” las funciones continuas no derivables así como las de clase  $C^\infty$  no analíticas
- La dimensión de un F-espacio (en particular, de un espacio de Banach) es finita o no numerable

## Esquema de la demostración

Aplicaciones casi-abiertas

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal

$$T(X) \text{ de } 2^a \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$



## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal

$$T(X) \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

### Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T: X \rightarrow Y$  lineal

$$T(X) \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

### Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

## Esquema de la demostración

### Aplicaciones casi-abiertas

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal:

$T$  es abierta cuando:  $U$  entorno de cero en  $X \Rightarrow T(U)$  entorno de cero en  $Y$

Se dice que  $T$  es **casi-abierta** cuando:

$$U \text{ entorno de cero en } X \implies \overline{T(U)} \text{ entorno de cero en } Y$$

### Primer paso (categoría)

$X, Y$  EVT,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$$T(X) \text{ de } 2^{\text{a}} \text{ categoría en } Y \implies T \text{ casi-abierta}$$

### Segundo paso (aproximaciones sucesivas)

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$$T \text{ casi-abierta} \implies T \text{ abierta, } T(X) = Y, Y \text{ F-espacio}$$

## Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

## Versiones del Teorema

Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$



## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T$  biyectiva  $\implies T^{-1}$  continua

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T$  biyectiva  $\implies T^{-1}$  continua

### Teorema del Homomorfismo de Banach

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T$  biyectiva  $\implies T^{-1}$  continua

### Teorema del Homomorfismo de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

## Versiones del Teorema

### Resultado de los dos pasos anteriores

$X$  F-espacio,  $Y$  EVT metrizable,  $T \in L(X, Y)$

$T(X)$  de  $2^a$  categoría en  $Y \implies T$  abierta,  $T(X) = Y$ ,  $Y$  F-espacio

### Teorema de la Aplicación Abierta, Banach-Schauder

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = Y \implies T$  abierta

### Teorema de los Isomorfismos de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T$  biyectiva  $\implies T^{-1}$  continua

### Teorema del Homomorfismo de Banach

$X, Y$  F-espacios,  $T \in L(X, Y)$

$T(X) = \overline{T(X)} \implies T$  homomorfismo

## Aplicación a series de Fourier

Series trigonométricas y series de Fourier



## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:

## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$   
 $f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$

# Aplicación a series de Fourier

## Serie trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coeficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coeficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coeficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

### Problema

## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

### Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

## Aplicación a series de Fourier

### Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coeficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

### Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ¿ $\exists f \in L_1 : \hat{f} = a$ ?



# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coefficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

## Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ¿ $\exists f \in L_1 : \hat{f} = a$ ?

- Lema de Riemann-Lebesgue:  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0 \quad (\hat{f} \in c_0(\mathbb{Z}))$

# Aplicación a series de Fourier

## Series trigonométricas y series de Fourier

Serie trigonométrica:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a(n) e^{int}$  donde  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$

$$f \in L_1 = L_1[-\pi, \pi]$$

Coeficientes de Fourier:  $\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s) e^{-ins} ds \quad (n \in \mathbb{Z})$

Serie de Fourier:  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{f}(n) e^{int}$

## Problema

¿Qué series trigonométricas son series de Fourier?

Para  $a : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{C}$  ¿ $\exists f \in L_1 : \hat{f} = a$ ?

- Lema de Riemann-Lebesgue:  $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \hat{f}(n) = 0 \quad (\hat{f} \in c_0(\mathbb{Z}))$
- Teorema de unicidad:  $f, g \in L_1, \hat{f} = \hat{g} \implies f = g \text{ (c.p.d.)}$

# Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

## Aplicación a series de Fourier

Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo
- $L_1$  y  $c_0(\mathbb{Z})$  no son isomorfos

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo
- $L_1$  y  $c_0(\mathbb{Z})$  no son isomorfos
- Luego  $T$  no es sobreyectivo

## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo
- $L_1$  y  $c_0(\mathbb{Z})$  no son isomorfos
- Luego  $T$  no es sobreyectivo
- Luego  $T(L_1)$  es de 1ª categoría en  $c_0(\mathbb{Z})$



## Aplicación a series de Fourier

### Consecuencia del Teorema de los isomorfismos de Banach

$$T : L_1 \rightarrow c_0(\mathbb{Z}), \quad T(f) = \widehat{f}$$

- $T$  es lineal, continuo e inyectivo
- $L_1$  y  $c_0(\mathbb{Z})$  no son isomorfos
- Luego  $T$  no es sobreyectivo
- Luego  $T(L_1)$  es de 1ª categoría en  $c_0(\mathbb{Z})$
- Entre las series trigonométricas con coeficientes tendiendo a cero las series de Fourier son “atípicas”. El lema de Riemann-Lebesgue está muy lejos de caracterizar las series de Fourier.

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

Planteamiento de un problema de contorno

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, \quad x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$



## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a, b] \times \mathbb{R}^2$  espacio de Banach:  $\|(f, \alpha, \beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de  $X$  en  $Y$ :  $T(x) = (y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x, x(a), x(b))$

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a, b] \times \mathbb{R}^2$  espacio de Banach:  $\|(f, \alpha, \beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de  $X$  en  $Y$ :  $T(x) = (y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x, x(a), x(b))$

- $T$  es lineal y continuo

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a, b] \times \mathbb{R}^2$  espacio de Banach:  $\|(f, \alpha, \beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de  $X$  en  $Y$ :  $T(x) = (y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x, x(a), x(b))$

- $T$  es lineal y continuo
- Problema bien planteado  $\iff T$  biyectivo

## Aplicación a ecuaciones diferenciales

### Planteamiento de un problema de contorno

Coeficientes de la ecuación diferencial:  $y_0, y_1, y_2 : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continuas

Datos del problema:  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  continua,  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

(ED):  $y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x = f$  (CC):  $x(a) = \alpha, x(b) = \beta$

Solución (clásica): función  $x \in C^2[a, b]$  verificando (ED) y (CC)

Problema bien planteado: Para cualesquiera datos, tiene solución única

### Tratamiento funcional

$X = C^2[a, b]$  espacio de Banach:  $\|x\| = \|x\|_\infty + \|\dot{x}\|_\infty + \|\ddot{x}\|_\infty$

$Y = C[a, b] \times \mathbb{R}^2$  espacio de Banach:  $\|(f, \alpha, \beta)\| = \|f\|_\infty + |\alpha| + |\beta|$

Operador de  $X$  en  $Y$ :  $T(x) = (y_0 \ddot{x} + y_1 \dot{x} + y_2 x, x(a), x(b))$

- $T$  es lineal y continuo
- Problema bien planteado  $\iff T$  biyectivo
- Teorema de los isomorfismos de Banach: si el problema está bien planteado, la solución depende de manera continua de los datos

## Teorema de la Gráfica Cerrada

Relación entre continuidad y gráfica cerrada

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$$

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto



## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$
- $\text{Gr } f$  es cerrada cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x, \{f(x_n)\} \rightarrow y \implies f(x) = y$

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{ (x, f(x)) : x \in X \} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$
- $\text{Gr } f$  es cerrada cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x, \{f(x_n)\} \rightarrow y \implies f(x) = y$

### Teorema de la Gráfica Cerrada

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$
- $\text{Gr } f$  es cerrada cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x, \{f(x_n)\} \rightarrow y \implies f(x) = y$

### Teorema de la Gráfica Cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal,  $\text{Gr } T$  cerrada  $\implies T$  continuo

## Teorema de la Gráfica Cerrada

### Relación entre continuidad y gráfica cerrada

$X, Y$  espacios topológicos de Hausdorff,  $f : X \rightarrow Y$ ,

$$\text{Gr } f = \{(x, f(x)) : x \in X\} \subset X \times Y$$

$$f \text{ continua} \implies \text{Gr } f \text{ cerrada}$$

El recíproco está lejos de ser cierto

$X, Y$  espacios métricos:

- $f$  es continua cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x \implies \{f(x_n)\} \rightarrow f(x)$
- $\text{Gr } f$  es cerrada cuando:  $\{x_n\} \rightarrow x, \{f(x_n)\} \rightarrow y \implies f(x) = y$

### Teorema de la Gráfica Cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal,  $\text{Gr } T$  cerrada  $\implies T$  continuo

Por tanto, para asegurar que  $T$  es continuo basta probar:

$$\{x_n\} \rightarrow 0, \{T x_n\} \rightarrow y \implies y = 0$$

## Ejemplos de aplicación

Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal



## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, \quad f(y) = 0 \quad \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$   $F$ -espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, \quad f(y) = 0 \quad \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo} \quad \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

### Ejemplos

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

### Ejemplos

- $Y = l_p$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $\Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $f_n(y) = y(n) \forall y \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$



## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

### Ejemplos

- $Y = l_p$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $\Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $f_n(y) = y(n) \forall y \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y = L_p[0, 1]$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $E = L_0[0, 1]$ ,  $Jy = y \forall y \in Y$

## Ejemplos de aplicación

### Aplicación del Teorema de la gráfica cerrada

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$E$  espacio topológico de Hausdorff,  $J : Y \rightarrow E$  inyectiva y continua

$$J \circ T \text{ continua} \implies T \text{ continuo}$$

### Caso particular

$X, Y$  F-espacios,  $T : X \rightarrow Y$  lineal

$\Phi \subset Y^*$  subconjunto que separe puntos:

$$y \in Y, f(y) = 0 \forall f \in \Phi \implies y = 0$$

$$f \circ T \text{ continuo } \forall f \in \Phi \implies T \text{ continuo}$$

### Ejemplos

- $Y = l_p$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $\Phi = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ,  $f_n(y) = y(n) \forall y \in Y, \forall n \in \mathbb{N}$
- $Y = L_p[0, 1]$  ( $0 < p \leq \infty$ ),  $E = L_0[0, 1]$ ,  $Jy = y \forall y \in Y$
- $Y = C[0, 1], E = \mathbb{K}^{[0, 1]}$ ,  $Jy = y \forall y \in Y$