Tema 2: Los tres principios del Análisis Funcional

Notación

- X espacio vectorial
$$X^{\#} := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ lineal} \right\}$$
dual algebraico de X.
- X EVT
$$X^{*} := \left\{ f : X \longrightarrow \mathbb{K} : f \text{ lineal y continuo} \right\}$$
dual topológico de X.

Versión analítica del Teorema de Hahn-Banach

Funcional sublineal

X espacio vectorial, $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que

- $p(x+y) \leqslant p(x)+p(y)$ para $x, y \in X$.
- $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ para $\alpha \geqslant 0$ y $x \in X$.

Ejemplos: partes reales de los funcionales lineales y seminormas.

Teorema de Hahn-Banach, 1929

X e.v. p funcional sublineal en X.
Si M es un subespacio de X y $g \in M^\sharp$ verifica

$$\operatorname{Re} g(m) \leqslant p(m) \qquad (m \in M),$$

entonces existe $f \in X^\sharp$ cuya restricción a M coincide con g y que verifica

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant p(x) \qquad (x \in X).$$

★ En otras palabras, todo funcional lineal en M dominado por p se puede extender a un funcional lineal en X que sigue estando dominado por p.
★ Si p es una seminorma se tiene, de hecho,

$$|f(x)| \leqslant p(x) \qquad (x \in X).$$

Consecuencias en espacios normados

Teorema de Hahn, 1927

X un espacio normado, Y subespacio de X y $g \in Y^*$. entonces existe $f \in X^*$ con $\|f\| = \|g\|$ y tal que $f(y) = g(y)$ para todo $y \in Y$.

Corolario

X un espacio normado, Y subespacio cerrado de X. Si $x_0 \in X \setminus Y$, entonces existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x_0) = \operatorname{dist}(x_0, Y)$ e $Y \subseteq \ker(f)$.

Corolario

X un espacio normado no trivial. Entonces, para cada $x \in X \setminus \{0\}$ existe $f \in S_{X^*}$ tal que $f(x) = \|x\|$. Equivalentemente, se tiene la siguiente expresión para la norma de X:

$$\|x\| = \max\{\, |f(x)| \ : \ f \in S_{X^*} \,\} \qquad (x \in X).$$

Consecuencias en EVT

Observaciones

X EVT.

- Si $f \in X^* \setminus \{0\}$,

$$\varphi(x) = |f(x)| \qquad (x \in X)$$

  es una seminorma continua en X.

- Si $\varphi \neq 0$ es cualquier seminorma continua en X, el conjunto

$$U = \{x \in X \ : \ \varphi(x) < 1\}$$

  es un entorno convexo de cero en X y $U \neq X$.

- **Consecuencia del Tª de Hahn-Banach:**
  Si U es un entorno de cero convexo en X, $U \neq X$, y $x_0 \notin U$, entonces existe $f \in X^*$ tal que

$$\operatorname{Re} f(x) \leqslant 1 \quad (x \in U) \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Re} f(x_0) \geqslant 1.$$

Consecuencias en EVT. II

Proposición

X EVT. Equivalen:

- X^* separa los puntos de X.
- Para cada $x_0 \in X \setminus \{0\}$ existe una seminorma continua φ en X tal que $\varphi(x_0) \neq 0$.
- La intersección de todos los entornos convexos de cero en X es $\{0\}$.

Corolario

X ELC. Son equivalentes:

- X^* separa los puntos de X.
- X es separado.

Ejemplos

- Para $0 < p < 1$, ℓ_p no es localmente convexo aunque ℓ_p^* separa puntos.
- Para $0 < p < 1$, el espacio $L_p[0,1]$ tiene dual $\{0\}$.

La teoría de dualidad se ha desarrollado tradicionalmente en el ambiente de los ELC separados.

Consecuencias en EVT. III

Teorema de extensión Hahn-Banach para ELC

X un ELC, M un subespacio de X y $g \in M^*$. Existe $f \in X^*$ cuya restricción a M coincide con g.

X ELC, $A \subseteq X$, el anulador de A es

$$A^\perp := \{f \in X^* \ : \ f(A) = 0\}.$$

Corolario: caracterización dual del cierre de un subespacio

Sea X un ELC y M un subespacio de X. Se verifica que:

$$\overline{M} = \bigcap_{f \in M^\perp} \ker f.$$

En particular, M es denso en X si, y sólo si, $M^\perp = \{0\}$.

Duales de subespacios y cocientes

Dual de un subespacio

X ELC, M subespacio de X, $M^{\perp} = \left\{ f \in X^* : f(M) = \{0\} \right\}$

Como espacios vectoriales: $M^* \equiv X^*/M^{\perp}$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Dual de un cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X. Como espacios vectoriales:

$$(X/M)^* \equiv M^{\perp}$$

Si X es un espacio normado la identificación anterior es isométrica

Sistemas de ecuaciones lineales. I

Teorema de Hahn, 1927

X espacio normado, $A = \{z_i \; : \; i \in I\} \subset X$ y $\{c_i \; : \; i \in I\} \subset \mathbb{K}$. Equivalen:

- Existe f en X^* tal que $f(z_i) = c_i$ para todo $i \in I$.
- Existe $M \geqslant 0$ verificando

$$|\alpha_1 c_{i_1} + \cdots + \alpha_n c_{i_n}| \leqslant M \, \|\alpha_1 z_{i_1} + \cdots + \alpha_n z_{i_n}\|$$

  para cualquier combinación lineal $\alpha_1 z_{i_1} + \cdots + \alpha_n z_{i_n}$ de elementos de A.

En este caso, se puede elegir f de forma que $\|f\| \leqslant M$.

Sistemas de ecuaciones lineales. II

Teorema de Helly, 1921

X espacio normado, $f_1, f_2, \ldots, f_n \in X^*$ y $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{K}$. Equivalen:

- Existe x en X tal que $f_k(x) = c_k$ para $k = 1, 2, \ldots, n$.
- Existe $M \geqslant 0$ tal que

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k c_k \right| \leqslant M \left\| \sum_{k=1}^{n} a_k f_k \right\|$$

  para cualesquiera $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$.

En este caso, $\forall \varepsilon > 0$ se puede elegir x tal que $\|x\| \leqslant M + \varepsilon$.

Límites generalizados

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$, l_∞ espacio de Banach: $\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$

c subespacio de l_∞. Funcional: $\quad g(y) = \lim_{n\to\infty} y(n) \quad (y \in c)$

$g \in c^*$, $\|g\| = 1$. Por tanto: $\exists\, h \in l_\infty^* : \|h\| = 1,\ h(y) = \lim_{n\to\infty} y(n) \quad \forall y \in c$

Se dice que h es un límite generalizado

Límites de Banach

Existe un funcional $f : l_\infty \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(n) : n \in \mathbb{N}\} \quad \forall x \in l_\infty$

(3) $f\left(x^{(k)}\right) = f(x) \quad \forall x \in l_\infty,\ \forall k \in \mathbb{N}$, donde

$$x^{(k)}(n) = x(n+k) \quad (n \in \mathbb{N})$$

Como consecuencia se tiene que $f \in l_\infty^*$, $\|f\| = 1$ y

$$\liminf_{n\to\infty} x(n) \leqslant f(x) \leqslant \limsup_{n\to\infty} x(n) \quad \forall x \in l_\infty$$

En particular $f(y) = \lim_{n\to\infty} y(n) \quad \forall y \in c$. Se dice que f es un límite de Banach

Medias invariantes

$(\Lambda,+)$ semigrupo abeliano. Existe un funcional $f : l_\infty^\Lambda \to \mathbb{R}$ verificando:

(1) f es lineal

(2) $\inf\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\} \leqslant f(x) \leqslant \sup\{x(\lambda) : \lambda \in \Lambda\}$ $\forall x \in l_\infty^\Lambda$

(3) $f\left(x^{(\gamma)}\right) = f(x)$ $\forall x \in l_\infty^\Lambda,\ \forall \gamma \in \Lambda$ donde

$$x^{(\gamma)}(\lambda) = x(\lambda+\gamma) \quad (\lambda \in \Lambda)$$

En particular se tiene que $f \in (l_\infty^\Lambda)^*$ con $\|f\| = 1$

Medidas finitamente aditivas

Existe una función $\mu : \mathcal{P}(\mathbb{R}) \to [0,1]$ que verifica las siguientes condiciones:

(a) Es finitamente aditiva:

$$A, B \subset \mathbb{R}, \quad A \cap B = \emptyset \implies \mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

(b) Es invariante por traslaciones:

$$A \subset \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R} \implies \mu(A+x) = \mu(A)$$

Separación de conjuntos convexos

Planteamiento del problema

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos

¿Existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, con $f \neq 0$, y $\alpha \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B?$$

Equivalentemente: $\sup \operatorname{Re} f(A) \leqslant \inf \operatorname{Re} f(B)$

o bien: $\operatorname{Re} f(a) \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$

En caso afirmativo f separa A y B.
El hiperplano afín (real) de ecuación $\operatorname{Re} f(x) = \alpha$ también separa A y B

Contraejemplo

En general la respuesta es negativa, no siempre podemos separar:

$X = c_{00}$, $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ vectores unidad, $B = \{0\}$,

$$A = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \alpha_k e_k : N \in \mathbb{N}, \ \alpha_1, \ldots, \alpha_N \in \mathbb{R}, \ \alpha_N > 0 \right\}$$

A y B de c_{00} son subconjuntos convexos, no vacíos y disjuntos, pero

$$f : c_{00} \to \mathbb{R} \ \text{ lineal, } f \neq 0 \implies f(A) = \mathbb{R}$$

Teoremas de Separación

Separación en espacios vectoriales

X espacio vectorial, A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos.

Supongamos que existe $a_0 \in A$ tal que $A - a_0$ es absorbente.

Entonces podemos separar A y B: existen $f : X \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación en EVT

X EVT, A y B subconjuntos convexos.

Supongamos que $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, que $B \neq \emptyset$ y que $(\operatorname{int} A) \cap B = \emptyset$.

Entonces existen $f \in X^*$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

De hecho, se tiene

$$\operatorname{Re} f(x) < \gamma \quad \forall x \in \operatorname{int} A$$

Primeras consecuencias

Funcionales de soporte

X EVT, A subconjunto convexo, $\operatorname{int} A \neq \emptyset$, $x_0 \in \partial A$.

Existe $f \in X^*$, $f \neq 0$, tal que:

$$\operatorname{Re} f(x_0) = \text{máx}\{\operatorname{Re} f(a) : a \in A\}$$

Versión geométrica del THB

X EVT, A subconjunto no vacío, abierto y convexo, M variedad afín tal que $A \cap M = \emptyset$.

Existe un hiperplano cerrado $H \subset X$ tal que $M \subset H$ y $A \cap H = \emptyset$

Separación en dimensión finita

A y B subconjuntos convexos, no vacíos, disjuntos de $\mathbb{K}^N$.

Existen $f : \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}$ lineal, $f \neq 0$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Equivalentemente, existen $u \in \mathbb{K}^N \setminus \{0\}$ y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que

$$\operatorname{Re}\left(a \middle| u\right) \leqslant \gamma \leqslant \operatorname{Re}\left(b \middle| u\right) \quad \forall a \in A, \ \forall b \in B$$

Separación fuerte

Separación fuerte en ELC

X ELC, A, B subconjuntos convexos, no vacíos disjuntos.

Supongamos que A es cerrado y B es compacto.

Existen $f \in X^*$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \alpha < \beta \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Separación fuerte en espacios normados

X espacio normado, A, B subconjuntos no vacíos, convexos.

Supongamos que A y B están a distancia positiva: $d(A, B) = \rho > 0$.

Entonces, existen $f \in X^*$, con $\|f\| = 1$, y $\gamma \in \mathbb{R}$ tales que:

$$\operatorname{Re} f(a) \leqslant \gamma < \gamma + \rho \leqslant \operatorname{Re} f(b) \quad \forall a \in A, \quad \forall b \in B$$

Integral de Pettis

Integración débil

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, X ELC separado, $\varphi : \Omega \to X$.

- φ débilmente medible $\iff$ $f \circ \varphi$ medible $\forall f \in X^*$
- φ débilmente integrable $\iff$ $f \circ \varphi \in \mathcal{L}_1(\mu)$ $\forall f \in X^*$
- φ es integrable en el sentido de Pettis cuando es débilmente integrable y existe $x \in X$ tal que

$$f(x) = \int_\Omega (f \circ \varphi)\, d\mu \quad \forall f \in X^*$$

El vector x es único, se le llama integral de Pettis de φ con respecto a μ:

$$x = \int_\Omega \varphi\, d\mu$$

Integral de Pettis

Existencia de la integral

X ELC separado y completo

K espacio topológico compacto de Hausdorff

μ medida de Borel positiva y finita en K

Toda función continua de K en X es integrable en el sentido de Pettis.

Suponiendo, sin perder generalidad, $\mu(K) = 1$, para toda función continua $\varphi : K \to X$ se tiene:

$$\int_K \varphi \, d\mu \in \overline{\operatorname{co} \varphi(K)}$$