

Tema 1: Espacios Vectoriales Topológicos. Tipos y ejemplos de EVT

- 1 EVT: Ideas básicas
 - Preliminares algebraicos
 - Concepto de EVT
 - Construcción de EVT

- 2 Nociones uniformes
 - Continuidad uniforme
 - Complitud
 - Precompacidad

- 3 Acotación
 - Conjuntos acotados
 - Operadores lineales acotados

- 4 Construcciones con EVT
 - Topologías iniciales
 - Cocientes
 - Homomorfismos
 - Sumas topológico-directas

Notación

X espacio vectorial (sobre $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o \mathbb{C})

$\Lambda \subset \mathbb{K}$, $\alpha \in \mathbb{K}$, $A, B \subset X$, $x \in X$,

$$\Lambda A = \{\lambda a : \lambda \in \Lambda, a \in A\}, \quad \Lambda x = \{\lambda x : \lambda \in \Lambda\}, \quad \alpha A = \{\alpha a : a \in A\}$$

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}, \quad x + B = \{x + b : b \in B\}$$

Por ejemplo,

- A subespacio de $X \iff \mathbb{K}A + A \subset A$
- A convexo $\iff (1 - \rho)A + \rho A \subset A \quad \forall \rho \in [0, 1]$

Conjuntos absorbentes y equilibrados

- $A \subset X$ es **absorbente** cuando $X = \mathbb{R}^+ A$
- $B \subset X$ es **equilibrado** cuando $\mathbb{D}B = B$, donde $\mathbb{D} = \{\lambda \in \mathbb{K} : |\lambda| \leq 1\}$
Para $A \subset X$, $\mathbb{D}A$ es la **envolvente equilibrada** de A

Concepto de Espacio Vectorial Topológico

Definición

Topología Vectorial:

Topología en un espacio vectorial X que hace continuas

- La suma: $X \times X \rightarrow X$, $(x, y) \mapsto x + y$ ($x, y \in X$)
- El producto por escalares: $\mathbb{K} \times X \rightarrow X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$ ($\lambda \in \mathbb{K}, x \in X$)

La topología trivial es vectorial, la discreta no (salvo $X = \{0\}$)

EVT = espacio vectorial dotado de una topología vectorial

Propiedad inmediata: homogeneidad

X EVT, $\lambda_0 \in \mathbb{K}$ con $\lambda_0 \neq 0$ y $x_0 \in X$. La aplicación $x \mapsto \lambda_0 x + x_0$ es un homeomorfismo de X .

Las traslaciones, giros y homotecias son homeomorfismos

\mathcal{B} base de entornos de cero en X

\Downarrow

$\{x + B : B \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cada $x \in X$

La topología de X queda **determinada** por \mathcal{B}

¿Cómo son las bases de entornos de cero para una topología vectorial?

Construcción de topologías vectoriales

Entornos de cero

X EVT, $\mathcal{U} = \{ \text{entornos de cero en } X \}$

- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow X = \mathbb{R}^+ U$. Todo entorno de cero es absorbente
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : \mathbb{D}V = V \subset U$. Todo entorno de cero contiene un entorno de cero equilibrado
- $U \in \mathcal{U} \Rightarrow \exists V \in \mathcal{U} : V + V \subset U$

Definición constructiva de EVT

X espacio vectorial, \mathcal{B} familia de subconjuntos de X verificando:

- $\forall U, V \in \mathcal{B} \exists W \in \mathcal{B} : W \subset U \cap V$
- $U \in \mathcal{B} \implies U$ absorbente
- $U \in \mathcal{B} \implies U$ equilibrado
- $\forall U \in \mathcal{B} \exists V \in \mathcal{B} : V + V \subset U$

Entonces existe una (única) topología vectorial en X para la cual \mathcal{B} es base de entornos de cero

Uso de la definición constructiva

Pseudonormas

X espacio vectorial, $\nu : X \rightarrow \mathbb{R}$ **pseudonorma** cuando:

$$(1) \nu(x+y) \leq \nu(x) + \nu(y) \quad \forall x, y \in X$$

$$(2) \lambda \in \mathbb{D} \implies \nu(\lambda x) \leq \nu(x) \quad \forall x \in X$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} \nu\left(\frac{x}{n}\right) = 0 \quad \forall x \in X.$$

Una **seminorma** verifica (1) y $\nu(\lambda x) = |\lambda| \nu(x) \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x \in X$, luego toda seminorma es una pseudonorma

Topología asociada a una pseudonorma

X espacio vectorial, ν pseudonorma en X ,

$$U_\varepsilon = \{x \in X : \nu(x) \leq \varepsilon\}$$

La familia $\{U_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ es base de entornos de cero para una (única) topología vectorial en X , la topología **asociada a la pseudonorma** ν , con la que X es un EVT **pseudonormable** (**seminormable** cuando ν es una seminorma)

Definiendo $\delta(x, y) = \nu(x - y)$ para $x, y \in X$, se obtiene una semidistancia que genera la misma topología.

Seminormable \implies Pseudonormable \implies Semimetrizable

Uso de los entornos de cero

X EVT, \mathcal{B} base de entornos de cero,

- Cierre de un conjunto $A \subset X$:

$$\bar{A} = \bigcap_{U \in \mathcal{B}} A + U$$

- $\{\bar{U} : U \in \mathcal{B}\}$ base de entornos de cero **cerrados**
- X es un espacio topológico **regular**
- Los axiomas de separación \mathbf{T}_0 , \mathbf{T}_1 , \mathbf{T}_2 y \mathbf{T}_3 son equivalentes para X .
EVT **separado**
- X separado $\iff \{0\}$ cerrado
- Un espacio pseudonormable es separado cuando su pseudonorma ν es **total**: $x \in X, \nu(x) = 0 \implies x = 0$

seminorma total = norma

Continuidad uniforme

X, Y EVT, $A \subset X$, $f : A \rightarrow Y$

f es **uniformemente continua** (en A) cuando para cada V entorno de 0 en Y existe un U , entorno de 0 en X , tal que:

$$a, b \in A, a - b \in U \Rightarrow f(a) - f(b) \in V$$

Coherente en caso de que X e Y sean pseudonormables

Continuidad de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \rightarrow Y$ operador lineal. Equivalen:

- (i) T es uniformemente continuo en X
- (ii) T es continuo en X
- (iii) T es continuo en 0

$L(X, Y)$ operadores lineales continuos

Redes

- **Conjunto dirigido:** $\Lambda \neq \emptyset$ con relación binaria \leq , reflexiva y transitiva (preorden) verificando:

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda \quad \exists \lambda \in \Lambda : \lambda_1 \leq \lambda, \lambda_2 \leq \lambda$$

Ejemplos: cualquier conjunto con una relación de orden total, \mathbb{N} , \mathbb{R} . Los entornos de un punto en un espacio topológico ordenados por “contención”

- **Red en un conjunto X :** Aplicación $\varphi : \Lambda \rightarrow X$, con Λ dirigido. Notación: $x_\lambda = \varphi(\lambda)$, $\varphi \equiv \{x_\lambda\}$. Ejemplo: sucesión
- **Red convergente:** X espacio topológico, $\{x_\lambda\}$ red en X , $x \in X$:

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \forall U \in \mathcal{U}(x) \quad \exists \lambda_0 \in \Lambda : \{x_\lambda : \lambda_0 \leq \lambda\} \subset U$$

- **Las redes convergentes caracterizan la topología:**

$$x \in \overline{A} \iff \exists \{a_\lambda\} : a_\lambda \in A \quad \forall \lambda \in \Lambda, \{a_\lambda\} \rightarrow x$$

- Ejemplo: En todo EVT, **el cierre de un subespacio es un subespacio**

Complitud

Red de Cauchy

- En un espacio métrico: $\forall \varepsilon > 0 \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow d(x_{\lambda_1}, x_{\lambda_2}) < \varepsilon$
- En un EVT: $\forall U \in \mathcal{U}(0) \exists \lambda_0 : \lambda_1, \lambda_2 \geq \lambda_0 \Rightarrow x_{\lambda_1} - x_{\lambda_2} \in U$

Conjuntos completos

X EVT, $E \subset X$. E **completo** cuando toda red de Cauchy en E converge a un punto de E .

Uso de la complitud

- E completo, $F = \overline{F} \cap E \Rightarrow F$ completo
- X separado, $X \supset E$ completo $\Rightarrow E = \overline{E}$
- Todo EVT se puede completar
- **Extensión de funciones:** X, Y EVT, Y separado y completo, $M \subset X$ subespacio denso, $T \in L(M, Y)$. Existe única extensión $\tilde{T} \in L(X, Y)$. Por tanto $L(M, Y) \cong L(X, Y)$

Precompacidad

Conjuntos precompactos

En un espacio métrico:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall \varepsilon > 0, A \subset \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon)$$

En un EVT:

$$A \text{ precompacto} \iff \forall U \in \mathcal{U}(0), \exists F \text{ finito} : A \subset F + U$$

Propiedades de los conjuntos precompactos

- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A precompacto $\implies \bar{A}$ precompacto
- A precompacto, f uniformemente continua $\implies f(A)$ precompacto

Caracterización de la compacidad

X EVT, $A \subset X$,

$$A \text{ compacto} \iff A \text{ precompacto y completo}$$

Por tanto, si X es completo,

$$A \text{ precompacto} \iff A \text{ relativamente compacto}$$

Conjuntos acotados

Definición de conjunto acotado

X EVT, $A \subset X$,

A **acotado** $\iff \forall U$ entorno de cero en X , $\exists \rho \in \mathbb{R}^+$: $A \subset \rho U$

Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν :

A acotado $\implies \sup\{\nu(a) : a \in A\} < \infty$

El recíproco no es cierto en general, pero sí para seminormas

Propiedades de los conjuntos acotados

- Precompacto \implies Acotado
- A acotado $\iff \left[\{a_n : n \in \mathbb{N}\} \subset A \implies \left\{ \frac{a_n}{n} \right\} \rightarrow 0 \right]$
- Uniones finitas, combinaciones lineales, envolventes equilibradas
- A acotado $\implies \bar{A}$ acotado

Acotación de operadores lineales

X, Y EVT, $T : X \rightarrow Y$ lineal. Consideramos varias afirmaciones:

(a) T acotado en un entorno de cero:

$\exists U$ entorno de cero en $X : T(U)$ acotado en Y

(b) T continuo

(c) T secuencialmente continuo

(d) T acotado:

$$A \subset X, A \text{ acotado} \implies T(A) \text{ acotado en } Y$$

- Siempre: (a) \Rightarrow (b) \Rightarrow (c) \Rightarrow (d)
- En general, ninguna reversible
- Si X tiene un entorno de cero acotado, todas son equivalentes
- Si Y tiene un entorno de cero acotado, (b) \Rightarrow (a)
- Si X es semimetrizable, (d) \Rightarrow (b)

Topologías iniciales

Topología inicial

$X \neq \emptyset$, $\{(X_i, \mathcal{T}_i) : i \in I\}$ espacios topológicos, $f_i : X \rightarrow X_i$ ($i \in I$).

Topología inicial para $\{f_i : i \in I\}$: Mínima que las hace a todas continuas

Hechos generales

- Base de la topología inicial:

$$\left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(G_i) : J \subset I, J \text{ finito}, G_i \in \mathcal{T}_i \forall i \in J \right\}$$

- Convergencia en la topología inicial:

$$\{x_\lambda\} \rightarrow x \iff \{f_i(x_\lambda)\} \rightarrow f_i(x) \forall i \in I$$

- Criterio de continuidad: Y espacio topológico, $f : Y \rightarrow X$,

$$f \text{ continua} \iff f_i \circ f \text{ continua} \quad \forall i \in I$$

- Ejemplos: **inducida**, **producto**, **supremo**
- **Teorema de Tichonoff**: Un producto arbitrario de espacios topológicos compactos es compacto

Topología inicial para aplicaciones lineales

- X espacio vectorial, $\{X_i : i \in I\}$ familia de EVT y para cada $i \in I$, $f_i : X \rightarrow X_i$ lineal. Entonces X con la topología inicial es un EVT.

- Base de entornos de cero en X :

$$\mathcal{B} = \left\{ \bigcap_{i \in J} f_i^{-1}(U_i) : J \subset I, J \text{ finito}, U_i \in \mathcal{B}_i \forall i \in J \right\}$$

- Ejemplos: Subespacios, Producto de EVT, Supremo

- Separación: Si X_i es separado para todo $i \in I$,

$$X \text{ separado} \iff \bigcap_{i \in I} \ker f_i = \{0\}$$

- Acotación y Precompacidad: $A \subset X$,

$$A \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \iff f_i(A) \begin{cases} \text{acotado} \\ \text{precompacto} \end{cases} \quad \forall i \in I$$

- Complitud: $\prod_{i \in I} X_i$ completo $\iff X_i$ completo $\forall i \in I$

Cociente de EVT

Topología cociente

X EVT, M subespacio vectorial de X , $\pi : X \rightarrow X/M$ aplicación cociente

Definición de la topología cociente: $G \subset X/M$,

$$G \text{ abierto} \iff \pi^{-1}(G) \text{ abierto en } X$$

Hechos básicos

- π es continua y abierta
- X/M es un EVT
- X/M separado $\iff \overline{M} = M$
- Y espacio topológico, $f : X/M \rightarrow Y$,

$$f \text{ continua} \iff f \circ \pi \text{ continua}$$

- Si X tiene la topología asociada a una pseudonorma ν , definiendo:

$$\tilde{\nu}(x + M) = \inf\{\nu(x + m) : m \in M\},$$

$\tilde{\nu}$ es una pseudonorma en X/M que genera la topología cociente. Si ν es una seminorma, igual le ocurre a $\tilde{\nu}$

Homomorfismos de EVT

Isomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. **Isomorfismo** de X sobre Y : Operador lineal biyectivo $T : X \rightarrow Y$ tal que T y T^{-1} son continuos

Homomorfismo (de EVT)

X e Y EVT. **Homomorfismo** de X en Y : Operador lineal continuo $T : X \rightarrow Y$ tal que $T : X \rightarrow T(X)$ es una aplicación abierta

Inyectivo \Rightarrow **Monomorfismo**; Sobreyectivo \Rightarrow **Epimorfismo**

Todo homomorfismo (T) es composición de un epimorfismo (π), un isomorfismo (\tilde{T}) y un monomorfismo (I)

Suma topológico-directa

Suma directa algebraica de dos subespacios

X espacio vectorial, Y subespacio de X . Complemento algebraico de Y en X : subespacio Z de X tal que $X = Y + Z$, $Y \cap Z = \{0\}$, es decir $X = Y \oplus Z$, suma directa

- $\Phi: Y \times Z \rightarrow X$, $\Phi(y, z) = y + z$ biyección lineal
- $\Phi^{-1}(x) = (Px, x - Px)$. $P: X \rightarrow X$ proyección lineal:
 $P^2 = P$, $P(X) = Y$, $\ker P = Z$
- $\Psi: Z \rightarrow X/Y$, $\Psi(z) = z + Y$ biyección lineal

Suma topológico-directa

X EVT, $X = Y \oplus Z$, Φ y Ψ siempre son continuas. Son equivalentes:

- (1) Φ^{-1} es continua (Φ es un isomorfismo)
- (2) P es continua
- (3) Ψ^{-1} es continua (Ψ es un isomorfismo)

Suma topológico-directa

Subespacios complementados

Ejemplos sencillos

- X EVT separado, $X = Y \oplus Z$,
suma topológico directa $\implies Y, Z$ cerrados
- X EVT, $X = \overline{\{0\}} \oplus Z$ suma topológico-directa
 Z EVT separado, isomorfo a $X/\overline{\{0\}}$

subespacio complementado

X EVT, Y subespacio de X

Y **complementado**: $\exists Z : X = Y \oplus Z$ suma topológico-directa

Equivalentemente: $\exists P : X \rightarrow X$ proyección lineal continua, $P(X) = Y$

$Z = \ker P$ **complemento topológico** de Y en X , isomorfo a X/Y

X EVT separado, Y subespacio complementado de $X \implies Y$ cerrado