Tema 1: Espacios Vectoriales Topológicos. Tipos y ejemplos de EVT

El espacio l_∞

$$l_\infty = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} < \infty \right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(n)| : n \in \mathbb{N}\} \quad (x \in l_\infty)$$

Convergencia uniforme en $\mathbb{N}$: $\quad x_n \in l_\infty \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(k) = x(k) \ \text{ uniformemente en } k \in \mathbb{N}$$

Subespacio denso:

$$l_\infty = \overline{\operatorname{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \mathbb{N}\}}$$

l_∞ no es separable: $\quad E, F \subseteq \mathbb{N},\ E \neq F \ \Rightarrow \ \|\chi_E - \chi_F\|_\infty = 1$

Subespacios destacados de l_∞

Vectores unidad: $\{e_n : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{K}^{\mathbb{N}}, \quad e_n(n) = 1, \quad e_n(k) = 0 \ \forall k \neq n$

$$c_{00} = \operatorname{Lin}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \left\{ \sum_{k=1}^{N} \lambda_k e_k \ : \ N \in \mathbb{N}, \ \lambda_1, \ldots, \lambda_N \in \mathbb{K} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{n \to \infty} x(n) = 0 \right\}$$

$$c = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \exists \lim_{n \to \infty} x(n) \right\} = c_0 \oplus \mathbb{K}\, u \quad \big(u(n) = 1 \ \forall n \in \mathbb{N} \big)$$

Observaciones

- c_0 y c son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞)
- c_{00} es denso en c_0: $x \in c_0 \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$

  Serie incondicionalmente convergente en c_0. Los vectores unidad forman una base de Schauder, de hecho una base incondicional, de c_0

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

$$l_p = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p)$$

Para $0 < p < 1$, l_p tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O mejor, la casinorma: $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

$$\|x+y\|_p \leqslant 2^{\frac{1}{p}-1} \left(\|x\|_p + \|y\|_p \right) \quad (x, y \in l_p, 0 < p < 1)$$

Para $0 < p < 1$, l_p no es localmente convexo

Espacios l_p con $0 < p < \infty$

- c_{00} es un subespacio denso en l_p:

$$x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{n=1}^{\infty} x(n)\, e_n$$

  serie (incondicionalmente) convergente en l_p. Los vectores unidad forman una base (incondicional) de l_p

- Dependencia de p:

$$0 < p < q \leqslant \infty\,,\ x \in l_p \quad \Rightarrow \quad x \in l_q\,,\ \|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

  La inclusión $l_p \subseteq l_q$ es estricta y el operador $Id : l_p \to l_q$ es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Caso $p = 0$

- $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, la topología producto es la asociada a la pseudonorma

$$\lceil x \rceil_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x(n)|}{1 + |x(n)|} \qquad (x \in \Omega)$$

- La convergencia en ω es la puntual:

$$\lceil x_n - x \rceil_0 \ \to \ 0 \ \ \Leftrightarrow \ \ \lim_{n \to \infty} x_n(k) = x(k) \ \ \forall k \in \mathbb{N}$$

ω es un espacio de Fréchet no normable

- c_{00} es denso en ω y ω es separable
- Para $0 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales:

$$c_{00} \subset l_p \subset l_q \subset c_0 \subset c \subset l_\infty \subset \omega$$

Familias sumables en EVT

$\Lambda \neq \emptyset$, $\mathcal{F}(\Lambda) = \{J \subseteq \Lambda : J \text{ finito}\}$ conjunto dirigido (por inclusión)

X EVT separado, $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$

Red de sumas finitas:

$$S_J = \sum_{\lambda \in J} x_\lambda \qquad (J \in \mathcal{F}(\Lambda))$$

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \text{ sumable} \iff \{S_J\} \text{ convergente}$$

$$\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = x \iff \{S_J\} \to x$$

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) \; : \; J \in \mathcal{F}(\Lambda), \; J \supseteq J_0 \; \Rightarrow \sum_{\lambda \in J} x_\lambda - x \in U$$

Condición de Cauchy:

$$\forall U \in \mathcal{U}(0) \;\; \exists J_0 \in \mathcal{F}(\Lambda) \; : \; K \in \mathcal{F}(\Lambda), \; K \cap J_0 = \emptyset \; \Rightarrow \sum_{\lambda \in K} x_\lambda \in U$$

Hechos básicos

- Linealidad: $\displaystyle\sum_{\lambda\in\Lambda}(\alpha\, a_\lambda + \beta b_\lambda) = \alpha \sum_{\lambda\in\Lambda} a_\lambda + \beta \sum_{\lambda\in\Lambda} b_\lambda$
- Incondicionalidad: $\sigma : I \to \Lambda$ biyectiva,

$$\sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda = x \iff \sum_{i\in I} x_{\sigma(i)} = x$$

- Operadores: X, Y EVT separados, $T \in L(X,Y)$,

$$x = \sum_{\lambda\in\Lambda} x_\lambda \ \text{ en } \ X \implies T(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} T(x_\lambda) \ \text{ en } \ Y$$

- Consecuencias de la condición de Cauchy:
  (1) Subfamilias: $\Lambda_0 \subseteq \Lambda \Rightarrow \{x_\lambda : \lambda \in \Lambda_0\}$ Cauchy
  (2) $U \in \mathcal{U}(0) \implies \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \notin U\}$ finito
  (3) Si X es metrizable: $\{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es numerable

Relación con las series

- X EVT separado, Λ numerable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
  (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
  (b) $\sigma : \mathbb{N} \to \Lambda$ biyectiva $\Rightarrow \displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge.

  Si se cumplen (a) y (b): $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} x_\lambda = \sum_{n=1}^{\infty} x_{\sigma(n)}$

- X EVT metrizable. Para $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq X$ equivalen:
  (a) $\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ sumable
  (b) $\Lambda_1 = \{\lambda \in \Lambda : x_\lambda \neq 0\}$ es numerable y para cualquier biyección $\sigma : \mathbb{N} \to \Lambda_1$ la serie $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} x_{\sigma(n)}$ converge

Sumabilidad absoluta

Familias de números positivos:

$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq [0,\infty[\qquad \sum_{\lambda\in\Lambda} \rho_\lambda = \sup\left\{\sum_{\lambda\in J}\rho_\lambda : J \in \mathcal{F}(\Lambda)\right\}$

$$\{\rho_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{sumable} \iff \sum_{\lambda\in\Lambda}\rho_\lambda < \infty$$

X EVT metrizable, con pseudonorma ν:

$$\{x_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \ \text{absolutamente sumable} \iff \sum_{\lambda\in\Lambda}\nu(x_\lambda) < \infty$$

Sumabilidad y sumabilidad absoluta

- X F-espacio $\iff$ toda familia absolutamente sumable es sumable
- En dimensión finita toda familia sumable es absolutamente sumable
- Teorema de Dvoretsky-Rogers (1950): En todo espacio de Banach de dimensión infinita existe una serie incondicionalmente convergente que no es absolutamente convergente, equivalentemente una familia sumable que no es absolutamente sumable

El espacio l_∞^Λ

$$l_\infty^\Lambda = \left\{x \in \mathbb{K}^\Lambda \ : \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} < \infty\right\}$$

Espacio de Banach con la norma

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x(\lambda)| : \lambda \in \Lambda\} \quad (x \in l_\infty^\Lambda)$$

Convergencia uniforme en Λ: $\quad x_n \in l_\infty^\Lambda \ \forall n \in \mathbb{N}, \quad x \in l_\infty^\Lambda$

$$\|x_n - x\|_\infty \to 0 \iff \lim_{n\to\infty} x_n(\lambda) = x(\lambda) \ \text{ uniformemente en } \lambda \in \Lambda$$

Subespacio denso:

$$l_\infty^\Lambda = \overline{\operatorname{Lin}\{\chi_E : E \subseteq \Lambda\}}$$

Λ infinito $\implies$ l_∞^Λ no es separable: $\quad l_\infty \subseteq l_\infty^\Lambda$

Subespacios destacados de l_∞^Λ

Vectores unidad: $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$, $e_\lambda(\lambda) = 1$, $e_\lambda(\delta) = 0 \ \forall \delta \in \Lambda \setminus \{\lambda\}$

Familias de soporte finito:

$$c_{00}(\Lambda) = \operatorname{Lin}\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

Familias convergentes a cero:

$$x \in c_0(\Lambda) \iff \forall \varepsilon > 0, \ \{\lambda \in \Lambda : |x(\lambda)| \geqslant \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\Lambda)$$

Familias convergentes:

$$c(\Lambda) = c_0(\Lambda) \oplus \mathbb{K}u \qquad \big(u(\lambda) = 1 \ \forall \lambda \in \Lambda\big)$$

Observaciones

- $c_0(\Lambda)$ y $c(\Lambda)$ son espacios de Banach (subespacios cerrados de l_∞^Λ)
- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $c_0(\Lambda)$: $\quad x \in c_0(\Lambda) \ \Rightarrow \ x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$

  Los vectores unidad forman una base, de $c_0(\Lambda)$

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

$$l_p^\Lambda = \left\{ x \in \mathbb{K}^\Lambda : \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p < \infty \right\} \quad (0 < p < \infty)$$

Para $1 \leqslant p < \infty$, l_p^Λ es un espacio de Banach con la norma:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p} \qquad (x \in l_p^\Lambda)$$

Para $0 < p < 1$, l_p^Λ tiene la topología asociada a:

- La pseudonorma: $\lceil x \rceil_p = \sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p$ que le convierte en un F-espacio
- O la casinorma: $\|x\|_p = \left(\sum_{\lambda \in \Lambda} |x(\lambda)|^p \right)^{1/p}$ que le convierte en un espacio casi-Banach

Si Λ es infinito y $0 < p < 1$, l_p^Λ no es localmente convexo

Espacios l_p^Λ con $0 < p < \infty$

- $c_{00}(\Lambda)$ es un subespacio denso en l_p^Λ:

$$x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

  Los vectores unidad forman una base de l_p^Λ

- Dependencia de p:

$$0 < p < q \leqslant \infty\,,\ x \in l_p^\Lambda \quad \Rightarrow \quad x \in l_q^\Lambda\,,\ \|x\|_q \leqslant \|x\|_p$$

  Si Λ es infinito, la inclusión $l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda$ es estricta y el operador $Id : l_p^\Lambda \to l_q^\Lambda$ es lineal continuo e inyectivo, pero no es un monomorfismo

Caso $p = 0$

- En $\mathbb{K}^\Lambda$ es natural considerar la topología producto, que le convierte en un ELC separado y completo. Si Λ no es numerable, $\mathbb{K}^\Lambda$ no es metrizable
- Convergencia puntual: $\{x_i\}$ red en $\mathbb{K}^\Lambda$, $x \in \mathbb{K}^\Lambda$

$$\{x_i\} \to x \iff \{x_i(\lambda)\} \to x(\lambda) \ \ \forall \lambda \in \Lambda$$

- $c_{00}(\Lambda)$ es denso en $\mathbb{K}^\Lambda$:

$$x \in \mathbb{K}^\Lambda \implies x = \sum_{\lambda \in \Lambda} x(\lambda)\, e_\lambda$$

- $\mathbb{K}^\Lambda$ tiene la propiedad de Heine-Borel: todo subconjunto cerrado y acotado de $\mathbb{K}^\Lambda$ es compacto
- Para $0 < p < q < \infty$, como espacios vectoriales:

$$c_{00}(\Lambda) \subseteq l_p^\Lambda \subseteq l_q^\Lambda \subseteq c_0(\Lambda) \subseteq c(\Lambda) \subseteq l_\infty^\Lambda \subseteq \mathbb{K}^\Lambda$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida

Espacio de las funciones medibles

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\} \qquad \big(\mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \text{ o } \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{C})\big)$$

Dos observaciones

- Una función continua de una función medible es medible
- $f : \Omega \to \mathbb{R}^2, \quad f(x) = (u(x), v(x)) \;\; \forall x \in \Omega$. Entonces:

$$f \;\text{ medible } \iff u, v \;\text{ medibles}$$

Propiedades de las funciones medibles

- $f : \Omega \to \mathbb{C}$ es medible $\iff$ $\operatorname{Re} f\,, \operatorname{Im} f$ medibles.
- $f, g \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies f + g,\, f\, g \in \mathcal{L}_0(\mu)$ (álgebra sobre $\mathbb{K}$)
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu),\ p \in \mathbb{R}^+ \implies |f|^p$ medible positiva
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu, \mathbb{R}) \implies f^+, f^-$ medibles positivas
- $f \in \mathcal{L}_0(\mu) \implies \exists\ \alpha \in \mathcal{L}_0(\mu)$:

$$|\alpha(x)| = 1,\ f(x) = \alpha(x)\,|f(x)| \quad (x \in \Omega)$$

- $\{f_n\} \subseteq \mathcal{L}_0(\mu),\ \{f_n(x)\} \to f(x)\ \ \forall x \in \Omega \implies f \in \mathcal{L}_0(\mu)$

Espacios L_p

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida, $p \in [0, \infty]$:

$p = 0$ Funciones medibles:

$$\mathcal{L}_0(\mu) = \{f \in \mathbb{K}^\Omega : f \text{ medible}\}$$

$0 < p < \infty$ Funciones p-integrables:

$$\mathcal{L}_p(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \int_\Omega |f|^p \, d\mu < \infty\}$$

$p = \infty$ Funciones esencialmente acotadas:

$$f \in \mathcal{L}_0(\mu), \quad \operatorname{ess\,sup} |f| = \text{mín}\{M \in [0, \infty] : |f| \leqslant M \text{ c.p.d.}\}$$

$$\mathcal{L}_\infty(\mu) = \{f \in \mathcal{L}_0(\mu) : \operatorname{ess\,sup} |f| < \infty\}$$

Caso $1 \leqslant p < \infty$

$$\nu_p(f) = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \qquad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_p seminorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$\nu_p(f) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad f \in N(\mu) := \{ f \in \mathcal{L}_0(\mu) : f = 0 \text{ c.p.d.} \} \subseteq \mathcal{L}_p(\mu)$$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_p = \left(\int_\Omega |f|^p \, d\mu \right)^{1/p} \quad (f \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$ espacio normado

Caso $p = \infty$

$$\nu_\infty(f) = \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (f \in \mathcal{L}_\infty(\mu))$$

$\mathcal{L}_\infty(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, ν_∞ seminorma en $\mathcal{L}_\infty(\mu)$

$$L_\infty(\mu) = \mathcal{L}_\infty(\mu)/N(\mu), \quad \|f\|_\infty = \operatorname{ess\,sup} |f| \quad (f \in L_\infty(\mu))$$

$L_\infty(\mu)$ espacio normado

Caso $0 < p < 1$

$$a, b \geqslant 0,\ 0 < p < 1 \implies (a+b)^p \leqslant a^p + b^p$$

$\mathcal{L}_p(\mu)$ espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$

$$\nu_p(f) = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_p(\mu))$$

ν_p es una pseudonorma en $\mathcal{L}_p(\mu)$

$$L_p(\mu) = \mathcal{L}_p(\mu)/N(\mu), \quad \lceil f \rceil_p = \int_\Omega |f|^p \, d\mu \quad (f \in L_p(\mu))$$

$$d_p(f,g) = \lceil f - g \rceil_p = \int_\Omega |f-g|^p \, d\mu \quad (f, g \in L_p(\mu))$$

$L_p(\mu)$ espacio métrico

Caso $p = 0$

$\mu(\Omega) < \infty$

$$\nu_0(f) = \int_\Omega \frac{|f|}{1+|f|}\, d\mu \quad (f \in \mathcal{L}_0(\mu))$$

ν_0 es una pseudonorma en $\mathcal{L}_0(\mu)$

$$L_0(\mu) = \mathcal{L}_0(\mu)/N(\mu) \quad \lceil f \rceil_0 = \nu_0(f) \quad (f \in L_0(\mu))$$

$$d_0(f,g) = \lceil f - g \rceil_0 \quad (f,g \in L_0(\mu))$$

$L_0(\mu)$ espacio métrico

Convergencia en $L_p(\mu)$

- $0 < p < \infty$: $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \iff \left\{ \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right\} \to 0$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_\infty(\mu) \iff \{f_n\} \to f$ uniformemente en $\Omega \setminus E$ con $\mu(E) = 0$
- $\mu(\Omega) < \infty$:

  $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \iff \lim\limits_{n\to\infty} \mu\big(\{x \in \Omega : |f_n - f| \geqslant \varepsilon\}\big) = 0 \quad \forall \varepsilon > 0$

Implicaciones (μ finita)

- $\{f_n\} \to f$ en $L_p(\mu) \implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ c.p.d. $\implies \{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu)$
- $\{f_n\} \to f$ en $L_0(\mu) \implies \{f_{\sigma(n)}\} \to f$ c.p.d.

Teorema de Riesz-Fisher

- $L_p(\mu)$ es un espacio de Banach $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$
- $L_p(\mu)$ es un espacio métrico completo $(0 \leqslant p < 1)$

Integral

$$I : L_1(\mu) \to \mathbb{K}, \quad I(f) = \int_\Omega f\,d\mu \quad (f \in L_1(\mu))$$

- Lineal
- Continuo:

$$|I(f)| = \left| \int_\Omega f\,d\mu \right| \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mu = \|f\|_1$$

- Positivo:

$$f \in L_1(\mu,\mathbb{R}),\ f \geqslant 0 \implies \int_\Omega f\,d\mu \geqslant 0$$

Teorema de la convergencia dominada

Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones medibles de Ω en $\mathbb{K}$ que converge puntualmente a una función f. Supongamos que existe $g \in \mathcal{L}_1(\mu)$ tal que:

$$|f_n(x)| \leqslant g(x) \ \forall x \in \Omega, \ \forall n \in \mathbb{N}$$

Entonces, se verifica que:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f| \, d\mu \right\} \to 0$$

En particular, $f \in \mathcal{L}_1(\mu)$ y

$$\left\{ \int_\Omega f_n \, d\mu \right\} \to \int_\Omega f \, d\mu$$

Si hubiéramos supuesto que $g \in \mathcal{L}_p(\mu)$, con $0 < p < \infty$, hubiéramos obtenido:

$$\left\{ \int_\Omega |f_n - f|^p \, d\mu \right\} \to 0$$

y en particular $f \in \mathcal{L}_p(\mu)$.

Corolario muy útil

Funciones simples integrables:

$$S(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A},\ \mu(E) < \infty\} \subseteq L_p(\mu) \quad (0 \leqslant p \leqslant \infty)$$

- Para $0 \leqslant p < \infty$, $S(\mu)$ es denso en $L_p(\mu)$

¿$p = \infty$?

Funciones simples:

$$\tilde{S}(\mu) := \mathrm{Lin}\,\{\chi_E : E \in \mathcal{A}\}$$

- $\tilde{S}(\mu)$ es denso en $L_\infty(\mu)$

Otros espacios

1. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $\{K_n\}$ sucesión exhaustiva de compactos.
   - Para cada $f \in C(K_n)$, notamos
   $$\|f\|_n = \sup\{|f(x)| \ : \ x \in K_n\}.$$
   - Llamamos $C(\Omega)$ al espacio de las funciones continuas en Ω y lo dotamos de la pseudonorma
   $$\nu(f) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{\|f\|_n}{1+\|f\|_n}$$
   que lo convierte en un espacio de Fréchet.
   - La topología coincide con la topología de la convergencia uniforme sobre compactos.
2. Para $\Omega \subset \mathbb{C}$ abierto, escribimos $\mathcal{H}(\Omega)$ para denotar el espacio de las funciones holomorfas en Ω.
   - Es un subespacio de $C(\Omega)$ y lo dotamos entonces de la topología inducida.
   - Así, $\mathcal{H}(\Omega)$ se convierte en un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.

Otros espacios II

3. Ω abierto de $\mathbb{R}^d$, $C^\infty(\Omega)$ espacio de las funciones de clase C^∞ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre compactos de todas las derivadas. Es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
4. K compacto en Ω, llamamos $\mathcal{D}(K)$ al subespacio de $C^\infty(\Omega)$ formado por las funciones cuyo soporte está en Ω. Con la topología inducida, es un espacio de Fréchet que verifica la propiedad de Heine-Borel.
5. El espacio de las funciones test es

$$\mathcal{D}(\Omega) = \{f \in C^\infty(\Omega) : \operatorname{sop}(f) \text{ compacto}\} = \bigcup \mathcal{D}(K)$$

   - **¿Qué topología le asociamos que lo haga completo?** el supremo de las topologías localmente convexas que hacen continuas todas las inclusiones $\mathcal{D}(K) \longrightarrow \mathcal{D}(\Omega)$ ("límite inductivo de espacios de Fréchet").
6. El espacio de las distribuciones, $\mathcal{D}'(\Omega)$, es el "espacio dual" de $\mathcal{D}(\Omega)$.

Espacio pre-hilbertiano

Espacio pre-hilbertiano = espacio vectorial X con un producto escalar: aplicación de $X \times X$ en $\mathbb{K}$, $(x,y) \mapsto (x|y)$, verificando:

(1) Lineal en la primera variable: $(\alpha x + y|z) = \alpha(x|z) + (y|z)$

(2) Conjugado-lineal en la segunda: $(x|\alpha y + z) = \overline{\alpha}(x|y) + (x|z)$
$((1) + (2)$ = forma sesquilineal; si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ bilineal)

(3) Hermítica: $(y|x) = \overline{(x|y)}$ (simétrica si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$)
($x \mapsto (x|x)$, de X en $\mathbb{R}$ forma cuadrática)

(4) Definida positiva: $(x|x) > 0 \quad (x \neq 0)$

Norma de un espacio pre-hilbertiano

$$\|x\| = (x|x)^{1/2} \qquad (x \in X)$$

Desigualdad de Cauchy-Schwartz:

$$|(x|y)| \leqslant \|x\| \, \|y\|$$

Espacio de Hilbert cuando la norma es completa

Polarización: $\operatorname{Re}(x|y) = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right); \quad \operatorname{Im}(x|y) = \operatorname{Re}(x|iy)$

Teorema de Jordan-von Neumann

Un espacio normado $(X, \|\cdot\|)$ es un espacio pre-hilbertiano si, y sólo si, verifica la identidad del paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \quad \forall x,y \in X$$

Ejemplos

$(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ espacio de medida no trivial:

$$\exists\ A,B \in \mathcal{A}\ :\ A \cap B = \emptyset,\ 0 < \mu(A) < \infty,\ 0 < \mu(B) < \infty$$

Entonces:

$$L_p(\mu)\ \text{Espacio de Hilbert} \iff p = 2$$

Producto escalar en $L_2(\mu)$:

$$(f|g) = \int_\Omega f\,\overline{g}\,d\mu \ \ \big(f,g \in L_2(\mu)\big); \qquad (x|y) = \sum_{\lambda\in\Lambda} x(\lambda)\,\overline{y(\lambda)} \ \ \big(x,y \in l_2^\Lambda\big)$$

Teorema de la Proyección Ortogonal

- Aproximación óptima. Hilbert $H \supseteq C$ convexo y cerrado:

$$x \in H \implies \exists!\; P_C(x) \in C : \; \|x - P_C(x)\| = \min\{\|x-y\| : y \in C\}$$

- $P_C(x)$ se caracteriza por: $\operatorname{Re}(x - P_C(x) | y - P_C(x)) \leqslant 0 \;\; \forall y \in C$
- Si M es un subespacio cerrado: $(x - P_M(x)|m) = 0 \;\; \forall m \in M$,

$$x - P_M(x) \in M^{\perp} := \{z \in H : (z|m) = 0 \; \forall m \in M\}$$

- $H = M \oplus M^{\perp}$ suma topológico-directa:

$$\|x\|^2 = \|P_M(x)\|^2 + \|x - P_M(x)\|^2 \qquad (x \in X)$$

- Todo subespacio cerrado de un espacio de Hilbert está complementado

Teorema de Lindenstrauss-Tzafriri (1971)

Un espacio de Banach X es isomorfo a un espacio de Hilbert si, y sólo si, todo subespacio cerrado de X está complementado en X.

Sistemas y bases ortonormales

X espacio pre-hilbertiano, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset X$ sistema ortonormal:

$$(e_\lambda | e_\delta) = 0 \quad (\lambda \neq \delta); \qquad \|e_\lambda\| = 1 \ \ \forall \lambda \in \Lambda$$

Base ortonormal cuando, además, $X = \overline{\operatorname{Lin}(E)}$

Propiedades de los sistemas ortonormales

H Hilbert, $E = \{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\} \subset H$ ortonormal, $M = \overline{\operatorname{Lin}(E)}$, $x \in H$.

- Desigualdad de Bessel: $\displaystyle\sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \leqslant \|x\|^2$
- Proyección ortogonal sobre M: $\displaystyle P_M(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)\, e_\lambda$
- $\displaystyle\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 + \|x - P_M(x)\|^2$

Bases ortonormales

H espacio de Hilbert, $\{e_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$ base ortonormal:

- Igualdad de Bessel: $\|x\|^2 = \sum_{\lambda \in \Lambda} |(x|e_\lambda)|^2 \quad (x \in H)$
- Igualdad de Parseval: $(x|y) = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda)(e_\lambda|y) \quad (x, y \in H)$
- Desarrollo de Fourier: $x = \sum_{\lambda \in \Lambda} (x|e_\lambda) e_\lambda \quad (x \in H)$
- En resumen: $H \equiv l_2^\Lambda$

Clasificación de los espacios de Hilbert

- Todo espacio de Hilbert admite una base ortonormal
- Todas las bases ortonormales de un espacio de Hilbert tienen el mismo cardinal: dimensión hilbertiana.
- Dos espacios de Hilbert son isométricamente isomorfos si, y sólo si, tienen la misma dimensión hilbertiana
- Salvo isomorfismos isométricos, los únicos espacios de Hilbert separables son l_2^N con $N \in \mathbb{N}$ y l_2