

MÚSICA Y MATEMÁTICAS

MARIA DEL CARMEN BERTOS

IES Villanueva del Mar (La Herradura, Granada, España)

La música es una ciencia que debe tener unas reglas establecidas; estas reglas deben derivarse de un principio evidente, y este principio no puede revelarse sin la ayuda de las matemáticas

Traité de l'harmonie reduit à son principe naturel (1722)
Jean Philippe Rameau

Ya desde los tiempos de Pitágoras (s. VI a.C.), la música atrajo la atención de los matemáticos, naciendo distintas teorías.

Las especulaciones científicas y matemáticas sobre la música se fundan en el principio de que el sonido es un fenómeno físico mensurable con exactitud, ya que cualquier cuerpo vibrante emite, según el número de vibraciones por segundo, un sonido de una altura determinada.

La escala diatónica, usada en la música occidental, se ordena en siete sonidos que se encuentran en ciertas y sencillas relaciones numéricas entre sí (lo veremos después más detenidamente). A partir de esta constatación, han surgido en el tiempo, una serie de complejas especulaciones sobre la naturaleza de los sonidos, sobre la naturaleza de la escala musical, sobre sus relaciones con otros fenómenos de orden físico o cósmico, de los que los sonidos bien podrían ser reflejo o símbolo. Este punto de vista sobre la música, que representa una constante secular del pensamiento musical, ha sido

desarrollado en particular por aquellos músicos o pensadores que consideran que la música es un lenguaje dotado de una autonomía totalmente propia, con escaso parentesco al lenguaje verbal.

Quien ha investigado la naturaleza matemática de la música se ve empujado a destacar más los valores intelectuales y metafísicos vinculados al arte de los sonidos que esos otros de orden emocional. Quien considera que la música se establece sobre un complejo y rígido orden matemático que el músico no hace sino descubrir, evidenciar e, incluso, reproducir en sus composiciones, y que esta estructura esencialmente racional, corresponde a otra estructura igualmente racional, de todo el universo, reivindica con ello la independencia de la música respecto a la poesía o a cualquier otro lenguaje artístico.

Así, las teorías matemáticas sobre la música y las teorías que sostiene un origen común a música y poesía se excluyen la una a la otra, en tanto se contraponen como dos modos radicalmente distintos de concebir la música y su función.

Vamos a detenernos en aquella característica de la música destacada por muchos desde tiempos muy antiguos, estos es, su profunda racionalidad, su carácter hiperlingüístico, su rígida organización matemática.

En el pensamiento griego se encuentran las raíces de nuestra cultura musical, al igual que las de la cultura matemática. La música era un elemento educativo desde el punto de vista social, siendo este concepto de música muy diferente respecto a la idea moderna de la música como arte.

Musiké significaba en el mundo griego, un complejo de actividades que podía abarcar desde la gimnasia y la danza, hasta la poesía y el teatro, comprendiendo también la música y el canto en sentido estricto.

Pero la escuela filosófica en la que la música asumió una relevancia completamente esencial fue la escuela pitagórica. El concepto de **armonía** es central en la especulación de los pitagóricos, pero resulta ser un concepto musical sólo por analogía o por extensión, ya que su significado original era, sobretodo, metafísico. La armonía nace como la unificación de contrarios. Este concepto de armonía se completa con el otro bastante más oscuro de **número**, que es el fundamento de todas las cosas y por consiguiente, afín al concepto mismo de armonía.

Por tanto, los conceptos de armonía y número tienen un valor metafórico y fueron entendidos de maneras distintas por los mismos pitagóricos:

- Para algunos, el universo está hecho de números.
- Para otros, los números constituyen la armonía sobre la que se funda el mundo.
- Y para otros, los números son el modelo originario del mundo del que nacen todas las cosas.

Por lo tanto, la música será quien revele la naturaleza más profunda de la armonía y del número.

Desde la Antigua Grecia hasta el Renacimiento, la música era considerada una parte de las matemáticas dentro de las siete artes liberales del *Quadrivium*:

- **Quadrivium** (saberes exactos): Geometría, Aritmética, Música y Astronomía.
- **Trivium** (saberes humanos): Gramática, Dialéctica, Retórica.

A finales del siglo XVI, **Henricus Glareanus** (1488-1563) quiso volver a conectar la música de su tiempo con la tradición pitagórica, pero esta labor se hace más evidente en la obra del músico y pensador veneciano **Gioseffo Zarlino** (1517-1590). Zarlino pretende una nueva refundación de la teoría musical sobre la base de un nuevo racionalismo, que encuentra sus fundamentos en la misma naturaleza de los sonidos. La nueva teoría pretenderá justificar racionalmente el uso efectivo que se hace de los intervalos musicales. Esto queda reflejado en su tratado “*Instituzione harmoniche*”. Este punto de vista encontrará su culminación dos siglos después con la obra de Rameau.

Descartes, Leibniz y, sobre todo **Euler** y finalmente **Rameau** defenderán, siguiendo la estela de la tradición pitagórica, la música como lenguaje perfectamente autosuficiente.

Leibniz está convencido de que la música posee una irrefutable estructura matemática. La armonía matemática del universo se revela por ello de modo sensible e inmediato a la percepción aún antes que a la razón. Leibniz expresó la exigencia de una reconciliación entre oído y razón, entre sensibilidad e intelecto, entre arte y ciencia.

Durante la Ilustración **Rameau** volvió a alzar el pensamiento musical pitagórico. Reivindicaba con energía para la música el papel de ciencia, de lenguaje analizable mediante la razón, fundado sobre pocos, claros e indudables principios. Así en su “*Traité de l’harmonie*” (1722) afirma cosas tales a las manifestadas en la cita que utilicé al principio de esta exposición. Asegura que el “maravilloso principio” en el que se basa la música es el fenómeno de los armónicos superiores en donde está contenido el acorde perfecto mayor, aquel sobre el que se funda la armonía.

Esta concepción no excluye ni el placer de la escucha ni una posible relación entre música y sentimiento, sino que, por naturaleza, entiende la música como un sistema de leyes matemáticas.

Pero, ¿dónde está el entramado matemático de la música? Podemos encontrarlo en la escala diatónica, en la Teoría Acústica y la Teoría Ondulatoria, en los métodos usados por muchos compositores (traslaciones, homotecias, repeticiones, simetrías y métodos combinatorios y aleatorio, etc) y en la manera misma de enfrentarse a una pieza musical que requiere del conocimiento, del orden, de la constancia y la perseverancia, sin olvidar nunca el amor por aquello que se está haciendo.

Veamos a continuación algunos ejemplos que clarifiquen la relación entre Música y Matemáticas:

LA ESCALA DIATÓNICA

El misticismo que se creó entorno a los cuatro primeros números naturales (tetrakis), hizo que en la escuela pitagórica se experimentara con las siguientes razones para expresar las longitudes de las cuerdas, ya que estas combinaciones producían sonidos agradables, construyendo una escala a partir de estas proporciones.

do	re	mi	fa	sol	la	si	do
1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{27}{16}$	$\frac{243}{128}$	$\frac{2}{1}$

La escala usual se obtiene tomando la 5ª y la 8ª y repitiéndolas sistemáticamente hasta que vuelvan a coincidir. Resultan así que 12 quintas equivalen (casi) a 7 octavas.

$$\left(\frac{3}{2}\right)^{12} : \left(\frac{2}{1}\right)^7 = 1.0136\dots$$

Esta diferencia condiciona la escala, así se crean los modos mayor y menor.

El matemático francés **Mersene**, en 1627, formula con precisión la relación entre longitud de cuerda y la frecuencia. Así:

do	do#	re	re#	mi	fa	fa#	sol	sol#	la	la#	si	do
2	$2^{11:12}$	$2^{10:12}$	$2^{9:12}$	$2^{8:12}$	$2^{7:12}$	$2^{6:12}$	$2^{5:12}$	$2^{4:12}$	$2^{3:12}$	$2^{2:12}$	$2^{1:12}$	2

desapareciendo así los problemas de reajuste de la afinación.

Un siglo después **Bach** compone “El clave bien temperado” que consta de 24 piezas en las 12 tonalidades usando los modos mayor y menor de cada una de ellas.

TRASLACIONES, SIMETRÍAS Y ROTACIONES MUSICALES

La repetición es probablemente el procedimiento más usado en música. **Rossini** utiliza en sus oberturas frases que se repiten cada vez con más intensidad, esto es, utiliza traslaciones melódicas. El clímax se alcanza rompiendo esa traslación.

Nos encontramos simetrías en muchas piezas musicales, por ejemplo:



y rotaciones como la siguiente:



LA COMBINATORIA Y EL AZAR

Componer es el arte de combinar distintas ideas buscando una unidad formal.

En su obra “Musikalisches Würfelspiel” (juego de dados)(1787), **Mozart** compone 176 compases para los minuetos y 96 compases para los tríos. Cada pieza consta de 16 compases. Estos compases están sueltos pero Mozart ofrece unas reglas basadas en el lanzamiento de dados que permite combinarlos de múltiples formas:

Minuetos: 11^{16}

Tríos: 6^{16}

Luego entonces, la obra completa (minueto + trío): 66^{16}

En el siglo XX compositores como el griego Xanis Xenakis utiliza partituras gráficas donde el músico a través de las indicaciones numérico-gráficas que propone el compositor es el verdadero creador final de la pieza que dependerá de la capacidad de improvisación y la creatividad del intérprete.

LA SUCESIÓN DE FIBONACCI

La sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21,...) está íntimamente ligada a la razón áurea, ya que la razón de dos términos consecutivos de la sucesión tiende a este número.

Bartók a principios del siglo XX creó su escala de Fibonacci numerando cada nota cromática con un número y obteniendo:



Esta escala la usó en su obra “Música para instrumentos de cuerda, percusión y celesta”.

TEORÍA ONDULATORIA

El fundamento natural de la música es el sonido, que se define como “vibraciones mecánicas y ondas de un medio elástico en el ámbito de frecuencias de la audición humana (16-20000 Hz)”.

La acústica física trata del sonido fuera del oído. Así, nos encontramos con todo un entramado matemático-físico que analiza las ondas, sus elementos y sus propiedades.

ARMONÍA

Dentro de la enseñanza musical nos encontramos con un complejo sistema que nos muestra la técnica de la composición musical. Se intentan analizar diversos aspectos de la música por separado: armonía, contrapunto, formas, instrumentación, ritmo y otras materias.

A modo de ejemplo, me gustaría mostrar como en el estudio de la armonía se necesita una precisión semejante a la que se requiere en cualquier actividad matemática, puesto que se podría calificar como tal.

La armonía estudia las simultaneidades sonoras en sí, como elementos expresivos de la música, y estudia la relación entre las diversas simultaneidades sonoras dentro de las distintas estéticas. Estas simultaneidades con los 12 sonidos del sistema temperado no son lo más importante, sino que, lo es la función que tienen con respecto a uno principal llamado tónica. Con estos grados y sus alterados, construiremos acordes. Los acordes tríada son la base sobre la que se cimenta la tonalidad y son:

- Acorde perfecto mayor: 3ª mayor y 5ª justa
- Acorde perfecto menor: 3ª menor y 5ª justa
- Acorde de 5ª: 3ª menor y 5ª disminuida

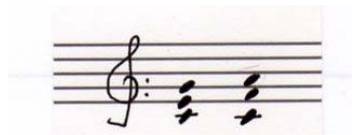
Pero no sólo en la construcción de acordes hay que seguir unas reglas matemáticas establecidas, sino en el enlace de los mismos. Por ejemplo:

REGLA: “Cuando los acordes que vamos a enlazar tienen una o dos notas comunes, éstas han de permanecer quietas”.

Tenemos que enlazar:



DO es la nota común, entonces, tendremos que invertir el 2º acorde para que DO no se mueva y las demás lo hagan con el menor movimiento posible hasta conseguir:



Con todo esto, podemos darnos cuenta de cómo Música y Matemáticas tienen más puntos en común de lo que pensábamos.

...el matemático puro, como el músico, es creador libre de su mundo de belleza ordenada.

Bertrand Russell