La ecuación diferencial logística (o de Verhulst)

José Luis López Fernández

24 de noviembre de 2011

Resolver un problema del que tenemos garantía de que existe solución, es como ir de excursión por el monte, con un guía, hacia una cumbre que ya avistamos. La verdad última de las matemáticas está escondida al final del camino, entre los arbustos, sin que nadie sepa dónde. Además, ese lugar no tiene por qué ser la cima. Puede estar entre las rocas de un despeñadero o en el fondo de un valle.

(Fragmento de la novela *La fórmula preferida del profesor*, de Yoko Ogawa)

La ley logística discreta venía dada por la siguiente expresión (cf. *Afternotes 7*):

$$P_{n+1} - P_n = (a - bP_n)P_n - (c + dP_n)P_n\,, \tag{1}$$

En este caso, la tasa de fertilidad ($f(P) = a - bP$) tanto como la de mortalidad ($m(P) = c + dP$) dependían linealmente (pues son rectas) de la propia población (a diferencia del caso Malthusiano, en que ambas eran constantes). Aquí a, b, c, d eran números positivos. Reordenando términos en (1) y suponiendo que $a > c$ se llega fácilmente a la siguiente expresión:

$$P_{n+1} - P_n = P_n\big(a - c - (b + d)P_n\big) = (a - c)P_n \left(1 - \frac{b + d}{a - c} P_n\right) .$$

Dividiendo finalmente esta ecuación por Δt, que denotaba la distancia temporal entre dos recuentos consecutivos, y teniendo en cuenta que el cociente incremental $(P_{n+1} - P_n)/\Delta t$ *se puede aproximar por* $P'(t)$, es claro que en el caso continuo se obtiene la siguiente ecuación diferencial:

$$P'(t) = rP(t) \left(1 - \frac{P(t)}{K}\right) , \qquad \text{con } \; r = \frac{a - c}{\Delta t} \text{ y } K = \frac{a - c}{b + d}\,,$$

que recibe el nombre de **ecuación diferencial logística o de Verhulst**.[1]

Llegados a este punto es importante detenerse a hacer algunas observaciones:

[1] Pierre Francois Verhulst, matemático belga que publicó en 1938 la ecuación que hoy se conoce como logística

(1) Cabe destacar que un nuevo parámetro hace acto de presencia en la ecuación logística si se compara con el ya estudiado modelo Malthusiano $P' = rP$. Se trata de la constante (positiva) K, que recibe el nombre de **capacidad de carga** del medio y *grosso modo* representa el número máximo de individuos que la población admite (nótese que en esta constante aparecen resumidas un buen número de circunstancias que influyen de forma decisiva en el desarrollo de la población, a saber: factores climatológicos, disponibilidad de nutrientes, recursos del medio, etc.)

(2) Comparando de nuevo con la ecuación de Malthus, en el caso logístico la tasa de crecimiento deja de ser constante para pasar a autorregularse según el tamaño de la población en cada instante. En efecto, ahora se tiene que[2]

$$[TC] = \frac{P'(t)}{P(t)} = r\left(1 - \frac{P(t)}{K}\right).$$

(3) La ecuación diferencial logística es una de las que pueden resolverse explícitamente y sus soluciones vienen dadas por la siguiente expresión (cf. Tabla 2):

$$P(t) = \frac{K}{1 + Ae^{-rt}}, \tag{2}$$

donde A es cualquier número real, r la **tasa de crecimiento intrínseca** del modelo y K su capacidad de carga. Por ejemplo: supongamos que el tamaño inicial de nuestra población fuera $P(0) = 1$ (en miles de individuos), la tasa de crecimiento intrínseca $r = 0{,}1$ y la capacidad de carga $K = 5$. En este caso, la única solución del problema de valores iniciales para la ecuación logística es la que resulta de elegir A en la expresión (2) de modo que $P(0) = \frac{5}{1+Ae^0} = \frac{5}{1+A} = 1$, esto es, $A = 4$. Dicho de otro modo, el único valor posible que puede adoptar el parámetro A para que en $t = 0$ el tamaño de la población sea igual a 1 es $A = 4$. Por tanto, la única solución de nuestro problema sería

$$P(t) = \frac{5}{1 + 4e^{-0{,}1t}}. \tag{3}$$

Con ella podemos predecir cualquier tamaño futuro. Por ejemplo: si el tiempo viniese medido en años, al cabo de una década el tamaño de la población sería igual a $P(10) = \frac{5}{1+4e^{-1}} = 2{,}02305$ (es decir, 2023 individuos aproximadamente).[3] Este cálculo no habría sido posible de no haber dispuesto de una expresión explícita de la solución del correspondiente problema de valores iniciales.

A continuación llevaremos a cabo un análisis cualitativo de las soluciones de la ecuación logística aparcando el hecho de que se conoce su expresión explícitamente (cf. (2)). Supondremos para ello que $r > 0$ (en caso contrario los

[2]Sin más que despejar P'/P de la ecuación logística

[3]Compárese con el resultado obtenido, con estos mismos parámetros, para la ecuación de Malthus en *Afternotes 19*

razonamientos serían completamente análogos a los aquí expuestos) y procederemos según la metodología expuesta en *Afternotes18* y aplicada anteriormente a la ecuación de Malthus en *Afternotes 19*.

- ETAPA 1: Cálculo de los **puntos de equilibrio** de la ecuación logística. Se trata de encontrar todas sus soluciones constantes, esto es, aquellas cuya derivada es igual a cero. Por tanto, ha de ser

$$P' = rP\left(1 - \frac{P}{K}\right) = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ o bien } P = K\,.$$

  Luego los dos únicos puntos de equilibrio de la ecuación logística son $P(t) = 0$ y $P(t) = K$ para cualquier valor de t.

- ETAPA 2: Estudio del **crecimiento** de las soluciones. En este caso, los dos puntos de equilibrio de la ecuación logística ($P = 0$ y $P = K$) dividen el plano en tres regiones: R_1 (valores por encima de K, en cuyo caso se dice que la situación es de sobrepoblación), R_2 (para tamaños poblacionales entre 0 y K, que es el caso biológico estándar) y R_3 (para valores negativos de P, que genera una situación no biológica). Sabemos ya que en el interior de cada una de estas regiones la derivada no puede cambiar de signo, luego bastará con evaluar P' en un punto cualquiera de la región que estemos analizando para conocer cuál será su signo en toda la región.

  Para averiguar el signo de P' en R_1 basta con evaluar el segundo miembro en un punto cualquiera que sea mayor que K, por ejemplo $P = 2K$, de donde se obtiene que $P' = r \cdot 2K \cdot (1-2) = -2rK < 0$, luego P ha de ser decreciente en R_1, lo que concuerda también con lo que la intuición biológica dicta en el régimen de sobrepoblación. Si elegimos ahora un punto arbitrario de R_2, por ejemplo $P = K/2$, resulta que $P' = r \cdot \frac{K}{2} \cdot (1-1/2) == rK/4 > 0$, luego P ha de ser creciente en R_2. Por último, repitiendo este cálculo en R_3 (usando, por ejemplo, el valor $P = -K$) se obtiene $P' = r \cdot (-K) \cdot (1+1) = -2rK < 0$, que da lugar a soluciones decrecientes.

- ETAPA 3: Estudio de la **concavidad** de las soluciones. La información la proporciona en este caso la segunda derivada de P. Para la ecuación logística se obtiene la siguiente expresión de P'':

$$\begin{aligned} P'' &= \left[rP\left(1-\frac{P}{K}\right)\right]' = rP'\left(1-\frac{P}{K}\right) + rP\left(-\frac{P'}{K}\right) \\ &= rP'\left(1-\frac{2P}{K}\right) = r^2P\left(1-\frac{P}{K}\right)\left(1-\frac{2P}{K}\right), \end{aligned}$$

  que únicamente se anula cuando $P = 0$, $P = K$ o bien $P = K/2$. Las dos primeras opciones no nos conducen a candidatos a nivel de inflexión, pues no son más que los punto de equilibrio del modelo. Por tanto, de existir algún nivel de inflexión este habría de ser $P = K/2$. Esto quiere decir, de entrada, que las soluciones que ocupan las regiones R_1 y R_3 no experimentan inflexión de su concavidad (esto es, o son siempre cóncavas hacia arriba o siempre cóncavas hacia abajo; de hecho, según el análisis llevado a cabo en la ETAPA 2, no hay otra alternativa a que las soluciones de R_1 sean siempre cóncavas hacia arriba y las de R_3 siempre cóncavas hacia abajo).

Por otra parte, para estudiar el signo de P'' en R_2 y poder concluir de ese modo si $P = K/2$ es o no un nivel de inflexión, basta con elegir un punto cualquiera entre 0 y $K/2$ (por ejemplo, $P = K/4$), otro entre $K/2$ y K (por ejemplo, $P = 3K/4$), evaluar P'' en ambos puntos y verificar si se produce o no un cambio de signo. Caso de producirse, podríamos ya asegurar que en $K/2$ hay en efecto un nivel de inflexión. Se tiene que

$$\begin{aligned} P'' &= r^2 \cdot \frac{K}{4}\left(1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{2}{4}\right) = \frac{3r^2K}{32} > 0 \quad \text{si} \quad P = \frac{K}{4}\,, \\ P'' &= r^2 \cdot \frac{3K}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)\left(1-\frac{6}{4}\right) = -\frac{3r^2K}{32} < 0 \quad \text{si} \quad P = \frac{3K}{4}\,, \end{aligned}$$

luego en el nivel $P = K/2$ la solución pasa de ser cóncava hacia arriba ($P'' > 0$) a ser cóncava hacia abajo ($P'' < 0$), por lo que $K/2$ es un auténtico nivel de inflexión.

Uno podría también pretender calcular cuánto tiempo ha de transcurrir hasta que la solución correspondiente alcance dicho nivel de inflexión. Situémonos, por fijar el valor de los parámetros, en las condiciones del ejemplo (3). En ese caso, tal cálculo consistiría en despejar la variable temporal t de la siguiente expresión:[4]

$$\frac{5}{1+4e^{-0,1t}} = \frac{5}{2}\,, \tag{4}$$

de donde se desprende que $t = 13{,}8629$ años.

- ETAPA 4: En lo que concierne a la **estabilidad de los puntos de equilibrio**, es inmediato concluir que $P = 0$ es claramente inestable mientras que $P = K$ es asintóticamente estable (pues atrae a todas las demás soluciones, en virtud de lo establecido en la ETAPA 2).

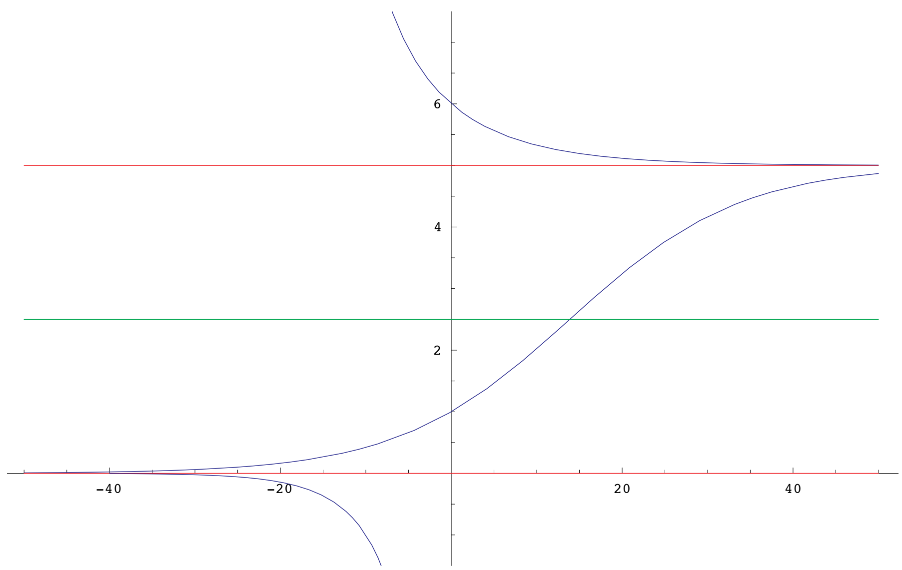
Finalmente, el retrato de fases para la ecuación logística con $r > 0$ es el siguiente:

$$\longleftarrow \underset{}{\overset{0}{\bullet}} \longrightarrow \overset{K}{\bullet} \longleftarrow \quad ,$$

que se corresponde con la representación gráfica esbozada en la siguiente figura:[5]

[4]Recuérdese que en dicho ejemplo la capacidad de carga tomaba el valor $K = 5$, luego el nivel de inflexión se alcanza en $P = \frac{5}{2}$

[5]La figura se corresponde con el ejemplo descrito en (3). Se han destacado en color rojo los dos puntos de equilibrio ($P = 0$ y $P = 5$); en color azul cómo son las soluciones en R_1, R_2 y R_3; y en color verde el nivel de inflexión $P = 5/2$. Nótese cómo la gráfica reproduce aproximadamente el tiempo de inflexión predicho en en (4)


6
4
2
-40
-20
20
40