BASES SEMIÓTICAS, ANTROPOLÓGICAS Y COGNITIVAS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA[1]

Juan D. Godino[2]

Universidad de Granada

Resumen

Se describen las principales características de diversas teorías usadas en educación matemática que fundamentan los componentes semiótico y antropológico del Enfoque Ontosemiótico en Educación Matemática (EOS). En particular se mencionan teorías sobre semiótica y filosofía del lenguaje, con énfasis particular en la perspectiva antropológica de las matemáticas implícita en la filosofía de Wittgenstein. También se incluye una síntesis de trabajos que usan la noción de representación como fundamentación de los estudios cognitivos en educación matemática. Esta perspectiva permite identificar los antecedentes y filiaciones de las nociones de práctica, objeto, proceso matemático y función semiótica, las cuales son centrales en el EOS.

Palabras clave: educación matemática, fundamentos teóricos, semiótica, antropología, conocimiento matemático, enfoque ontosemiótico

Abstract

The main characteristics of various theories used in mathematics education, which support the semiotic and anthropological components of the Onto-semiotic Approach in Mathematics Education (OSA), are described. In particular, some semiotic and philosophy of language theories are mentioned, with particular emphasis on the anthropological perspective on mathematics implicit in Wittgenstein's philosophy. Syntheses of papers that use the notion of representation as the foundation of cognitive studies in mathematics education are also included. This perspective allows identifying the background and affiliations of the notions of practice, object, mathematical process, and semiotic function, which are central in the OSA.

Keywords: mathematics education, theoretical foundations, semiotics, anthropology, mathematical knowledge, onto-semiotic approach

1. INTRODUCCIÓN

En este trabajo hacemos una síntesis de algunos marcos teóricos sobre semiótica, filosofía del lenguaje y cognición matemática que sirven de punto de partida para la elaboración del componente semiótico y antropológico del sistema teórico modular e inclusivo para la educación matemática conocido como Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos (EOS) (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, 2017).

Después de una breve reflexión sobre la cuestión del significado de los objetos matemáticos describimos:

---

[1] Godino, J. D. (2018). Bases semióticas, antropológicas y cognitivas del enfoque ontosemiótico en educación matemática. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/JDGodino_bases_sac_EOS.pdf (Versión ampliada y revisada de la primera parte del trabajo titulado, *Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático*)

[2] Profesor del Programa de Doctorado en Ciencias de la Educación y miembro del Grupo de Investigación *Teoría de la Educación Matemática y Educación Estadística*. Universidad de Granada.

- Las teorías referenciales y operacionales sobre el significado, así como el marco general de la semiótica y filosofía del lenguaje como punto de entrada al estudio de los objetos matemáticos.
- La posición de Wittgenstein como promotor de la visión antropológica sobre las matemáticas.
- Las nociones de representación interna y externa sobre el conocimiento, incluyendo la noción de esquema cognitivo y concepción en sus diversas acepciones.

Seguidamente incluimos una sección en la que se presentan las nociones de práctica, objeto, proceso y función semiótica, como nociones claves del componente semiótico y antropológico del EOS, indicando las conexiones entre estas nociones y las teorías previamente descritas.

Somos conscientes del carácter limitado de esta síntesis, dado que la diversidad de planteamientos teóricos sobre la cognición matemática, ha sido y es una constante en filosofía, lingüística, semiótica, psicología y demás ciencias y tecnologías interesadas por la cognición humana. Hemos optado por incluir las principales corrientes y modelos específicos sobre los que hemos basado nuestras reflexiones e indagaciones.

2. LA CUESTIÓN DEL SIGNIFICADO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

La Didáctica de las Matemáticas se interesa por identificar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como explicar la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción.

La noción de significado, utilizada con frecuencia de modo informal en los estudios didácticos, es un tema central y controvertido en filosofía, lógica, semiótica y demás ciencias y tecnologías interesadas en la cognición humana. El análisis de esta noción desde un punto de vista didáctico puede ayudar a comprender las relaciones entre las distintas formulaciones teóricas en esta disciplina y permitir estudiar bajo una nueva perspectiva las cuestiones de investigación, particularmente las referidas a la evaluación de los conocimientos y la organización de los procesos instruccionales.

El papel relevante que la idea de significado tiene, por tanto, para la Didáctica se pone de relieve por el uso que hacen de ella algunos autores interesados por el fundamento de esta disciplina. Así, Balacheff (1990) cita el significado como palabra clave de la problemática de investigación de la Didáctica de la Matemática: "Un problema pertenece a una problemática de investigación sobre la enseñanza de la matemática si está específicamente relacionado con el significado matemático de las conductas de los alumnos en la clase de matemáticas" (p. 258). Como cuestiones centrales para la Didáctica de la Matemática menciona las siguientes:

- ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos podemos inferir a partir de una observación de su conducta?
- ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas?
- ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia?
- ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

También Brousseau (1980) destaca como centrales las preguntas siguientes: "¿Cuáles son las componentes del significado que pueden deducirse del comportamiento matemático observado en el alumno?; ¿Cuáles son las condiciones que conducen a la reproducción de la conducta, teniendo la misma significación, el mismo significado?" (p. 132). Asimismo, Brousseau (1986) se pregunta si existe una "variedad didáctica" del concepto de sentido, desconocida en lingüística, psicología o en matemáticas.

Otra autora que considera básica para la Didáctica de la Matemática la idea de significado es Sierpinska (1990), quien, a su vez, la relaciona íntimamente con la comprensión: "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27). "La metodología de los actos de comprensión se preocupa principalmente por el proceso de construir el significado de los conceptos" (p. 35).

Dummett (1991) relaciona, asimismo, el significado y la comprensión desde una perspectiva más general: "una teoría del significado es una teoría de la comprensión; esto es, aquello de lo que una teoría del significado tiene que dar cuenta es lo que alguien conoce cuando conoce el lenguaje, esto es, cuando conoce los significados de las expresiones y oraciones del lenguaje" (p. 372).

Desde el punto de vista de la psicología cultural, el objetivo principal de la misma, según Bruner (1990), es el estudio de las reglas a las que recurren los seres humanos a la hora de crear significados en contextos culturales. "El concepto fundamental de la psicología humana es el de significado y los procesos y transacciones que se dan en la construcción de los significados" (Bruner, 1990, p. 47).

A pesar del carácter relevante que la idea de significado tiene, no sólo para la Didáctica de la Matemática, sino para la psicología en general, no se encuentra en la literatura de la especialidad un análisis explícito de qué sea el significado de las nociones matemáticas. Los investigadores en esta disciplina utilizan el término "significado" de un modo que podemos calificar de lenguaje ordinario, o sea, con un sentido intuitivo o pre-teórico. "Lo que entendemos por 'comprensión' y 'significado' está lejos de ser obvio o claro, a pesar de ser dos términos centrales en toda discusión sobre el aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas en cualquier nivel" (Pimm, 1995, p. 3).

La preocupación por el significado de los términos y conceptos matemáticos lleva directamente a la indagación sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, a la reflexión ontológica y epistemológica sobre la génesis personal y cultural del conocimiento matemático y su mutua interdependencia. Recíprocamente, detrás de toda teoría sobre la formación de conceptos, o más general, de toda teoría del aprendizaje hay unos presupuestos ontológicos sobre la naturaleza de los conceptos, y por tanto, una teoría más o menos explícita del significado de los mismos.

3. LENGUAJE MATEMÁTICO: SIGNIFICADO Y REPRESENTACIÓN

Como hemos indicado, el término 'significado' se usa de una manera persistente en la investigación y en la práctica de la educación matemática, ligado al de 'comprensión'. Se considera esencial que los estudiantes conozcan el significado de los términos, expresiones, representaciones, o sea, a qué hace referencia el lenguaje matemático en sus diferentes registros.

Pero el 'significado' "es uno de los términos más ambiguos y más controvertidos de la teoría del lenguaje" (Ullmann, 1962, p. 62). En el texto clásico The Meaning of Meaning, Ogden y Richards (1923) recogieron no menos de diecisiete definiciones de 'significado'. Desde entonces se han añadido muchos nuevos usos, implícitos o explícitos, incrementando por tanto su ambigüedad. A pesar de esto la mayoría de los tratadistas, son reacios a abandonar un término tan fundamental; prefieren definirlo de nuevo y añadirle varias calificaciones[3].

La complejidad del problema semántico del lenguaje matemático se incrementa por la variedad de registros semióticos utilizados en la actividad matemática (uso del lenguaje ordinario, oral y escrito, símbolos específicos, representaciones gráficas, objetos materiales, etc.). Además, no sólo nos interesa analizar el "significado" de los objetos lingüísticos matemáticos, sino también los diversos "objetos matemáticos" (situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, proposiciones, argumentaciones, teorías, etc.).

En términos generales hay dos escuelas de pensamiento en la lingüística que abordan la cuestión del significado desde puntos de vista diferentes: la tendencia "analítica" o "referencial", que intenta apresar la esencia del significado resolviéndolo en sus componentes principales, y la tendencia "operacional", que estudia las palabras en acción y se interesa menos por qué es el significado por

[3] Ullmann, o.p., p. 62.

cómo opera, cómo se usan los medios de expresión y comunicación.

En este apartado vamos a sintetizar las principales características de estos enfoques semióticos, tratando de identificar sus respectivas potencialidades y limitaciones para su aplicación al estudio de la cognición matemática.

3.1. Teorías referenciales o analíticas del significado

El análisis del significado de los objetos matemáticos está estrechamente relacionado con el problema de las representaciones externas e internas de dichos objetos. La relación de significación se suele describir como una relación ternaria, analizable en tres relaciones binarias, dos directas y una indirecta, como se propone en el llamado "triángulo básico" de Ogden y Richards (1923) (Figura 1).

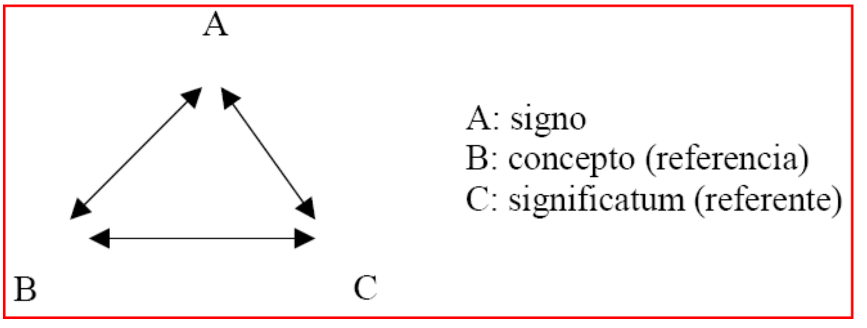


Figura 1: Triángulo semiótico

Por ejemplo, A es la palabra 'mesa', C es una mesa particular a la cual me refiero y B es el concepto de mesa, algo existente en mi mente. La relación entre A y C es indirecta por medio del concepto de mesa. Si consideramos que existe un concepto matemático C en algún mundo platónico, el concepto C sería el referente, A el significante matemático (palabra o símbolo) y B el concepto matemático individual del sujeto.

Este análisis ternario del proceso de significación plantea muchas cuestiones, en particular cuando se ponen en juego "objetos matemáticos", para los que no existe un acuerdo en las ciencias cognitivas. Por ejemplo, ¿cuál es el estatus psicológico u ontológico del concepto B? ¿El referente C, es un referente particular, es una clase de objetos, o más bien un representante de esta clase? El objeto C genera una imagen mental C' ¿Qué relación hay entre el concepto B y la imagen mental C'?

Como describe Font (2000), la opción epistemológica representacionista, presupone que la mente de las personas produce procesos mentales y que los objetos externos a las personas generan representaciones mentales internas. La opción representacionista presupone que tanto el referente como el significante tienen un equivalente en la mente del sujeto que los utiliza. Con este postulado, a los objetos A (significante) y C (referente) se les asocia otros objetos A' y C', que junto a B (referencia conceptual individual) se consideran como representaciones mentales. A sería una representación externa de C, mientras que C se considera un objeto exterior al sujeto. En esta opción representacionista del conocimiento, la mente se considera como un espejo en el que se reflejan los objetos del mundo exterior. Las posiciones epistemológicas no representacionistas rechazan el postulado básico del representacionismo según el cual existe una relación homeomórfica entre objetos mentales y objetos externos.

El término representación se usa con diferentes sentidos. Por una parte, la representación es considerada como un objeto, bien mental (A', C', B), o real A, C; pero también la representación es la relación o correspondencia que se establece entre dos objetos, de manera que uno de ellos se pone en lugar del otro. Esta relación puede darse entre objetos del mismo mundo, o entre mundos diferentes (Font, 2000), lo que tiene implicaciones ontológicas muy diferentes. La relación entre objetos del mismo mundo es una manera débil y bastante admitida de considerar la representación, ya que se refiere a todo aquello que se puede interpretar a propósito de otra cosa. La relación entre objetos de mundos diferentes es una manera mucho más fuerte de entender la representación, ya que presupone una realidad exterior y su correspondiente imagen mental, así como una determinada manera de entender la percepción, el lenguaje y la cognición.

La problemática del significado nos lleva a la compleja cuestión: ¿cuál es la naturaleza del “significatum” del concepto?, o más general, ¿cuál es la naturaleza de los objetos matemáticos?

En matemáticas, los distintos tipos de definiciones que se utilizan (por abstracción, inducción completa, etc.) describen con precisión las notas características de sus objetos: un concepto matemático viene dado por sus atributos y por las relaciones existentes entre los mismos. Pero en el campo de la psicología cognitiva, interesada por los procesos de formación de los conceptos, la concepción según la cual no existen atributos necesarios y suficientes que determinen completamente la estructura interna de los conceptos ha adquirido una posición dominante. Como indica Pozo (1989), a partir fundamentalmente de la obra de E. Rosch, se ha impuesto la idea de que los conceptos están definidos de un modo difuso. Esta nos parece que es la posición adoptada por Vergnaud (1982, 1990) quien propone una definición de concepto, adaptada para los estudios psicológicos y didácticos, en la cual incluye no solo las propiedades invariantes que dan sentido al concepto, sino también las situaciones y los significantes asociados al mismo.

De acuerdo con Kutschera (1979) las teorías del significado pueden agruparse en dos categorías: realistas y pragmáticas. Las teorías realistas (o figurativas) conciben el significado como una relación convencional entre signos y entidades concretas o ideales que existen independientemente de los signos lingüísticos; en consecuencia, suponen un realismo conceptual. "Según esta concepción el significado de una expresión lingüística no depende de su uso en situaciones concretas, sino que el uso se rige por el significado, siendo posible una división tajante entre semántica y pragmática" (Kutschera, 1979; p. 34). Una palabra se hace significativa por el hecho de que se le asigna un objeto, un concepto o una proposición como significado. De esta forma hay entidades, no necesariamente concretas, aunque siempre objetivamente dadas con anterioridad a las palabras, que son sus significados.

La forma más simple de la semántica realista se presenta en los autores que atribuyen a las expresiones lingüísticas solo una función semántica, consistente en designar (en virtud de unas convenciones) ciertas entidades, por ejemplo:

- el significado de un nombre propio consiste en el objeto que se designa por dicho nombre;
- los predicados (por ejemplo, *esto es rojo*; *A es más grande que B*) designan propiedades o relaciones o, en general, atributos;
- las oraciones simples (sujeto - predicado - objeto) designan hechos (por ejemplo, *Madrid es una ciudad*)

En las teorías realistas (como las defendidas por Frege, Carnap, los escritos de Wittgenstein del Tractatus,...), por tanto, las expresiones lingüísticas tienen una relación de atribución con ciertas entidades (objetos, atributos, hechos). La función semántica de las expresiones consiste simplemente en esa relación convencional, designada como relación nominal.

3.2. Teorías operacionales o pragmáticas del significado

Una concepción enteramente diferente del significado es la formulada por Wittgenstein en *Philosophical Investigations* publicadas póstumamente en 1953, aunque un cuarto de siglo antes Bridgman (1927) había recalcado el carácter puramente operacional de conceptos científicos como "longitud", "tiempo" o "energía"[4]. "Entendemos por cualquier concepto nada más que una serie de operaciones; el concepto es sinónimo con el correspondiente conjunto de operaciones". Esta manera de concebir los conceptos científicos se extendió al significado de las palabras en general mediante la fórmula: "El verdadero significado de una palabra ha de encontrarse observando lo que un hombre hace con ella, no lo que dice acerca de ella". Wittgenstein da un paso más afirmando que el significado de una palabra es su uso: "Para un gran número de casos -aunque no para todos- en que

[4] Citado por Ullmann, o.c., p. 73.

empleamos la palabra "significado", este puede definirse así: el significado de una palabra es su uso en el lenguaje" (Wittgenstein, 1953, p. 20).

La concepción operacional del significado resalta el carácter instrumental del lenguaje. "Pensad en los utensilios de una caja de herramientas: hay allí un martillo, alicates, un serrucho, un destornillador, una regla, un bote de cola, cola, clavos y tornillos. Las funciones de las palabras son tan diversas como las funciones de estos objetos" (Wittgenstein, 1953, p. 6). Al igual que ocurre en el ajedrez, en el que "el significado" de una pieza debemos referirlo a las reglas de su uso en el juego, el significado de las palabras vendrá dado por su uso en el juego de lenguaje en que participa.

El enfoque operacional tiene el mérito de definir el significado en términos contextuales, es decir, puramente empíricos, sin necesidad de recurrir a estados o procesos mentales vagos, intangibles y subjetivos. Sin embargo, aunque da cuenta perfectamente de la valencia instrumental del lenguaje, no así de la valencia representacional, de la que no se puede prescindir, como el propio Wittgenstein reconoce. Al indagar en los usos de los términos y expresiones encontraremos con frecuencia usos típicos extrayendo el rasgo o rasgos comunes de una selección representativa de contextos. De esta manera podemos asignar a las palabras o expresiones el uso prototípico identificado llegando de esta manera a una concepción referencial del significado. "La terminología sería diferente, pero reaparecería el dualismo básico, con el "uso", desempeñando el mismo papel que el "sentido", la "referencia" u otros términos de teorías más abiertamente referenciales" (Ullmann, 1962, p. 76).

En lo que respecta a la categoría operacional de las teorías del significado, calificadas también como pragmáticas, las dos ideas básicas son las siguientes:

- el significado de las expresiones lingüísticas depende del contexto en que se usan;
- niegan la posibilidad de observación científica, empírica e intersubjetiva de las entidades abstractas - como conceptos o proposiciones-, que es admitida implícitamente en las teorías realistas. Lo único accesible a la observación en estos casos, y por tanto, el punto de donde hay que partir en una investigación científica del lenguaje es el uso lingüístico. A partir de tal uso es como se debe inferir el significado de los objetos abstractos.

Como hemos indicado, una concepción pragmática u operacional del significado es abiertamente defendida por Wittgenstein en su obra *Investigaciones filosóficas*. En su formulación una palabra se hace significativa por el hecho de desempeñar una determinada función en un juego lingüístico, por el hecho de ser usada en este juego de una manera determinada y para un fin concreto. Para que una palabra resulte significativa, no es preciso, pues, que haya algo que sea el significado de esa palabra.

Para Wittgenstein no existe siempre una realidad en sí que sea reflejada por el lenguaje, cuyas estructuras tengan, por tanto, que regirse de acuerdo con las estructuras ontológicas, sino que el mundo se nos revela sólo en la descripción lingüística. Para este autor, hablar es ante todo una actividad humana que tiene lugar en contextos situacionales y accionales muy diversos y debe, por tanto, ser considerada y analizada en el plano de estos contextos. El lenguaje puede formar parte de diversas "formas de vida"; hay tantos modos distintos de empleo del lenguaje, tantos juegos lingüísticos, como contextos situacionales y accionales.

3.3. Complementariedad entre teorías realistas y pragmáticas del significado

La aplicación de los supuestos ontológicos de la semántica realista a la Matemática se corresponde con una visión platónica de los objetos matemáticos (conceptos, proposiciones, teorías, contextos, ...). Según esta posición filosófica, las nociones y estructuras matemáticas tienen una existencia real, independiente de las personas, en algún dominio ideal. El platonismo en matemáticas se puede definir como la conjunción de las siguientes tesis: 1) Existencia (existen objetos matemáticos; las sentencias y teorías matemáticas proporcionan descripciones verdaderas de tales objetos); 2) Abstracción (los objetos matemáticos son abstractos, esto es, entidades no espacio-temporales); 3) Independencia (los objetos matemáticos son independientes de agentes inteligentes y de su lenguaje, pensamiento y prácticas). Así, por ejemplo, en una visión platonista, la sentencia ‘3 es primo’ proporciona una descripción directa de un cierto objeto – esto es, el número 3 - de la misma manera que la sentencia ‘Marte es rojo’ da una descripción de Marte. Pero mientras Marte es un objeto físico, el número 3 es (según el platonismo) un objeto *abstracto*. Y los platonistas nos dicen que los objetos abstractos son totalmente no físicos, no mentales, no espaciales, no temporales y no causales. En esta perspectiva, el número 3 existe independientemente de nosotros y de nuestro pensamiento, pero no existe en el espacio ni en el tiempo, ni entra en ninguna relación causal con ningún otro tipo de objeto. (Linnebo, 2009).

La concepción platonista de los objetos matemáticos implica, además, una visión absolutista del conocimiento matemático, en el sentido de que éste es considerado como un sistema de verdades seguras e inmutables. Bajo estos supuestos el significado del término "función", por ejemplo, sería simplemente el concepto de función, dado por su definición matemática.

A pesar de los distinguidos representantes de esta corriente, entre los que se cuentan Frege, Russell, Cantor, Bernays, Hardy, Gödel, ..., han aparecido nuevas tendencias en la filosofía de las matemáticas que aportan críticas severas a la perspectiva absolutista y platónica de las matemáticas. Una síntesis de estas críticas y una visión de las matemáticas desde una perspectiva falible, basada en el convencionalismo de Wittgenstein y en el cuasi-empiricismo de Lakatos, podemos encontrarla en Ernest (1991).

Desde el punto de vista epistemológico, la definición pragmática del significado "es mucho más satisfactoria que la teoría figurativa realista: al desaparecer los conceptos y proposiciones como datos independientes de la lengua, se disipa también el problema de cómo pueden ser conocidas esas entidades, y nos acercamos a los fenómenos que justifican la dependencia del pensamiento y de la experiencia respecto del lenguaje" (Kutschera, 1979; p. 148).

Según lo expuesto hasta ahora, encontramos un dilema entre las teorías realistas y pragmáticas que parece difícil de superar. Sin embargo, Ullman (1962) presenta las teorías de tipo pragmático (que denomina operacionales o contextuales) como un complemento válido de las teorías de tipo realista (que denomina referenciales).

> “Contiene la saludable advertencia que tanto los semánticos y los lexicógrafos harían bien en atender, de que el significado de una palabra solamente puede averiguarse estudiando su uso. No hay ningún atajo hacia el significado mediante la introspección o cualquier otro método. El investigador debe comenzar por reunir una muestra adecuada de contextos y abordarlos luego con un espíritu abierto, permitiendo que el significado o los significados emerjan de los contextos mismos. Una vez que se ha concluido esta fase, puede pasar con seguridad a la fase “referencial” y procurar formular el significado o los significados así identificados. La relación entre los dos métodos, o más bien entre las dos fases de la indagación, es, en definitiva, la misma que hay entre la lengua y el habla: la teoría operacional trata del significado en el habla; la referencial, del significado en la lengua. No hay, absolutamente, necesidad de colocar los dos modos de acceso uno frente a otro: cada uno maneja su propio lado del problema, y ninguno es completo sin el otro” (p`. 76-77).

Esta observación de Ullmann nos parece fundamental y sirve de apoyo para el modelo de significado que propone el denominado “enfoque ontosemiótico” del conocimiento matemático (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007). Para nosotros el significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemático. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional.

3.4. Semiótica y filosofía del lenguaje

Debido a que los objetos matemáticos no se pueden aprehender directamente mediante los sentidos, su estatus ontológico requiere el uso de signos, tales como símbolos y diagramas, para su comunicación y aprendizaje. En consecuencia, la *semiótica*, como el estudio o doctrina de los signos, esto es, la investigación sistemática de la naturaleza, propiedades y tipos de signos, está recibiendo gran atención en la investigación en educación matemática. “La semiótica ha sido una lente teórica fructífera usada por los investigadores interesados por diversas cuestiones de educación matemática en las décadas recientes” (Presmeg, 2014, 539).

En nuestro caso estamos particularmente interesados por la teoría del lenguaje del lingüista danés Hjelmslev (1943) al considerar que puede ser de utilidad para describir la actividad matemática y los procesos cognitivos implicados, tanto en la producción, como en la comunicación de los conocimientos matemáticos.

La descripción y análisis de los procesos de estudio matemático requiere transcribir en forma textual las manifestaciones lingüísticas de los sujetos participantes, y los acontecimientos que tienen lugar en la interacción didáctica. El investigador en didáctica dispone finalmente para realizar su trabajo de los textos con la planificación del proceso instruccional, transcripciones del desarrollo de las clases, entrevistas y respuestas escritas a pruebas de evaluación, etc. En definitiva, el análisis se aplicará a un texto que registra la actividad matemática desarrollada por los sujetos participantes.

Partiendo del texto como dato, la teoría lingüística de Hjemslev intenta mostrar el camino que lleva a una descripción auto-consecuente y exhaustiva del mismo por medio del análisis. Dicho análisis se concibe como una progresión deductiva de la clase al componente y al componente del componente, así como a la identificación adecuada de las dependencias mutuas entre las distintas partes entre sí, sus componentes y el texto en su conjunto. El principio básico del análisis es que

> “tanto el objeto sometido a examen como sus partes tienen existencia sólo en virtud de las dependencias mutuas; la totalidad del objeto sometido a examen sólo puede definirse por la suma total de dichas dependencias. Así mismo, cada una de las partes puede sólo definirse por las dependencias que le unen a otras coordinadas, al conjunto, y a sus partes del grado próximo, y por la suma de las dependencias que estas partes del grado próximo contraen entre sí" (Hjelmslev 1943: 40).

Una noción clave en la teoría del lenguaje de Hjelmslev es la de *función*, que se concibe como la dependencia entre el texto y sus componentes y entre estos componentes entre sí. Se dice que hay *función* entre una clase y sus componentes y entre los componentes entre sí. A los terminales de una función los llama *funtivos*, esto es, cualquier objeto que tiene función con otros. Esta noción de función está a medio camino entre el lógico-matemático y el etimológico, más próximo en lo formal al primero, pero no idéntico a él.

> “Así podemos decir que una entidad del texto tiene ciertas funciones, y con ello pensar: primero, aproximándonos al significado lógico-matemático, que la entidad tiene dependencias con otras entidades, de tal suerte que ciertas entidades presuponen a otras; y segundo, aproximándonos al significado etimológico, que la entidad funciona de un modo definido, cumple un papel definido, toma una “posición” definida en la cadena” (p. 56).

La función de signo

La noción de signo que propone Hjelmslev está ligada a su consideración de la lengua como un sistema de signos. El concepto vago de signo, legado por la tradición, es que “signo” (o expresión de signo) se caracteriza primero y principalmente por ser signo de alguna otra cosa, lo que parece indicar que “signo” se define por una función. Un signo funciona, designa, denota; un signo, en contraposición a un no-signo, es el portador de una significación (p. 68). “Toda entidad, y por tanto todo signo, se define con carácter relativo, no absoluto, y sólo por el lugar que ocupa en el contexto” (p. 69).

Entre los posibles tipos de dependencias que se pueden identificar entre partes de un texto destacan aquellas en que una parte designa o denota alguna otra; la primera (plano de expresión) funciona o se pone en representación de la segunda (plano del contenido), esto es, señala hacia un contenido que hay fuera de la expresión. Esta función es la que designa Hjemslev como función de signo y que Eco

(1991: 83) presenta como *función semiótica*[5].

En esta teoría, y en consonancia con las propuestas de Saussure, la palabra 'signo' no se aplica a la expresión sino a la entidad generada por la conexión entre una expresión y un contenido. La expresión y el contenido son los funtivos entre los que la función de signo establece una dependencia: "no puede concebirse una función sin sus terminales, y los terminales son únicamente puntos finales de la función y, por tanto, inconcebibles sin ella" (Hjelmslev, 1943: 75).

Con frecuencia se usa la palabra 'signo' para designar especialmente la *forma* de la expresión; pero parece más adecuado usar dicha palabra para designar la unidad que consta de *forma de contenido* y *forma de expresión* y que se establece mediante la solidaridad que este autor llama función de signo. La distinción entre expresión y contenido y su interacción en la función de signo es algo básico en la estructura de cualquier lengua. Cualquier signo, cualquier sistema de signos, cualquier lengua contiene en sí una forma de la expresión y una forma del contenido. La primera etapa del análisis de un texto debe consistir, por tanto, en un análisis que diferencie estas dos entidades.

Sugerimos tener en cuenta que, además de estas dependencias representacionales existen otras dependencias de naturaleza operatoria o actuativa entre distintas partes de un texto. Así mismo, dos o más partes de un texto pueden estar relacionadas de tal modo que conjuntamente cooperan para producir una unidad significativa más global.

3.5. El pragmatismo y la semiótica de Peirce

Charles Sanders Peirce (1839-1914) escribió una gran cantidad de trabajos sobre temas diversos relacionados con la filosofía, la matemática, la semiótica, entre otras disciplinas, los cuales están recibiendo una atención especial en los últimos años en diversos campos. En este apartado incluimos algunas ideas que consideramos de especial interés, las cuales son usadas como marco teórico de referencia en diversas investigaciones en educación matemática (Otte, 2006; Campos, 2010; Sáen-Ludlow y Kadunz, 2016).

Pragmatismo

El pragmatismo es una corriente filosófica que surgió a finales del siglo XIX en los Estados Unidos. William James y Charles S. Peirce fueron los principales impulsores de la doctrina, que se caracteriza por la búsqueda de las consecuencias prácticas del pensamiento. El pragmatismo sitúa el criterio de verdad en la eficacia y valor del pensamiento para la vida. Se opone, por lo tanto, a la filosofía que sostiene que los conceptos humanos representan el significado real de las cosas. Para los pragmáticos, la relevancia de los datos surge de la interacción entre los organismos inteligentes y el ambiente. Esto lleva al rechazo de los significados invariables y de las verdades absolutas: las ideas, para el pragmatismo, son sólo provisionales y pueden cambiar a partir de investigaciones futuras. Al establecer el significado de las cosas a partir de sus consecuencias, el pragmatismo suele ser asociado a la practicidad y a la utilidad. Sin embargo, una vez más, esta concepción depende del contexto.

La orientación del pragmatismo de Peirce (quien prefería nombrar su posición como 'pragmaticismo' para evitar ciertas interpretaciones del pragmatismo) no fue la investigación de cómo los signos significan en el seno de la vida social, sino la manera en que un individuo genérico utiliza signos para formar nuevas ideas y nuevos conceptos para alcanzar la verdad. "Su teoría del pragmaticismo (es decir, la lógica de la abducción) es la base de su semiótica. Por esta razón, la semiótica Peirceana se mueve cerca de las esferas de la lógica, sin reducirse solamente a ésta" (Radford, 2006, p. 9).

En el trabajo titulado, *How to make your ideas clear?* defendió su idea pragmaticista de cómo entender con claridad los conceptos. La "máxima pragmática" es un enunciado de lógica que propuso como recomendación normativa o principio regulativo cuya función es guiar el pensamiento hacia el logro de su propósito, aconsejando sobre la manera óptima de "lograr claridad en la aprehensión".

[5] Un signo está constituido siempre por uno (o más) elementos de un PLANO DE LA EXPRESIÓN colocados convencionalmente en correlación con uno (o más) elementos de un PLANO DEL CONTENIDO (…) Una función semiótica se realiza cuando dos funtivos (expresión y contenido) entran en correlación mutua. (…) (Eco, 1991, 83-84).

Peirce enunció la máxima pragmática de diversas maneras a lo largo de los años. Una que nos parece más comprensible es la siguiente:

> 402. It appears, then, that the rule for attaining the third grade of clearness of apprehension is as follows: Consider what effects, that might conceivably have practical bearings, we conceive the object of our conception to have. Then, our conception of these effects is the whole of our conception of the object1 . (Peirce, CP 5.402)[6]

Burch (2010, p. 8) nos aclara el significado de la máxima pragmática. Cuando Peirce dice que el significado completo de una clara concepción consiste en el conjunto completo de sus consecuencias prácticas, tiene en mente que una concepción significativa debe tener algún tipo de "valor experiencial efectivo", debe, de alguna manera, estar relacionado con algún tipo de colección de observaciones empíricas posibles bajo condiciones especificables. Peirce insistió en que el significado completo de una concepción significativa consiste en la totalidad de tales especificaciones de posibles observaciones.

Las categorías ontológicas de Peirce

La semiótica de Peirce está basada en su distinción de tres categorías ontológicas interconectadas, distinguibles entre sí y que no se pueden reducir unas a otras. Las denomina como *primeridad*, *segundidad* y *terceridad*; su existencia se conoce como el teorema de Peirce. Trataremos de explicarlas con un ejemplo tomado de Sáenz-Ludlow y Kadunz (2016, p. 4).

Consideremos la orden de "sumar cuatro y cinco". Se sugiere a los niños usar la notación 4+5=___. Esto es, se propone que usen los dos símbolos "+" y "=", que serán vistos por los niños como iconos para abreviar la orden dada. Estos símbolos constituyen un ejemplo de categoría ontológica de primeridad. La primeridad denota el carácter de ser un primero, "el modo de ser de aquello que es tal como es, positivamente y sin referencia a algo diferente" (CP 8.328). Fenomenológicamente, la primeridad implica una condición de acceso no mediado ni reflexivo. Las entidades primeras son experiencias sin reacción, causa sin efecto. Es un primer nivel de significado derivado de procesos corpóreos y sensoriales.

Cuando los niños de nuestro ejemplo suman, 4+5=9, transforman la abreviatura inicial en el acto de sumar, lo que supone poner en juego la categoría ontológica de segundidad. La segundidad es "el modo de ser de aquello que es, con respecto a un segundo sin consideración de un tercero" (CP 8.328). Fenomenológicamente, la segundidad es una condición de acceso mediado pero no reflexivo. Las entidades segundas son experiencia y la reacción que causa junto con el efecto que provoca; pero no incluyen aún una reflexión sobre la reacción o el efecto.

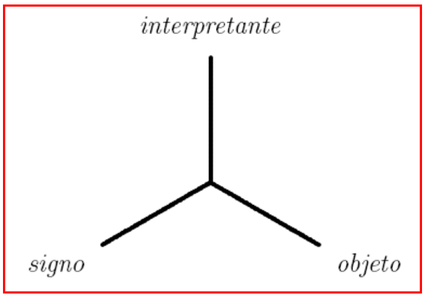
La realización de varias de estas sumas indicando "la respuesta o resultado" tiene la posibilidad de motivar, más tarde, la generalización "la suma de dos números es otro número", que se puede simbolizar como a+b=c donde a, b, y c son números cualesquiera. Esta propiedad general, formada a partir de entidades primeras y segundas constituyen una categoría ontológica de terceridad. La terceridad es "el modo de ser de aquello que es tal como es, implicando un segundo y un tercero relacionados entre sí" (CP 8.328). Esto es, terceridad es mediación entre primeridad y segundidad. Fenomenológicamente, terceridad es un condición tanto de acceso mediado como reflexivo. Las entidades terceras son experiencia y reacción junto con la reflexión sobre la reacción. Son causa, efecto y la extensión de ese efecto en la forma de hábito, convención o ley.

Dicho de manera breve, la segundidad fenomenológica de los signos-vehículos tiene el potencial de provocar formas ontológicas anidadas de primeridad, segundidad y terceridad.

[6] 402. Parece, por lo tanto, que la regla para alcanzar el tercer grado de claridad en la comprensión es la siguiente: considerar qué efectos, que naturalmente pueden tener una motivación práctica, concebimos que tiene el objeto de nuestra concepción. Entonces, nuestra concepción de dichos efectos es nuestra concepción completa de tal objeto". Diversos enunciados e interpretaciones de la máxima pragmática se encuentran disponibles en,
https://en.wikipedia.org/wiki/Pragmatic_maxim

Los signos y sus tipos

Para Peirce el mundo de las apariencias es un mundo constituido enteramente de signos. Los signos son cualidades, relaciones, sucesos, estados, regularidades, hábitos, leyes, etc., que tienen significados o interpretaciones. Un signo es uno de los términos de una tripleta de términos que están indisolublemente conectados uno con otro por una relación triádica esencial que Peirce llama "la relación de signo". En la definición que dio Peirce de signo en 1897: "algo que está por algo para alguien" (CP 2.228) están explícitos los tres elementos básicos: signo, objeto, interpretante.



El signo, en sí mismo, (también llamado representamen) es el término en la relación de signo que usualmente se dice que representa o significa algo. Los otros dos términos en esta relación son llamados el objeto y el interpretante[7]. El objeto es lo que ordinariamente se dice que es la "cosa" significada o representada por el signo, aquello para lo que el signo es signo *de*. El interpretante de un signo es aquello para lo que el signo representa el objeto. "Lo que Peirce quiere decir exactamente como interpretante es difícil de precisar. Es algo como una mente, un acto mental, un estado mental, o una característica o cualidad de la mente; de cualquier modo el interpretante es inexcusablemente mental" (Burch, 2010, p.9).

Nótese que el modelo no tiene forma triangular. Es, más bien, un trípode, de modo que el punto axial crea una interrelación entre un componente y otro componente del signo de la misma manera en que se crea la misma interrelación entre estos dos componentes y el tercer componente. Y así, se completa el signo triádico. El interpretante de un signo, en virtud de la definición que Peirce da de la relación de signo, debe ser él mismo un signo, y un signo además del mismo objeto que es (o fue) representado por el signo (original). El interpretante es un segundo significante del objeto, solo que uno que ahora tiene abiertamente un estatus mental. Pero, simplemente siendo un signo del objeto original, este segundo signo debe él mismo tener un interpretante, que a su vez es un nuevo, tercer signo del objeto, y de nuevo es uno con un estatus abiertamente mental. Y así sucesivamente. Así pues, si hay un signo de cualquier objeto, entonces hay una secuencia de signos del mismo objeto. Por tanto, cualquier cosa del mundo de las apariencias, puesto que es un signo, comienza una secuencia infinita de interpretantes mentales de un objeto.

Según la relación que los signos tengan con el objeto, Peirce realiza la siguiente clasificación:

Iconos: Tienen una relación de semejanza, en tanto se parecen al objeto que representan. La relación con aquello a lo que se refieren es directa, por ejemplo: pinturas, retratos, dibujos figurativos, mapas, etc. La representación muestra la estructura u organización del objeto. Los diagramas, tan usados en matemáticas y otros campos, se consideran ejemplos de iconos por la semejanza estructural con lo que representan.

Índices: La relación con los objetos que representan es de contigüidad (relación de causa-efecto) con respecto a la realidad. Por ejemplo, un rayo (es índice de tormenta), una huella (es índice de alguien que pasó por ahí), etc.

Símbolos: Frente a los iconos y los índices (o síntomas), según Peirce los símbolos son signos inmotivados, en los que la relación entre el significante y el significado es totalmente convencional. Ejemplo: palabras, logotipos, escudos de armas, señales de tránsito.

Los diferentes tipos de signos pueden combinarse; en el caso particular de la fotografía, por ejemplo,

[7] Sáenz-Ludlow y Kadunz (2016, p. 3) representan el signo triádico con la palabra SIGNO (en mayúscula), para distinguirla del componente *representamen* o signo-vehículo. Indican que comprender el proceso de construcción de significado supone comprender el papel activo de la *Persona interpretante* en la reconstrucción del *Objeto real* de un SIGNO a partir de las claves e indicaciones aportadas por los signo-vehículos los cuales solo indican ciertos aspectos del *Objeto real*.

se trataría de un icono (en tanto hay una relación de semejanza con el objeto) pero también es índice puesto que la fotografía se ve afectada por el objeto que representa (la fotografía se produce a través de registrar diferencias lumínicas de aquello que representa).

Fases del método científico

Para Peirce, el método científico implica tres fases o etapas: abducción (formular conjeturas o crear hipótesis), deducción (inferir lo que corresponde si las hipótesis se cumplen), a inducción (probar las hipótesis). El proceso de paso por las tres etapas debería ser realizado con la preocupación de conseguir la economía de la investigación.
La deducción viene a significar para Peirce la obtención de conclusiones en cuanto al fenómeno que se espera observar si la hipótesis es correcta. La inducción significa el proceso completo de experimentación e interpretación realizada al servicio de la prueba de la hipótesis. La abducción no es siempre inferencia a la mejor explicación, sino que es inferencia a alguna explicación o al menos a algo que clarifica o hace rutinaria alguna información.

4. PERSPECTIVAS ANTROPOLÓGICAS SOBRE LAS MATEMÁTICAS

En esta sección incluimos una síntesis de ideas centrales de Wittgenstein (1953; 1976) sobre la naturaleza de las matemáticas las cuales, de acuerdo con Bloor (1983), son consideradas como un fenómeno antropológico, en contraposición a posiciones idealistas y naturalista. Consideramos que esta manera de entender la actividad matemática, así como los conceptos, proposiciones, técnicas, lenguajes y modos de justificación que participan en dicha actividad, forma parte de una teoría social del conocimiento con claras y profundas consecuencias sobre la educación matemática. Se hace mención también a las ideas de Sfard (2000) sobre la creación intradiscursiva de los objetos matemáticos y a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1992), las cuales, desde nuestro punto de vista, guardan relación con las ideas de Wittgenstein.

4.1. Las matemáticas según Wittgenstein

Entre las diversas cuestiones filosóficas tratadas por Wittgenstein sobresalen las referidas a las matemáticas, no sólo en las "*Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*" (Wittgenstein, 1976), sino también en diversos apartados de las "*Investigaciones filosóficas*" y otros ensayos.

Sin embargo, a pesar de la extraordinaria repercusión que las ideas de Wittgenstein han tenido en la filosofía contemporánea y en otras disciplinas, como la sociología, psicología, etc., encontramos escasas referencias a las mismas en los trabajos publicados sobre los problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. Una excepción notable la encontramos en Weinberg y Gavelek (1987) donde se presentan los principales rasgos de una teoría socioconstructivista de la instrucción y el desarrollo de la cognición matemática basada en Wittgenstein y Vigotsky. También encontramos una estrecha relación entre la filosofía de Wittgenstein y las ideas de Sfard (2000) sobre los objetos matemáticos, que sintetizamos en la sección 4.3.

La filosofía de las matemáticas de Wittgenstein se sitúa en el extremo opuesto de las corrientes de tipo platónico-idealista y también de los enfoques psicologistas. Plantea el reto de superar el platonismo dominante, y por tanto dejar de hablar de objetos matemáticos como entidades ideales que se descubren, y dejar de considerar las proposiciones matemáticas como descripción de las propiedades de tales objetos. Nos propone una visión alternativa: Las proposiciones matemáticas deben verse como instrumentos, como reglas de transformación de proposiciones empíricas. Por ejemplo, los teoremas de la geometría son reglas para encuadrar descripciones de formas y tamaños de objetos, de sus relaciones espaciales y para hacer inferencias sobre ellas.

Podemos decir que la revolución Wittgensteiniana - aún no digerida del todo en la epistemología y las ciencias cognitivas (McDonough, 1989)- debería conducir a una profunda revisión de gran parte de las investigaciones realizadas sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. ¿Cómo cambiaría la práctica de la enseñanza de las matemáticas asumiendo una epistemología de tipo antropológico como propone Wittgenstein? ¿Qué modelos instruccionales serían coherentes con la misma?

A continuación presentamos una síntesis de la filosofía de las matemáticas de Wittgenstein siguiendo el análisis de Baker y Hacker (1985).

4.1.1 El lenguaje matemático como herramienta

La concepción realista (Agustiniana) del significado de las palabras se basa en tratar cada palabra significante como un nombre. Esta idea informa la mayor parte de la reflexión sobre la filosofía de las matemáticas y de la psicología. Las expresiones matemáticas tales como '0', '-2'; (raíz de -1); 'alef subcero', o incluso '+', 'x^4', 'e^x', se toman como nombres de entidades, y la cuestión, "¿Qué significan?", se reduce a, "¿En lugar de qué están"?

Durante mucho tiempo los matemáticos han sostenido que nada corresponde al uso de los números negativos, que estos símbolos están en lugar de nada. Producir una explicación rigurosa de en lugar de qué está un símbolo, por ejemplo, identificar un número negativo con una clase de equivalencia de pares ordenados de números naturales, se toma como demostración de que un símbolo tiene un significado. (Es sorprendente que tales explicaciones no juegan ningún papel en transmitir a un neófito cómo usar estos símbolos en las aplicaciones de los cálculos matemáticos, esto es, en emplear los números enteros negativos en las operaciones bancarias o en mecánica). Wittgenstein sostiene que la preconcepción de que los términos significantes son nombres oculta profundas diferencias en uso bajo una terminología uniforme engañosa. Además estimula el mito de que las diferencias en uso fluyen misteriosamente de las diferencias en la naturaleza de los objetos supuestamente nombrados.

Wittgenstein argumentó que deberíamos considerar las palabras como herramientas y clarificar sus usos en nuestros *juegos de lenguaje*. No debemos perder de vista el hecho de que las palabras-numéricas son instrumentos para contar y medir, y que los fundamentos de la aritmética elemental, esto es, el dominio de la serie de números naturales, se basa en el entrenamiento en el recuento.

Los filósofos se desvían pronto de estos puntos familiares tratando de buscar fundamentos más profundos para la aritmética. Frege ejemplificó este error. Comienza sus investigaciones de los números a partir de un examen de enunciados de recuento extra-matemáticos tales como 'Júpiter tiene cuatro lunas'. Pero después descartó su 'insight' mediante su convicción de que los numerales son nombres de objetos platónicos. Sucumbió al poder hipnotizante de la cuestión filosófica "¿Qué son los números?" y buscó una definición rigurosa como respuesta. Wittgenstein pensó que esta cuestión era engañosa ("¿Cuál es el significado de la palabra 'cinco'"? - "Aquí no se cuestiona tal cosa, sólo como se usa la palabra 'cinco'"). "Lo que estamos buscando no es una definición del concepto de número, sino una exposición de la gramática de la palabra 'número' y de los numerales"[8]. La asimilación de los términos matemáticos a nombres, especialmente la concepción de que son nombres de objetos ideales o abstractos, es fundamental para las confusiones que se producen al reflexionar sobre las matemáticas.

Las proposiciones matemáticas se deben distinguir también de las descripciones. Las deberíamos ver como instrumentos e indagar sobre sus papeles, sus usos en la práctica. Veremos entonces que su uso característico es como regla de transformación de proposiciones empíricas, o, de manera más general, como reglas de representación para encuadrar (framing) descripciones.

Por ejemplo, los teoremas geométricos funcionan como reglas para encuadrar descripciones de formas y tamaños de objetos y de sus relaciones espaciales y para hacer inferencias sobre ellas. El contraste entre proposiciones descriptivas y proposiciones matemáticas que sirven como reglas de descripción es de la mayor importancia. El fallo en hacer esta distinción es fuente de confusiones al reflexionar sobre las matemáticas, arrastrando tras de sí otras sobre los conceptos de verdad, aserción,

[8] Wittgenstein usa la palabra 'gramática' para referir a las convenciones del uso de una palabra en un contexto dado, o de manera equivalente, las reglas de un *juego de lenguaje* (Bloor, 1983).

conocimiento y verificación.

Además, alimenta mitologías filosóficas tales como el Platonismo, que observa correctamente que las proposiciones matemáticas no son descripciones de signos y salta a la conclusión de que deben ser descripciones de otra cosa, esto es, entidades abstractas. Es igual de sencillo caer en la reacción formalista al Platonismo, creyendo que las proposiciones matemáticas describen algo: si no describen entidades abstractas entonces describen signos, y que elimina la distinción entre aplicar las técnicas matemáticas dentro de ellas mismas y aplicarlas fuera de las matemáticas.

Un enunciado como 'Los números reales no pueden ponerse en correspondencia uno a uno con los números naturales' parece un notable descubrimiento sobre objetos matemáticos, pero es parte de la construcción de un cálculo matemático, no un descubrimiento de hechos matemáticos sino la creación de nuevas normas de descripción (Baker y Hacker, 1985, p. 10).

La hipótesis acrítica de que cada palabra significativa es un nombre y cada sentencia es una descripción ocasiona tantos estragos a nuestro pensamiento sobre la mente como a nuestras reflexiones sobre las matemáticas. Los malentendidos de la imagen agustiniana se ramifican en ideas distorsionadas sobre los símbolos, la explicación y la comprensión de palabras, la comunicación, la representación, el sentido y no-sentido, etc.

4.1.2. Alternativa al platonismo y mentalismo

El análisis del uso del lenguaje matemático que hace Wittgenstein está dirigido de manera central a la superación del platonismo. Por ejemplo, decimos que '2+2 = 4' es una afirmación sobre números. Ciertamente no es un enunciado sobre signos (marcas sobre papel), ni sobre cómo la gente usa tales signos. De igual modo decimos que el enunciado 'Los leones son carnívoros' es una afirmación sobre los leones. Pero hay que insistir en la radical diferencia entre ambas sentencias. Los enunciados sobre leones nos dicen hechos sobre leones, pero lo que llamamos 'enunciados sobre números' tienen el papel de reglas para el uso de las palabras numéricas o numerales. Se trata de que evitemos pensar en la existencia de un dominio de objetos matemáticos, de manera similar a lo que ocurre con las proposiciones sobre leones que sí se refieren a un dominio de seres vivos.

El fallo en distinguir estos diferentes usos de 'referir' es uno de los muchos estímulos para apoyar el mito de que las proposiciones necesarias se refieren a tipos especiales de entidades, objetos abstractos, Objetos Ideales o Universales que constituyen la esencia de las cosas. Pensamos que si afirmamos una proposición matemática 'sobre' $\aleph_0$ estamos hablando sobre un ciudadano de un fantástico y misterioso dominio del número, 'el paraíso de Cantor'. Pero no estamos hablando de un dominio de nada, sólo dando reglas para el uso de '$\aleph_0$'. Cuando se especifican estas normas de representación podemos usar '$\aleph_0$' para hacer enunciados empíricos falsos o verdaderos (Baker y Hacker, 1985, p. 283).

Somos propensos a pensar de la geometría como la ciencia sobre Objetos Ideales. Decimos que una línea euclídea no tiene amplitud mientras que todas las líneas trazadas con un lápiz la tienen, que un triángulo euclídeo tiene exactamente 180º, mientras que todos los triángulos mundanos se desvían más o menos. Esta es una imagen ofuscada. *Una geometría no es una teoría del espacio, sino más bien un sistema de reglas para describir objetos en el espacio.*

No hay ninguna cosa como 'un Objeto Ideal', o 'un objeto abstracto' (p. 283). Debemos recordar que se comienza a hablar de Objetos Ideales para significar cosas que no son reales, que no tienen ninguna existencia salvo como ideas de la imaginación. Decir que un cierto símbolo 'a' significa un Objeto Ideal es decir algo sobre el significado, y por tanto el uso de 'a'. En particular, supone decir que este uso es en cierto aspecto similar al de signos que significan un objeto pero que 'a' no significa un objeto en absoluto. A veces se sostiene que Frege, en los Fundamentos de la Aritmética mostró que si uno cree en la objetividad de las matemáticas, entonces no hay ninguna objeción en pensar en términos de objetos matemáticos o concebirlos como si esperasen ser descubiertos. Pero esto es bastante equivocado.

Debido a que pensamos que las proposiciones necesarias expresan verdades de modo análogo a las proposiciones empíricas, porque creemos que se refieren a entidades de diverso tipo, pensamos de modo natural que algún tipo de realidad les corresponde. Y por tanto, no queremos decir meramente que tales proposiciones son verdaderas, sino que, por ejemplo, 'la verdad matemática es parte de la realidad objetiva'. La verdad de una proposición matemática es enteramente independiente de cómo sean las cosas en la realidad. ... Las proposiciones matemáticas son reglas de representación. Se dicen que son verdaderas si son proposiciones primitivas del sistema o si son probadas. Pero ciertamente el sistema es enormemente útil... (Baker y Hacker, 1985, p. 285).

4.1.3. Juegos de lenguaje y formas de vida

Las nociones de "juego de lenguaje" y "formas de vida" son conceptos principales en la filosofía de Wittgenstein. Dado que el significado de las palabras se concibe como el uso que se hace de ella en diversos contextos el significado de "juego de lenguaje" hay que buscarlo mediante el uso que hace Wittgenstein de dicha expresión. Así, la interacción comunicativa que se establece entre un maestro albañil A que pide materiales a su ayudante B se considera como un juego de lenguaje. Los procesos comunicativos mediante los que los niños aprenden su lengua materna son otro ejemplo. "Llamaré también «juego de lenguaje» al todo formado por el lenguaje y las acciones con las que está entretejido". En el epígrafe 23 de las Investigaciones Filosóficas desarrolla esta idea con nuevos ejemplos:

> 23. ¿Pero cuántos géneros de oraciones hay? ¿Acaso aserción, pregunta y orden?— Hay innumerables géneros: innumerables géneros diferentes de empleo de todo lo que llamamos «signos», «palabras», «oraciones». Y esta multiplicidad no es algo fijo, dado de una vez por todas-, sino que nuevos tipos de lenguaje, nuevos juegos de lenguaje, como podemos decir, nacen y otros envejecen y se olvidan. (Una figura aproximada de ello pueden dárnosla los cambios de la matemática). La expresión «juego de lenguaje» debe poner de relieve aquí que hablar el lenguaje forma parte de una actividad o de una forma de vida. Ten a la vista la multiplicidad de juegos de lenguaje en estos ejemplos y en otros:
>
> Dar órdenes y actuar siguiendo órdenes — Describir un objeto por su apariencia o por sus medidas— Fabricar un objeto de acuerdo con una descripción (dibujo)— Relatar un suceso — Hacer conjeturas sobre el suceso — Formar y comprobar una hipótesis — Presentar los resultados de un experimento mediante tablas y diagramas— Inventar una historia; y leerla— Actuar en teatro— Cantar a coro— Adivinar acertijos— Hacer un chiste; contarlo— Resolver un problema de aritmética aplicada— Traducir de un lenguaje a otro— Suplicar, agradecer, maldecir, saludar, rezar.

Como explica Marrades (2014), la expresión *forma de vida* aparece siempre en conexión con el lenguaje y, más concretamente, con juegos de lenguaje particulares; además, en la mayoría de los ejemplos, la noción de forma de vida se caracteriza como un modo de actuar que está en la base del uso del lenguaje. Según este autor, el recurso a dicha noción se produce en un ámbito de problemas que conciernen a las condiciones conceptuales de la comprensión del lenguaje. La comprensión del juego de lenguaje que se necesita para entender el sentido de las expresiones empleadas conforme a sus reglas de uso, es aquélla que se deriva de considerarlo en determinada relación con la vida de quienes participan en él. Así, comprender el sentido de una expresión exige, no sólo apelar a las reglas que rigen su uso, sino también ver dicho uso por referencia a una estructura existencial más amplia, de la cual forma parte el juego de lenguaje. Más concretamente, una forma de vida designa, para Wittgenstein, un entramado fáctico de relaciones entre conducta lingüística, conducta no lingüística y situaciones en el mundo, en cuyo marco se desarrolla un juego de lenguaje. Las formas de vida son siempre formas sociales de vida, prácticas sociales.

4.1.4. Características y limitaciones del convencionalismo de Wittgenstein como modelo de cognición matemática

Las ideas de Wittgenstein sobre las matemáticas nos parecen de gran utilidad y relevancia para la educación matemática, aunque también pensamos que necesitan ser estudiadas y complementadas para que puedan constituir un marco pertinente para analizar en su complejidad los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en las instituciones educativas. En la problemática de la enseñanza de las matemáticas — particularmente de las actividades de planificación de la instrucción y la evaluación de los aprendizajes — nos parece necesario reflexionar sobre algunos presupuestos básicos de la filosofía de Wittgenstein.

La metáfora del objeto matemático nos parece una herramienta útil tanto para estructurar el cuerpo de conocimientos matemáticos (o si se prefiere la gramática matemática), como también para organizar los procesos de estudio de las matemáticas. Pensamos que dentro de la ilimitada variedad de usos de los términos, símbolos y expresiones matemáticas es posible identificar 'patrones de comportamiento' o 'prácticas prototípicas' locales, estructuradas en ciertos niveles de generalidad en torno a campos de problemas, que constituyen una guía para organizar los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el contexto de enseñanza de un saber constituido o en vías de constitución parece natural hablar de objeto matemático para referirnos a los componentes de dicho saber, que están dados como entidades culturales cuya apropiación por los estudiantes es el compromiso básico de la institución correspondiente. La adopción en el seno de las instituciones educativas de una epistemología “realista”, no necesariamente platonista, y una semiótica referencial parece útil. Ahora bien, las entidades matemáticas deben ser concebidas en términos socioculturales, no como entidades ideales absolutas. Pensamos que es posible y necesario compatibilizar los enfoques realistas y pragmáticos para lograr un modelo de la cognición matemática adaptado a las necesidades de la educación matemática. La posición de Ullmann (1962) al respecto es un buen apoyo para esta articulación.

En la literatura de educación matemática nos parece difícil seguir la recomendación de Wittgenstein de evitar hablar del 'objeto matemático'. Incluso en el enfoque antropológico propuesto por Chevallard (1992) se introduce como noción clave la 'relación con el objeto' como sustituto de la idea de comprensión, conocimiento, etc. Los trabajos de Douady, con su dialéctica útil-objeto, la idea de 'reificacion' de Sfard y Dubinsky, o la expresión 'significado de un objeto matemático' (Godino y Batanero, 1994), son indicaciones de la, al menos aparente, utilidad del objeto. La metáfora del objeto parece ser un recurso útil del pensamiento y la comunicación, aunque también puede ocultar algunos aspectos, de modo que tenemos que aprender a controlar su uso[9].

Se debe estudiar si el considerar que tales objetos (conceptos, proposiciones, teorías) no son otras entidades que las reglas gramaticales de Wittgenstein (al menos desde el punto de vista institucional) permitiría resolver el dilema y evitar las confusiones de las que nos advierte.

Es cierto que el hacer matemático conlleva una faceta de creación, invención de reglas gramaticales para el uso de símbolos y expresiones, pero también supone descubrimiento de regularidades (patrones) en el mundo empírico y en el propio mundo matemático, que son el motivo de sus inventos. Tales regularidades persuaden de la conveniencia de extender el sistema conceptual en una cierta dirección. Como afirma Cañón (1993), la matemática es creación y descubrimiento; tras el estudio de Wittgenstein, y teniendo en cuenta las reflexiones y aportaciones de las investigaciones didácticas podríamos decir que la matemática es *gramática* y es *heurística*.

Como hemos visto, Wittgenstein enfatiza la dimensión constructiva de las matemáticas, su aspecto convencional y creativo como única vía para explicar el carácter necesario de las proposiciones matemáticas. Ahora bien, ¿cómo explicar la eficacia de las matemáticas para resolver problemas empíricos? Nos parece que el reconocer la existencia de ciertas regularidades en el mundo que nos rodea, las cuales son la motivación de la adopción de las convenciones matemáticas, abre la vía al reconocimiento de la dimensión heurística de las matemáticas. Pensamos que la motivación de las estructuras matemáticas proviene de las regularidades perceptibles sobre el mundo que nos rodea. Por ejemplo, la curva normal de probabilidades es una de las estructuras matemáticas que organiza las

[9] El papel de las metáforas en la formación de los conceptos matemáticos es un tema relevante en la investigación en educación matemática, como se muestra en los trabajos de Van Dormolen (1991), English, (1997), Lakoff y Núñez (2000), Font, Godino, Planas y Acevedo (2010).

regularidades observables en los errores de medición.

4.2. Creación intra-discursiva de los objetos matemáticos

El análisis de las relaciones entre los símbolos y los objetos matemáticos que realiza Sfard (2000) proporciona un punto de vista que podemos calificar de no realista sobre la naturaleza de los objetos matemáticos y que consideramos necesario tener en cuenta para progresar hacia un enfoque unificado de la cognición matemática. La visión sobre las relaciones entre la realidad perceptible (que denomina realidad de hecho), el lenguaje, y la "realidad virtual" de los objetos matemáticos guarda una estrecha relación con la filosofía de las matemáticas propuesta por Wittgenstein, razón por la cual incluimos su análisis en esta sección.

Contrasta el discurso de la realidad de hecho (perceptible), (por ejemplo, "Las expresiones 'el fundador del psicoanálisis' y 'Sigmund Freud' significan lo mismo porque se refieren a la misma persona") y el discurso matemático (por ejemplo, "Los símbolos 2/3 y 12/18 significan lo mismo porque se refieren al mismo número") que considera refiriendo a una realidad virtual. Entre ambos discursos existen grandes similitudes, pero considera fundamental tomar conciencia de las diferencias entre los tipos de objetos referidos en cada caso, así como las relaciones entre los dos mundos.

El problema que aborda, expresado en términos semióticos, es: "Los símbolos matemáticos refieren a algo -¿pero a qué?, ... ¿Cuál es el estatuto ontológico de estas entidades?, ¿De dónde vienen? ¿Cómo podemos acceder a ellas (o construirlas)?" (p. 43)

Sfard rechaza la concepción que propone los signos y los significados como entidades independientes y adopta la visión de psicólogos como Vygotsky y semióticos como Peirce, de que los signos (el lenguaje en general) tiene un papel constitutivo de los objetos de pensamiento y no meramente representacional. Está de acuerdo básicamente con el postulado Wittgensteiniano de que el "significado de una palabra está en su uso en el lenguaje", pero tiene también la convicción de que desde el punto de vista psicológico, el problema del significado no se puede reducir sólo al análisis lingüístico.

La tesis central que defiende Sfard en este trabajo es que "el discurso matemático y sus objetos son mutuamente constitutivos: La actividad discursiva, incluyendo la producción continua de símbolos, es la que crea la necesidad de los objetos matemáticos; y son los objetos matemáticos (o mejor el uso de símbolos mediado por los objetos) los que, a su vez, influyen en el discurso y le lleva hacia nuevas direcciones" (p. 47).

4.3. Teoría antropológica de lo didáctico

El punto de partida de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1992; 1999) es considerar la actividad matemática, y la actividad de estudio de las matemáticas, en el conjunto de las actividades humanas y de las instituciones sociales, razón por la cual consideramos que guarda relación con las aproximaciones socioculturales sobre el conocimiento matemático.

La teoría antropológica se ha centrado hasta el momento, casi de manera exclusiva, en la dimensión institucional del conocimiento matemático. Las nociones de obra matemática, praxeología, relación institucional al objeto se proponen como instrumentos para describir la actividad matemática y los objetos institucionales emergentes de tal actividad. El constructo cognitivo (en sentido restringido) que propone es el de “relación personal al objeto” que agrupa todas las restantes nociones propuestas desde la psicología (concepción, intuición, esquema, representación interna, etc.).

En los comienzos de la TAD se introducen como nociones técnicas las de objeto, sujetos, instituciones y relaciones personales e institucionales a los objetos. Se considera que estos objetos existen porque hay “actividad”, es decir trabajo humano, del que todos los objetos son emergentes. En la actualidad la noción de praxeología sintetiza la concepción antropológica de la matemática sobre la que se apoya la TAD. Veamos la descripción que se hace en Chevallard (1999; p. 224-229) de la noción de praxeología u organización matemática.

> Alrededor de un tipo de tareas, T, se encuentra así, en principio, una tripleta formada por una técnica (al menos), τ, por una tecnología de τ, θ, y por una teoría de θ, Θ. El total, indicado por [$T/\tau/\theta/\Theta$], constituye una praxeología puntual, donde este último calificativo significa que se trata de una praxeología relativa a un único tipo de tareas, T. Una tal praxeología –u organización praxeológica- está pues constituida por un bloque práctico-técnico, [T/τ], y por un bloque tecnológico-teórico [θ/Θ]. El bloque [θ/Θ] se identifica habitualmente como un saber, mientras que el bloque [T/τ] constituye un saber-hacer. Por metonimia se designa corrientemente como “saber” la praxeología [$T/\tau/\theta/\Theta$] completa, o incluso cualquier parte de ella. Pero esta manera de hablar estimula una minoración del saber-hacer, sobre todo en la producción y difusión de las praxeologías (p. 229).

Dentro de este modelo teórico, hacer matemáticas consiste en activar una organización matemática, es decir, resolver determinados tipos de problemas con determinados tipos de técnicas (el saber hacer), de manera inteligible, justificada y razonada (mediante el correspondiente saber). Este trabajo puede conducir a la construcción de nuevas organizaciones matemáticas o, simplemente, a la reproducción de organizaciones previamente construidas.

Dado que las técnicas, tecnologías y teorías que se ponen en juego para resolver un determinado tipo de tareas pueden ser diferentes según las instituciones y contextos de uso en que tienen lugar se deriva, por tanto, el reconocimiento del carácter relativo (antropológico) de los saberes y de los conocimientos puestos en juego.

> “La ‘antropología del conocimiento' de Chevallard es una extensión de la epistemología, en el sentido de que, tradicionalmente, el objeto de estudio de la epistemología era la producción del conocimiento científico, mientras que la antropología del conocimiento se considera que se ocupa no solo de los mecanismos de la producción sino también con las prácticas relacionadas con el uso o aplicación del conocimiento científico, su enseñanza, y su transposición, esto es el tratamiento del conocimiento que hace que ciertos aspectos del mismo se adapten para funcionar en distintos tipos de instituciones (la escuela es una de ellas)” (Sierpinska y Lerman, 1996, p. 846).

5. REPRESENTACIONES INTERNAS Y EXTERNAS

En este apartado hacemos una síntesis de las principales nociones teóricas usadas como herramientas para describir la cognición en las investigaciones que se realizan en educación matemática. Predominan los constructos que designan los conocimientos del sujeto (representaciones mentales o internas) y sus relaciones con los objetos ostensivos (notaciones, símbolos, gráficos, materiales manipulativos, etc.), que se consideran como representaciones externas de los conocimientos individuales.

5.1. Sistemas de representación en educación matemática

Goldin (1998) presenta la noción de sistemas de representación y sus diversos tipos como el constructo clave de un modelo psicológico unificado del aprendizaje y la resolución de problemas matemáticos. Sugiere que los avances en los campos de la psicología, lingüística formal, semántica y semiótica, junto con el estudio de las estructuras matemáticas y la necesidad práctica de comprender las interacciones de los estudiantes con los entornos basados en el uso de ordenadores han motivado un intenso trabajo sobre las representaciones y los sistemas de símbolos en la psicología de la educación matemática. Esto se refleja en los trabajos publicados en los dos números monográficos dedicados al tema en la revista *Journal of Mathematical Behavior* (1998).

En este apartado vamos a identificar las características que se atribuye a la noción de representación en el campo de la psicología de la educación matemática. Esto facilitará su contraste con otras herramientas cognitivas desarrolladas desde diferentes marcos teóricos, así como identificar algunas limitaciones para que pueda servir de noción clave en el análisis de la cognición matemática, en su dimensión institucional y personal.

Interpretaciones del término 'representación'

El término 'representación' y la expresión 'sistema de representación', en conexión con la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas tienen las siguientes interpretaciones (Goldin y Janvier, 1998, p. 1):

1. Una situación física, externa y estructurada, o un conjunto de situaciones de un entorno físico, que se puede describir matemáticamente o se puede ver como concretización de ideas matemáticas;
2. Una materialización lingüística, o un sistema lingüístico mediante el que se plantea un problema o se discute un contenido matemático, con énfasis en las características sintácticas y en la estructura semántica.
3. Un constructo matemático formal, o un sistema de constructos, que puede representar situaciones mediante símbolos o mediante un sistema de símbolos, usualmente cumpliendo ciertos axiomas o conforme a definiciones precisas -incluyendo constructos matemáticos que pueden representar aspectos de otros constructos matemáticos.
4. Una configuración cognitiva interna, individual, o un sistema complejo de tales configuraciones, inferida a partir de la conducta o la introspección, que describe algunos aspectos de los procesos del pensamiento matemático y la resolución de problemas.

Carácter sistémico

Las representaciones matemáticas no se pueden entender de manera aislada. Una ecuación o una fórmula específica, una disposición concreta de bloques multibase, una gráfica particular en un sistema cartesiano adquieren sentido sólo como parte de un sistema más amplio con significados y convenciones que se han establecido. "Los sistemas representacionales importantes para las matemáticas y su aprendizaje tienen estructura, de manera que las diferentes representaciones dentro de un sistema están relacionadas de manera rica unas a otras" (Goldin y Stheingold, 2001, p. 2)

Dentro de cada sistema representacional se incluyen las convenciones que lo configuran así como las relaciones con otros objetos y sistemas matemáticos. El numeral 12, por ejemplo, debe interpretarse incorporando las reglas del sistema de numeración posicional decimal y todas las relaciones que guarda con otros sistemas de numeración y con todo el sistema de números reales.

Representaciones externas

Los sistemas de representaciones externas comprenden los sistemas simbólicos convencionales de las matemáticas tales como la numeración en base diez, notación formal algebraica, la recta numérica real, la representación en coordenadas cartesianas. También se incluyen entornos de aprendizaje, como los que utilizan materiales manipulativos concretos, o micromundos basados en el uso de ordenadores. Se considera que una representación es un signo o una configuración de signos, caracteres u objetos que pueden ponerse en lugar de algo distinto de él mismo (simbolizar, codificar, dar una imagen o representar). El objeto representado puede variar según el contexto o el uso de la representación: En el caso de un gráfico cartesiano puede representar una función o el conjunto solución de una ecuación algebraica.

Algunos sistemas de representación externos son principalmente notacionales y formales, como los sistemas de numeración, escritura de expresiones algebraicas, convenios de expresión de funciones, derivadas, integrales, lenguajes de programación, etc. Otros sistemas externos muestran relaciones de manera visual o gráfica, como las rectas numéricas, gráficos basados en sistemas cartesianos o polares, diagramas geométricos; las palabras y expresiones del lenguaje ordinario son también representaciones externas. Pueden denotar y describir objetos materiales, propiedades físicas, acciones y relaciones, u objetos que son mucho más abstractos (Goldin, 1998, p. 4).

Carácter convencional y ambigüedad

Los sistemas de representación son constructos convencionales, en el mismo sentido que lo puede ser un sistema de axiomas matemáticos. La decisión de donde empieza y termina un sistema, o si una estructura adicional es intrínseca a un sistema dado o procede de una relación simbólica entre dos sistemas, es arbitraria y está motivada por la conveniencia y simplicidad de la descripción. Por tanto, en un sistema representacional puede haber una cierta ambigüedad, que afecta al conjunto de reglas sintácticas y semánticas del sistema, en cuanto puede haber excepciones a tales reglas. En la práctica, la ambigüedad se resuelve teniendo en cuenta el contexto en el que el signo, la configuración, o la relación simbólica ambigua aparecen.

Carácter bidireccional de la representación

La relación de representación (simbolización, codificación) entre dos sistemas es reversible. Dependiendo del contexto un gráfico puede proporcionar una representación geométrica de una ecuación de dos variables, y alternativamente una ecuación ($x^2 + y^2 =1$) puede proporcionar una simbolización algebraica de un gráfico cartesiano.

Representaciones internas

Se consideran representaciones internas los constructos de simbolización personal de los estudiantes, las asignaciones de significado a las notaciones matemáticas. Goldin incluye también como representaciones internas el lenguaje natural del estudiante, su imaginación visual y representación espacial, sus estrategias y heurísticas de resolución de problemas, y también sus afectos en relación a las matemáticas. Las configuraciones cognitivas internas pueden tener, o no tener, semejanza estructural con los sistemas externos, al menos en el modelo unificado que propone Goldin (1998, p. 147); la relación simbólica se puede establecer con sistemas externos o entre sistemas internos.

Las representaciones cognitivas internas (o mentales) se introducen como una herramienta teórica para caracterizar las cogniciones complejas que pueden construir los estudiantes sobre las representaciones externas. No se pueden observar directamente, sino que son inferidas a partir de conductas observables.

Como tipos de representaciones cognitivas Goldin (1998) describe los siguientes:

- Verbales o sintácticas: capacidades relativas al uso del lenguaje natural por los individuos, vocabulario matemático y no matemático, incluyendo el uso de la gramática y la sintaxis.
- Sistemas figurales (imagistic) y gestuales, incluyendo configuraciones cognitivas espaciales y visuales, o "imágenes mentales"; esquemas gestuales y corporales.
- Manipulación mental de notaciones formales (numerales, operaciones aritméticas, visualización de pasos simbólicos para resolver una ecuación)
- Procesos estratégicos y heurísticos: "ensayo y error", "descomposición en fases", etc.
- Sistemas de representación afectivos, emociones, actitudes, creencias y valores sobre las matemáticas, o sobre sí mismos en relación a las matemáticas.

Interacción entre representaciones externas e internas

Se considera que la interacción entre las representaciones externas e internas es fundamental para la enseñanza y el aprendizaje. El interés primario del proceso de instrucción se centra sobre la naturaleza de las representaciones internas en proceso de desarrollo por los estudiantes. Las conexiones entre representaciones se pueden basar en el uso de analogías, imágenes y metáforas, así como semejanzas estructurales y diferencias entre sistemas de representación.

Las representaciones internas son siempre inferidas a partir de sus interacciones con, o su discurso sobre, o la producción de representaciones externas. Se considera útil pensar que lo externo representa lo interno y viceversa. Un concepto matemático se ha aprendido y se puede aplicar en la medida en que se han desarrollado una variedad de representaciones internas apropiadas, junto con las relaciones funcionales entre ellas.

Objetivo instruccional

Se considera que entre los fines fundamentales de la educación matemática están los objetivos representacionales: el desarrollo de sistemas internos eficientes de representación en los estudiantes que correspondan de manera coherente, e interactúen bien, con los sistemas externos convencionalmente establecidos de las matemáticas.

Remitimos al lector a Godino y Font (2010) para una descripción más extensa de la teoría de las representaciones desarrollada por G. Goldin, y su interpretación y valoración desde el "enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático" (Godino, Batanero y Font, 2007).

5.2. Registros de representación, comprensión y aprendizaje

Una característica importante de la actividad matemática es el uso de diversos sistemas de expresión y representación, además del lenguaje natural: variados sistemas de escritura para los números, escrituras algebraicas para expresar relaciones y operaciones, figuras geométricas, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas, etc. Un autor que se ha interesado particularmente por este uso variado de los sistemas de representación semiótica es Duval (1995), quién se pregunta: "¿Es esencial esta utilización de varios sistemas semióticos de representación y expresión, o al contrario no es más que un medio cómodo pero secundario para el ejercicio y para el desarrollo de las actividades cognitivas fundamentales?" (p. 3) Considera que esta pregunta sobrepasa el dominio de las matemáticas y de su aprendizaje y apunta hacia la naturaleza misma del funcionamiento cognitivo del pensamiento humano.

Duval da una respuesta afirmativa a esta cuestión aportando los siguientes argumentos:

1) No puede haber comprensión en matemáticas si no se distingue un objeto de su representación. No se deben confundir nunca los objetos matemáticos (números, funciones, rectas, etc.) con sus representaciones (escrituras decimales o fraccionarias, los símbolos, los gráficos, los trazados de figuras, etc.), pues un mismo objeto matemático puede darse a través de representaciones muy diferentes.
2) Existen representaciones mentales, conjunto de imágenes, conceptos, nociones, ideas, creencias, concepciones que un individuo puede tener sobre un objeto, sobre una situación y sobre aquello que les está asociado. "Permiten una mirada del objeto en ausencia total de significante perceptible". (p. 20). Las representaciones mentales están ligadas a la interiorización de representaciones externas, de la misma manera que las imágenes mentales lo están a una interiorización de las percepciones.
3) Las representaciones semióticas son un medio del cual dispone un individuo para exteriorizar sus representaciones mentales, es decir, para hacerlas visibles o accesibles a los demás. Además de sus funciones de comunicación, las representaciones semióticas son necesarias para el desarrollo de la propia actividad matemática. La posibilidad de efectuar tratamientos (operaciones, cálculos) sobre los objetos matemáticos depende directamente del sistema de representación semiótico utilizado. El progreso de los conocimientos matemáticos se acompaña siempre de la creación y del desarrollo de sistemas semióticos nuevos y específicos que más o menos coexisten con el de la lengua natural.
4) Diferentes representaciones no pueden oponerse como dominios totalmente diferentes e independientes. La pluralidad de sistemas semióticos permite una diversificación tal de las representaciones de un mismo objeto, que aumenta las capacidades cognitivas de los sujetos y por tanto de sus representaciones mentales. Esta interdependencia entre las representaciones internas y externas la expresa Duval afirmando que "no hay noesis[10] sin semiosis; es la semiosis la que determina las condiciones de posibilidad y de ejercicio de la noesis" (p. 5). La aprehensión conceptual no es posible sin el recurso a una pluralidad al menos potencial de sistemas semióticos, y por tanto su coordinación por parte del sujeto.
5) La coordinación entre las representaciones que provienen de sistemas semióticos diferentes no es espontánea; la conversión de unos sistemas a otros requiere un aprendizaje específico. El problema esencial de la semiosis es el de la diversidad de sistemas de representación y los fenómenos de no-congruencia que resultan por la conversión de las representaciones. La coordinación entre registros no es una consecuencia de la aprehensión conceptual (noesis) sino que, al contrario, el logro de dicha coordinación es una condición esencial de la noesis.

[10] Noesis, aprehensión conceptual de un objeto; semiosis, la aprehensión o la producción de una representación semiótica.

6) Las actividades cognitivas inherentes a la semiosis son tres: formación de representaciones en un registro semiótico particular, para "expresar" una representación mental, o para "evocar" un objeto real; el tratamiento o transformación de una representación dentro del mismo registro; conversión, cuando la transformación de la representación de un objeto, de una situación o de una información produce una representación en un registro distinto al de la representación inicial.

5.3. Esquemas cognitivos

Invariantes operatorios y esquemas

Dentro de las teorías que postulan la pertinencia de considerar representaciones internas como constituyentes del conocimiento de los sujetos destacamos la elaborada por Vergnaud (1990, 1998). Con la noción de esquema, adaptada de la propuesta por Piaget, se propone una visión alternativa a los "sistemas de representación". Además de incorporar los elementos lingüísticos atribuye un papel esencial a la acción del sujeto en la constitución de los esquemas cognitivos, relativizándolos a una clase de situaciones. "Un esquema es la organización invariante de la conducta para una cierta clase de situaciones" (Vergnaud, 1990, p. 136).

Afirma que “es en los esquemas donde se deben investigar los conocimientos en acto del sujeto, que son los elementos cognitivos que permiten a la acción del sujeto ser operatoria”. Cada esquema es relativo a una clase de situaciones cuyas características son bien definidas. Además, un esquema reposa siempre sobre una conceptualización implícita, siendo los conceptos-en-acto y los teoremas-en-acto constituyentes de los esquemas operatorios.

Un esquema es una totalidad organizada, que permite generar una clase de conductas diferentes en función de las características particulares de cada una de las situaciones de la clase a la cual se dirige. Comporta los siguientes componentes:

- Invariantes operatorios (conceptos-en-acto y teoremas-en-acto) que pilotan el reconocimiento por el sujeto de los elementos pertinentes de la situación, y la recogida de información sobre la situación a tratar.
- Anticipaciones del fin a lograr, de los efectos a esperar y de las etapas intermedias eventuales.
- Reglas de acción del tipo si ... entonces ... que permiten generar la serie de acciones del sujeto.
- Inferencias (o razonamientos) que permiten “calcular” las reglas y las anticipaciones a partir de las informaciones y del sistema de invariantes operatorios de los que dispone el sujeto.

Para Vergnaud "el concepto de esquema es el concepto más importante de la psicología cognitiva si aceptamos que la psicología se debe interesar por teorizar sobre la acción y la actividad" (Vergnaud, 1998, p. 172).

Como ejemplos de esquemas perceptivos-gestuales en matemáticas están:

- contar un conjunto de objetos;
- dibujar la imagen simétrica de una figura plana poligonal sobre papel cuadriculado;
- dibujar la imagen simétrica de una figura plana sólo con regla y compás;
- dibujar un gráfico o un diagrama.

En la aplicación de estos esquemas se ponen en juego conceptos y teoremas matemáticos. Contar un conjunto de objetos implica al menos el concepto de correspondencia uno a uno y el concepto de número cardinal. Usar un juego de escuadras y compás implica al menos el concepto de ángulo recto y el teorema de que la simetría conserva los ángulos.

Vergnaud propone una noción de concepto a la que atribuye una naturaleza cognitiva, al incorporar en la misma los invariantes operatorios “sobre los que reposa la operacionalidad de los esquemas”.

Esta noción es distinta de lo que son los conceptos y teoremas en la ciencia, para los que no propone ninguna conceptualización.

La teoría APOS en educación matemática

El principio básico de la teoría APOS, acrónimo de los términos Acción, Proceso, Objeto y Esquema (Scheme), es que la comprensión de un individuo de un tópico matemático se desarrolla mediante la reflexión sobre problemas y sus soluciones en un contexto social y mediante la construcción de ciertas estructuras mentales organizadas en esquemas para usarlas en la resolución de nuevas situaciones. Las principales ideas fueron introducidas inicialmente en Dubinsky (1984), aunque el acrónimo APOS fue introducido en Cottrill et al. (1996).

Partiendo del concepto de abstracción reflexiva "se trata de elaborar un marco teórico que se pueda usar, en principio para describir cualquier concepto matemático junto con su adquisición " (Dubinsky, 1991, p. 97). La abstracción reflexiva se concibe como la construcción de objetos mentales y de acciones mentales sobre tales objetos. En el desarrollo del pensamiento lógico-matemático se distinguen cinco tipos de construcciones: interiorización, coordinación, encapsulación, generalización y reversión.

La noción de esquema se adopta e interpreta como una colección más o menos coherente de objetos y procesos. "La tendencia de un sujeto a invocar un esquema con el fin de comprender, tratar con, organizar o dar sentido a una situación problema dada es su conocimiento de un concepto matemático particular" (p. 103). Existen esquemas para situaciones que implican números, aritmética, funciones, proposiciones, cuantificadores, demostración por inducción, etc. Estos esquemas deben estar interrelacionados en una organización compleja más amplia. Uno de los fines pretendidos con la teoría general desarrollada es aislar pequeñas porciones de esta estructura compleja y dar descripciones explícitas de las posibles relaciones entre esquemas. Esta descripción de relaciones entre esquemas relativos a un concepto es la *descomposición genética* de dicho concepto. Se interpreta como una descripción de las construcciones mentales específicas que un estudiante pone en juego al desarrollar su comprensión del concepto matemático.

5.4. Conceptos y concepciones en educación matemática

Los términos 'concepto' y 'concepción' se utilizan con frecuencia en la investigación en didáctica de la matemática para describir las cogniciones de los sujetos, incluso también, para designar cogniciones de tipo institucional.

Sfard (1991) usa la palabra 'concepto' (a veces sustituida por "noción") para referirse a "una idea matemática en su forma 'oficial' - como un constructo teórico dentro "del universo formal del conocimiento ideal". Por el contrario, el término "concepción" designa "al aglomerado completo de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto - la contrapartida del concepto en el universo interno o subjetivo del conocimiento humano" (p. 3).

Tanto para los conceptos como para las concepciones Sfard propone distinguir dos tipos de facetas o descripciones: operacional y estructural, a las cuales atribuye una complementariedad mutua. El concepto puede verse como un objeto abstracto, con una cierta estructura descrita mediante definiciones estructurales; esto lleva a considerarlo como una cosa real -una estructura estática que existe en algún lugar del espacio y del tiempo. Esto supone reconocer la idea a primera vista y a manipularla como un todo, sin especificar los detalles. En contraste, interpretar una noción como un proceso implica considerarlo como una entidad más bien potencial, que adquiere existencia en cada circunstancia mediante una secuencia de acciones. Por ejemplo, la noción de función dada como un conjunto de pares ordenados responde a una descripción estructural, mientras que al proporcionar un proceso de cálculo de los valores imágenes a partir de los originales se tiene una descripción operacional.

Este carácter dual de los conceptos matemáticos se traslada también a las concepciones del sujeto sobre dichos objetos, identificándose una concepción operacional y otra estructural, ambas relacionadas de manera dialéctica y complementaria. "Un cierto grado de dominio en la realización de estos procesos, debería a veces ser visto como una base para la comprensión de los tales conceptos más bien que su resultado" (p. 10).

En este modelo cognitivo encontramos un cierto paralelismo y apoyo para el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática que proponemos (Godino, 2002; Godino, Batanero y Font, 2007): la distinción entre las facetas institucionales (ideas o conceptos matemáticos) y personal (concepciones), en ambos casos distinguiendo dos polos duales y complementarios (operacional y estructural).

La noción de concepción es el constructo usado con más frecuencia para el análisis cognitivo en didáctica de las matemáticas, como puede inferirse del estudio que hace Artigue (1990). No se distingue claramente en la bibliografía de otras nociones como representación (interna), modelo implícito, etc. Como describe Artigue (1990, p. 265), "trata de poner en evidencia la pluralidad de puntos de vista posibles sobre un objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que se le asocian, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de distintas clases de problemas".

En la descripción que hace Artigue se aprecian dos sentidos complementarios para el término concepción: el punto de vista epistémico (naturaleza compleja de los objetos matemáticos y de su funcionamiento, que viene a corresponder al concepto según lo describe Sfard) y el punto de vista cognitivo (los conocimientos del sujeto en relación a un objeto matemático particular). Así Artigue (1990) habla de, "un conjunto de concepciones es definido a priori con referencia a once definiciones distintas de círculo" (p. 268); y también se habla de "las concepciones del sujeto sobre el concepto de ... (círculo, tangente, límite, etc.)".

Sobre las concepciones del sujeto se discuten dos tipos de usos según los distintos autores:

a) La concepción como estado cognitivo global que tiene en cuenta la totalidad de la estructura cognitiva del sujeto en un momento dado con relación a un objeto. En este caso sería el análogo subjetivo del concepto, entendido como la tripleta de Vergnaud (situaciones, invariantes y significantes).
b) La concepción como un objeto local, estrechamente asociado al saber puesto en juego y a los diferentes problemas en cuya resolución intervienen.

Imagen y definición conceptual

Dentro de la línea de investigación en educación matemática conocida como "pensamiento matemático avanzado", Tall y Vinner (1981) introdujeron los constructos "imagen conceptual" (concept image) y "definición conceptual" (concept definition), para describir el estado de los conocimientos del sujeto individual en relación a un concepto matemático.

Se trata de entidades mentales que se introducen para distinguir los conceptos matemáticos formalmente definidos y los procesos cognitivos por medio de los cuales se conciben. Se considera que durante los procesos mentales de recuerdo y manipulación de un concepto se ponen en juego muchos procesos asociados, de manera consciente o inconsciente, que afectan a su significado y uso. Con la expresión "imagen conceptual se describe la estructura cognitiva total asociada a un concepto, que incluye las imágenes mentales y las propiedades y procesos asociados" (p. 152). Se construye a lo largo de los años por medio de las experiencias de todo tipo y cambia a medida que el individuo encuentra nuevos estímulos y a medida que madura.

Se reconoce que la imagen conceptual de un sujeto sobre un concepto no tiene por qué ser coherente todo el tiempo a medida que se desarrolla ni estar de acuerdo plenamente con el concepto formal matemático. En una situación particular en la que se pone en juego un concepto matemático el sujeto activa solo una porción de su imagen conceptual: es la imagen conceptual evocada. En momentos diferentes, o incluso simultáneamente, distintas imágenes conceptuales parciales pueden no ser coherentes y entrar en conflicto.

Tall y Vinner se esfuerzan por describir la "imagen conceptual" como una entidad mental, pero no elaboran una descripción aceptable del concepto matemático (formal) entendido como objeto institucional o cultural. De los conceptos se tienen en cuenta casi exclusivamente su definición: "una configuración de palabras usadas para especificar el concepto" (p. 152). Se considera que mediante la definición el concepto queda "encapsulado" como una entidad unitaria.

Esta definición puede ser aprendida por un individuo de manera memorística o de un modo más significativo y relacionada en mayor o menor grado con el concepto como un todo. En un momento dado el sujeto puede expresar con sus propias palabras la definición de un concepto, lo que es interpretado como la encapsulación lingüística de su imagen conceptual. Esta definición personal del concepto puede diferir de la definición conceptual formal, esto es, la definición del concepto aceptada por la comunidad matemática en su conjunto.

Estas herramientas teóricas son usadas por Tall y Vinner para analizar las imágenes conceptuales y las definiciones conceptuales de estudiantes de último curso de secundaria sobre los conceptos de límite de sucesiones, límite de una función en un punto y la continuidad de funciones. El estudio se centra en la identificación de factores conflictivos potenciales entre distintos componentes de las imágenes y definiciones conceptuales, contrastadas con las definiciones formales de los conceptos matemáticos.

Los conceptos y campos conceptuales en G. Vergnaud

La noción de concepto

Vergnaud (1982), presenta una noción de concepto matemático que puede ser interpretada en términos semánticos. Este autor define un concepto como una tripleta (S, I, z) en la cual cada símbolo representa lo siguiente:

> S: conjunto de situaciones que hacen significativo el concepto;
>
> I: conjunto de invariantes que constituyen el concepto;
>
> z: conjunto de representaciones simbólicas usadas para presentar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere (pág. 36).

En el trabajo de 1990, Vergnaud describe a S como la referencia (del concepto); I el significado ("el conjunto de invariantes sobre los cuales reposa la operacionalidad de los esquemas"); z, el significante (conjunto de formas lingüísticas y no lingüísticas que permiten representar simbólicamente el concepto, sus propiedades, las situaciones y los procedimientos de tratamiento.

La noción de campo conceptual

La primera descripción que hace Vergnaud (1990) de un campo conceptual es la de "conjunto de situaciones". Pero a continuación aclara que junto a las situaciones se deben considerar también los conceptos y teoremas que se ponen en juego en la solución de tales situaciones. "En efecto, si la primera entrada de un campo conceptual es la de las situaciones, se puede también identificar una segunda entrada, la de los conceptos y los teoremas." (p. 147). El campo conceptual de las estructuras aditivas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias adiciones o sustracciones, y el conjunto de conceptos y teoremas que permiten analizar estas situaciones como tareas matemáticas.

En esta descripción del campo conceptual no se mencionan elementos de tipo subjetivo por lo que considero que al campo conceptual se le atribuye una naturaleza de tipo epistémica. Los conceptos y teoremas que intervienen aquí se califican de “matemáticos”, nociones que no son teorizadas; la noción de concepto matemático, no parece ser la misma que la noción cognitiva de concepto que acaba de definir como una tripleta heterogénea de conjuntos formados por situaciones, invariantes y significantes.

6. COMPONENTES ONTOLÓGICOS Y SEMIÓTICOS DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Godino y Batanero (1994) comenzaron a sentar las bases de un modelo ontológico, epistemológico y cognitivo relativo al conocimiento matemático sobre bases antropológicas y semióticas. Con un estilo que recuerda los trabajos de fundamentación axiomática de las matemáticas, estos autores comenzaron definiendo las nociones primitivas de práctica matemática, institución, prácticas institucionales y personales, objeto institucional y personal, significado de un objeto institucional y personal, conocimiento y comprensión del objeto. Estas nociones fueron complementadas en trabajos posteriores (Godino, 2002; Godino et al., 2007; Font, Godino y Gallardo, 2013) con una tipología de objetos y procesos matemáticos, así como con una interpretación de la noción de función semiótica que permite elaborar nociones operativas de conocimiento, significado, comprensión y competencia (Figura 1).

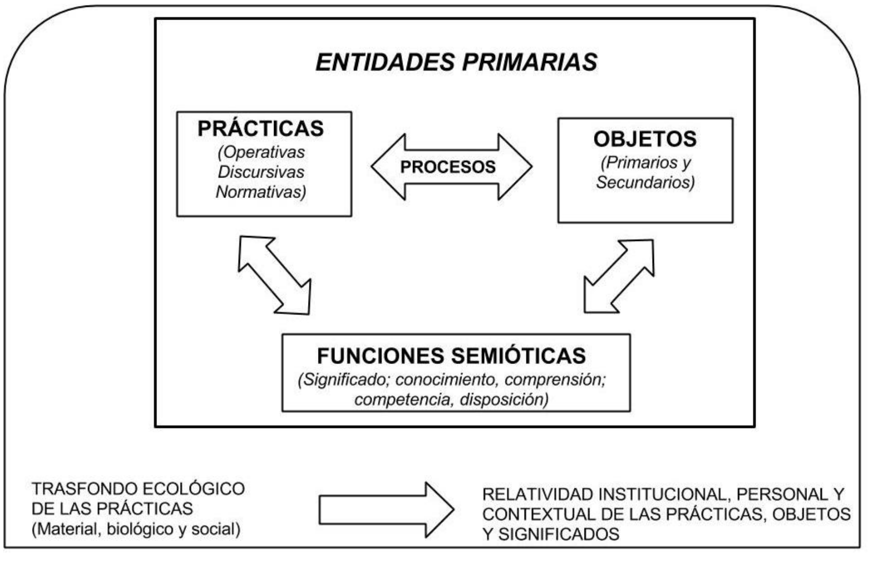


Figura 1. Entidades primarias de la ontosemiótica (Godino, 2014, p. 9)

En la Figura 1 se destacan como elementos claves de la modelización semiótica y antropológica del conocimiento matemático que propone el EOS las nociones de práctica, objeto, proceso (secuencia de prácticas de las que emerge el objeto) y función semiótica (noción mediante la cual se relacionan las diversas entidades).

La aproximación antropológica se concreta en la noción de *práctica matemática* entendida como "toda actuación o expresión (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguien para resolver problemas matemáticos, comunicar a otros la solución obtenida, validarla o generalizarla a otros contextos y problemas" (Godino y Batanero, 1994, p. 334). Las prácticas pueden ser idiosincrásicas de una persona o compartidas en el seno de una institución, entendida ésta como la comunidad de personas involucradas en una misma clase de situaciones problemáticas. El compromiso mutuo con la misma problemática conlleva la realización de unas prácticas sociales que suelen tener rasgos particulares, y son generalmente condicionadas por los instrumentos disponibles en la misma, sus reglas y modos de funcionamiento.

En la filosofía de las matemáticas el término objeto matemático refiere usualmente a los objetos abstractos tales como clases, proposiciones o relaciones. En la ontología que propone el EOS, en consonancia con el interaccionismo simbólico (Blumer, 1969; Cobb y Bauersfeld, 1995), se usa la palabra objeto en un sentido amplio para significar cualquier entidad que interviene de algún modo en la práctica o actividad matemática y que puede ser separado o individualizado. En la práctica matemática intervienen conceptos, proposiciones, argumentos, procedimientos, pero también lenguajes (símbolos, palabras, diagramas, etc.) y situaciones-problemas, por lo que tales entidades se consideran como objetos matemáticos.

La generalidad con la que se concibe la noción de objeto puede ser de poca utilidad para analizar los fenómenos cognitivos, semióticos y epistemológicos que nos interesan. Ésta es la razón por la cual se hace un esfuerzo por elaborar un sistema detallado de categorías de objetos, teniendo en cuenta su diversa naturaleza y la función que desempeñan. La noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos (Figura 2), en su interpretación epistémica (institucional) y cognitiva (personal) se propone como herramienta teórica clave para el análisis de la actividad matemática.

La noción de función semiótica se entiende como la correspondencia entre un objeto antecedente (expresión, significante) y otro consecuente (contenido, significado) establecida por un sujeto (persona o institución) según un criterio o regla de correspondencia. Esta noción se puede ver como una interpretación del signo Peirceano, el cual está formado por la triada: *representamen*, o signo en sí mismo, objeto e interpretante. “Una representación es aquel carácter de una cosa en virtud de la cual, para la producción de un cierto efecto mental, se puede poner en lugar de otra cosa. La cosa que tiene ese carácter la llamo un representamen, el efecto mental, o pensamiento, su interpretante, la cosa en cuyo lugar se pone, su objeto” (Peirce, CP 1.564).

En nuestro caso, el interpretante se concibe como la regla (hábito, norma) de correspondencia entre el representamen y el objeto, establecida por una persona, o en el seno de una institución, en el correspondiente acto interpretativo (significados personales o institucionales). Además, toda entidad que participa en un proceso de semiosis, interpretación, o juego de lenguaje, es objeto, pudiendo desempeñar el papel de significante, significado o interpretante. Los propios sistemas de prácticas operativas y discursivas son objetos y pueden ser componentes de la función semiótica. De este modo se modeliza cualquier uso que se pueda dar a la palabra significado.

Como se describe en Font y Rubio (2017, p.2), un proceso en el marco del EOS es una “secuencia de acciones que es activada o desarrollada, durante un cierto tiempo, para conseguir un objetivo, generalmente una respuesta (salida) ante la propuesta de una tarea matemática (entrada)”. Se considera conveniente distinguir entre procesos más complejos (megaprocesos, como resolución de problemas y modelización) y procesos más básicos. La emergencia de los objetos de una configuración ontosemiótica (lenguajes, problemas, conceptos/definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos) tiene lugar mediante los respectivos procesos matemáticos de comunicación, problematización, definición, enunciación, elaboración de procedimientos (algoritmización, rutinización, ...) y argumentación. Por otra parte, las dualidades o polaridades desde las cuales se pueden considerar los objetos primarios dan lugar a los siguientes procesos cognitivos/ epistémicos: institucionalización – personalización; generalización – particularización; análisis/descomposición – síntesis/reificación; materialización /concreción – idealización/ abstracción; expresión/representación – significación.

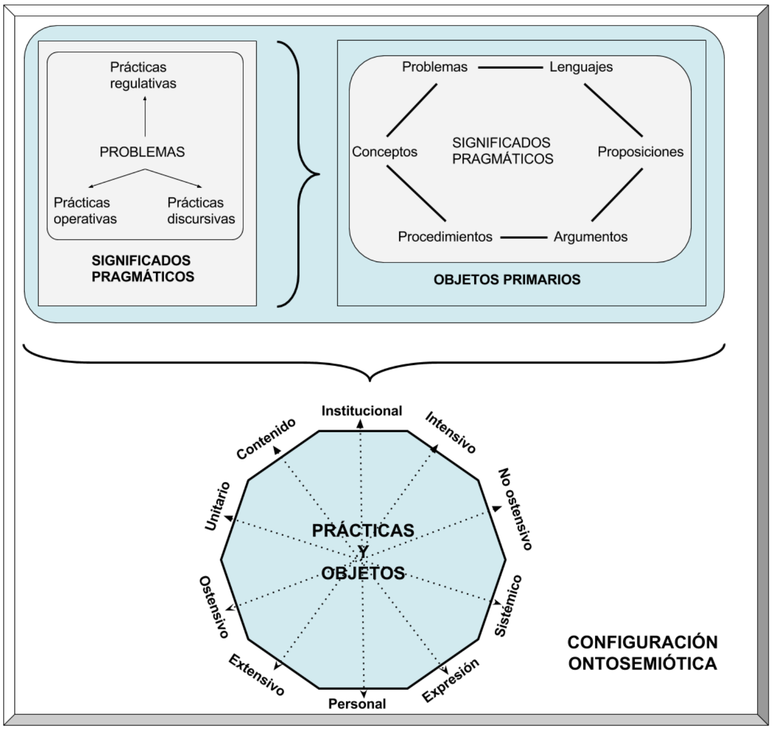


Figura 2. Significados pragmáticos y configuración ontosemiótica (Godino, Beltrán-Pellicer, Burgos y Giacomone, 2017, p. 4).

En el EOS se ha enfatizado una manera de entender el *concepto* como una de las seis “entidades primarias” que forman la configuración ontosemiótica. Se trata del tipo de entidad u objeto que interviene en las prácticas matemáticas cuyo uso se fija mediante una definición. Se distinguen de las proposiciones ya que éstas son enunciados que pueden ser verdaderos o falsos y, por tanto, requieren una justificación. Se resalta que se trata de entidades funcionales, en el sentido de que se diferencian por el rol o papel que desempeñan en la actividad matemática realizada en un determinado momento o circunstancia. Según esto, lo que en un determinado *juego de lenguaje* se considera como concepto-definición en otro se puede considerar como proposición, y requerir por tanto una justificación.

Otra mirada o interpretación sobre el uso de la palabra ‘concepto’ es la perspectiva sistémica, diferente del uso anterior que es una perspectiva unitaria. Cuando en el EOS se afirma que el significado de un objeto matemático (por ejemplo, el concepto de media aritmética), es “el sistema de prácticas que realiza una persona (significado personal), o compartidas en el seno de una institución (significado institucional) para resolver un tipo de situaciones-problemas en los cuales se requiere encontrar un representante de un conjunto de datos” (Godino y Batanero, 1994), se está usando el término concepto desde una perspectiva sistémica, más concretamente, pragmática.

En la Teoría de los Campos Conceptuales de G. Vergnaud se define un concepto como una tripleta (Situaciones, Representaciones, Invariantes operatorios), y por tanto, se usa concepto desde la perspectiva sistémica. En el caso del EOS, se está proponiendo interpretar el concepto-sistema en términos de *configuración* de prácticas, objetos y procesos, lo cual, sin duda, es algo más complejo que la tripleta de Vergnaud, o la cuaterna (tarea, técnica, tecnología, teoría) de la Teoría Antropológica (Chevallard, 1992; 1999), pero se considera que la configuración ontosemiótica es una herramienta más potente para el análisis de la actividad matemática. En realidad todo el esfuerzo de elaboración teórica del EOS, en las facetas epistemológica y cognitiva, es un intento de clarificar y regular el uso del término concepto en su interpretación sistémica.

En el EOS, se asume que las prácticas matemáticas se realizan en un trasfondo ecológico (material, biológico y social) que determina una relatividad institucional, personal y contextual de las prácticas, los objetos y significados, esto es, relatividad respecto de los *juegos de lenguaje* y *formas de vida*

(Wittgenstein, 1953). En consecuencia, un objetivo del análisis didáctico-matemático debe ser caracterizar los diversos significados de los objetos y sus interrelaciones, construyendo de esa manera un significado global que sirva de referencia para el análisis de los procesos de estudio matemáticos. Este sería un primer nivel de análisis ontosemiótico de la actividad matemática mediante el cual se toma conciencia de la pluralidad y relatividad de los significados de los objetos matemáticos. En este primer nivel se trata de identificar, clasificar y describir los tipos de situaciones problemas en los que el objeto en cuestión interviene, así como las prácticas matemáticas (operativas, discursivas y normativas) mediante las cuales se da respuesta a dichos problemas. De esta manera, se pasa del objeto matemático, que en un principio viene a ser una 'caja negra', una etiqueta que refiere a una entidad mental, ideal o abstracta, a las prácticas implicadas en el uso de tal objeto. Esto viene a ser una interpretación creativa de la máxima pragmática de Peirce.

Una vez identificado un significado para un objeto matemático, se tiene un tipo de situación problema, que se puede concretar en un ejemplar prototípico y la secuencia de prácticas necesarias para resolverlo. La identificación de la trama de objetos interrelacionados que interviene en dichas prácticas es necesaria para gestionar los procesos de estudio matemáticos y tomar conciencia de la complejidad ontosemiótica de la actividad matemática como un factor explicativo de las dificultades de aprendizaje en dichos procesos. La noción de configuración ontosemiótica de prácticas, objetos y procesos guía este segundo nivel de análisis didáctico-matemático en el marco del EOS.

En Godino, Wihelmi, Blanco, Contreras y Giacomone (2016) se realiza un estudio de las concordancias y complementariedades entre la Teoría de los Registros de Representación semiótica y el EOS. En particular, se aborda las cuestiones, ¿Por qué son necesarias las representaciones semióticas en la actividad matemática? ¿Qué relación existe entre el objeto matemático y sus diversas representaciones? La adopción en el EOS del postulado antropológico para los objetos no ostensivos (conceptos, proposiciones, procedimientos) permite afrontar esas cuestiones. Los objetos matemáticos son reglas gramaticales (en el sentido de Wittgenstein) de los lenguajes que usamos para describir nuestros mundos, por lo que el uso de tales lenguajes (representaciones semióticas) es imprescindible. No puede haber gramática sin lenguaje. Aún más, las reglas gramaticales no se deben confundir con el enunciado lingüístico de las mismas. Por otra parte, la noción de función semiótica amplia la noción de representación (Godino & Font, 2010). La semiótica pragmatista/antropológica asumida por el EOS propone que los objetos que se ponen en correspondencia en las funciones semióticas (funtivos) no son solamente objetos lingüísticos ostensivos (palabras, símbolos, expresiones, diagramas), sino que los conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos, incluso las situaciones pueden ser también antecedentes de las funciones semióticas. Los funtivos también pueden ser entidades unitarias o sistémicas, particulares o generales, materiales o inmateriales, personales o institucionales.

Remitimos al lector a las referencias citadas para profundizar en las nociones de práctica, objeto, proceso y función semiótica, y a las investigaciones en las cuales se han aplicado como herramientas para el análisis didáctico. Estas publicaciones están disponibles en el sitio web, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es

7. REFLEXIONES FINALES

La construcción de un sistema teórico modular e inclusivo para la educación matemática que pretende el EOS requiere asumir una visión ampliada de las matemáticas que articule de manera coherente las dimensiones semiótica, antropológica y cognitiva implicadas en los procesos de enseñanza y aprendizaje. En consecuencia se considera que,

a) Las matemáticas constituyen un quehacer humano, producido como respuesta a cierta clase de situaciones problemáticas del mundo real, social o de la propia matemática. Como respuesta o solución a estos problemas externos e internos, los objetos matemáticos (conceptos, procedimientos, teorías, etc., emergen y evolucionan progresivamente. Las acciones de las personas deben ser consideradas, por tanto, como la fuente genética de las conceptualizaciones matemáticas.

b) Los problemas matemáticos y sus soluciones son compartidos en el seno de instituciones o colectivos específicos implicados en el estudio de ciertas clases problemas. En algunos casos estas instituciones pueden ser extra-matemáticas e incluso un problema particular surge inicialmente en una institución extra-matemática, aunque posteriormente la comunidad matemática se interesa por su solución y la aplica a otros problemas o contexto. En consecuencia, los objetos matemáticos son entidades culturales socialmente compartidas.

c) Las matemáticas crean un lenguaje simbólico en el que se expresan las situaciones problemas y sus soluciones. Los sistemas de símbolos, dados por la cultura, no sólo tienen una función comunicativa, sino un papel instrumental, que modifican al propio sujeto que los utiliza como mediadores.

d) La actividad matemática se propone, entre otros fines, la construcción de un sistema conceptual lógicamente organizado. Por ello, cuando añadimos un nuevo conocimiento a la estructura ya existente, no sólo se aumenta dicha estructura, sino que el conjunto de relaciones existentes queda modificado.

Cuando un objeto matemático ha sido aceptado como parte del sistema en una institución (matemática o extra-matemática), o por una persona, puede considerarse como una realidad textual/gramatical y un componente de la estructura global. Puede ser manipulado como un todo para crear nuevos objetos matemáticos, ampliando el rango de herramientas matemáticas. Pero al mismo tiempo, introduce nuevas restricciones al lenguaje y el trabajo matemáticos.

En el conocimiento matemático es necesario distinguir, en consecuencia, dos dimensiones interdependientes: personal (subjetiva o mental) e institucional (objetiva, contextual). Dado que los sujetos se desarrollan y viven en el seno de diversas instituciones, su conocimiento estará mediatizado por las particularidades del conocimiento contextual correspondiente. Es importante reconocer que las matemáticas, como realidad cultural (Wilder, 1981), adoptan distintas "formas de estar" y de funcionar según los grupos humanos que las cultivan. Esto aconseja concebir los objetos y su significado con un carácter esencialmente relativista, lo cual permitirá apreciar mejor las adaptaciones e influencias mutuas que sufren los objetos matemáticos al ser transmitidos entre personas e instituciones. No obstante, ello no implica que dejemos de reconocer el papel dominante y de control de la organización formal, lógico-deductiva, adoptada por las matemáticas en la institución *productora del saber*, debido, entre otros motivos, a su *eficacia* en el planteamiento y resolución de nuevos problemas.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10* (2,3), 241-286.

Balacheff, N. (1990). Towards a "problématique" for research on mathematics teaching. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, (4), 259-272.

Baker G. P. y Hacker P. M. S. (1985). *Wittgenstein. Rules, grammar and necessity. An analytical commentary on the Philosophical Investigations.* Glasgow: Basil Blackwell.

Bloor, D. (1983). *Wittgenstein. A social theory of knowledge*. London: The Macmillan Press.

Blumer, H. (1969). *Symbolic interactionism: Perspective and method*. Englewood Cliffs, NJ.: Prentice-Hall. [El interaccionismo simbólico: Perspectiva y método. Barcelona: Hora, 1982].

Bruner, J. (1990). *Actos de significado. Más allá de la revolución cognitiva.* Madrid, Alianza. Col. Psicología Minor, 1991.

Brousseau, G. (1980). Address of members of the G.R.D.M. (France) at the ICME IV. August 1980. *Recherches en Didactique des Mathematiques, 1*, 10-15.

Brousseau, G. (1986). Fondements et méthodes de la didactiques des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *7* (2), 33-115.
Burch, R. (2010). Charles Sanders Peirce. *Stanford Encyclopedia of Philosophy.* http://plato.stanford.edu/entries/peirce/
Campos, D. G. (2010). Peirce's Philosophy of Mathematical Education: Fostering Reasoning Abilities for Mathematical Inquiry. *Studies in Philosophy and Education*, *29*, *5*, 421-439. DOI: 10.1007/s11217-010-9188-5.
Cañón, C. (1993). *La Matemática: Creación o Descubrimiento*. Madrid: Universidad Pontificia de Comillas.
Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approache anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *12* (1), 73-112.
Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 19* (2), 221-266.
Cobb, P. y Bauersfeld, H. (Eds.) (1995). *The emergence of mathematical meaning: Interaction in classroom cultures*. Hillsdale,N.Y.: Lawrence Erlbaum A. P.
Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: beginning with a coordinated process schema. *Journal of Mathematical Behaviour*, *15* (2),167–192.
Dubinsky, E. (1984). The cognitive effect of computer experiences on learning abstract mathematical concepts. *Korkeak Atk-Uutiset*, *2*,41–47.
Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer, A. P.
Dummett, M.A.E. (1991). *¿Qué es una teoría del significado?* En, L.M. Valdés (Ed.), La búsqueda del significado. Madrid: Tecnos. [original en inglés publicado en 1975]
Duval, R. (1995). *Sémiosis et penseé humaine*. Berna: Peter Lang.
Eco, U. (1991). *Tratado de semiótica general*. Barcelona, Lumen, 1979).
English, L. (Ed.) (1997). *Mathematical reasoning: analogies, metaphors, and images*. L. Erlbaum Associates.
Ernest, P. (1991). *The philosophy of mathematics education*. London: Falmer Press.
Font, V. (2000). Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, *14*, 1-35. [http://www.ex.ac.uk/~PErnest/pome14/contents.htm].
Font, V., Godino, J. D. y Gallardo, J. (2013). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, *82*, 97–124
Font, V., Godino, J. D., Planas, N., Acevedo, J. I. (2010). The object metaphor and sinecdoque in mathematics classroom discourse. *For the Learning of Mathematics, 30*(1), 15-19.
Font, V. y Rubio, N. V. (2017). Procesos matemáticos en el enfoque ontosemiótico. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos.* Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *22* (2/3), 237-284.
Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la educación matemática. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M.M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html
Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques,14* (3), 325-355.
Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *39* (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Beltrán-Pellicer, P., Burgos, M. y Giacomone, B. (2017). Significados pragmáticos y configuraciones ontosemióticas en el estudio de la proporcionalidad. En J. M. Contreras, P. Arteaga, G. R. Cañadas, M. M. Gea, B. Giacomone y M. M. López-Martín (Eds.), Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos. Disponible en, http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.html

Godino, J. D., Font, V. (2010). The theory of representations as viewed from the onto-semiotic approach to mathematics education. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education, 9*(1), 189-210.

Godino, J. D., Wihelmi, M. R., Blanco, T. F., Contreras, A. y Giacomone, B. (2016). Análisis de la actividad matemática mediante dos herramientas teóricas: Registros de representación semiótica y configuración ontosemiótica. *AIEM. Avances de Investigación en Educación Matemática, 10*, 91-110.

Goldin, G. (1998). Representations and the psychology of mathematics education: part II. *Journal of Mathematical Behaviour, 17* (2), 135-165.

Goldin, G. y Stheingold, (2001). System of representations and the development of mathematical concepts. En A. Cuoco y F. R. Curcio (Eds.), *The roles of representation in school mathematics* (pp. 1-23).Yearbook 2001. Reston, VA: NCTM.

Hjemslev, L. (1943). *Prolegómenos a una teoría del lenguaje*. Madrid: Gredos, 1971.

Kutschera, F. von (1971). *Filosofía del lenguaje.* Madrid: Gredos. [Sprachphilosphie. Vilhem Fink Verlag, München, 1979]

Lakoff, G. y Núñez, R. E. (2000). *Were mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York: Basic Books.

Linnebo, O. (2009). Platonism in the philosophy of mathematics. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*. http://plato.stanford.edu/entries/platonism-mathematics/

Marrades, J. (2014). Sobre la noción de 'forma de vida' en Wittgenstein. *Agora,* 33 (1), 139-152.

McDonough, R. (1989). Towards a non-mechanistic theory of meaning. *Mind,* 98, 1-21.

Ogden, C.K. y Richards, I.A. (1923). *El significado del significado*. Barcelona, Paidos, 1984.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, 61*, (1-2), 11-38.

Peirce, C. S. (1931-58). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, 8 vols., C. Hartshorne, P. Weiss y A. W. Burks (eds.). Cambridge: Harvard University Press.

Pimm, D. (1995). *Symbols and meanings in school mathematics.* London: Routledge.

Pozo, J. I. (1989). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. Madrid, Morata.

Presmeg, N. (2014). Semiotic in mathematics education. En S. Lerman (Ed.), *Encyclopedia of Mathematics Education*. (pp. 538-542). Springer.

Radford, L. (2006). Introducción. Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Matemática Educativa*, Número especial, pp. 7-22.

Sáenz-Ludlow, A. y Kadunz, G. (2016). *Semiotics as a tool for learning mathematics. How to describe the construction, visualisation, and communication of mathematical concepts.* Rotterdam: Sense Publishers.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, *22* (1), 1-36.

Sfard, A. (2000). Symbolizing mathematical reality into being -or how mathematical discourse and mathematical objects create each other. En, P. Coob, E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating in mathematics classrooms* (pp.38-75). London: Lawrence Erlbaum.

Sierpinska, A. (1990), Some remarks on understanding in mathematics. *For the Learning of Mathematics, 10,* 3, p. 24-36.

Sierpinska, A. y Lerman, S. (1996). Epistemologies of mathematics and of mathematics education. En A. J. Bishop et al. (Eds.), *International Handbook of Mathematics Education* (pp. 827-876). Dordrecht: Kluwer.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics, with particular

reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12* (2), 151-169.
Ullmann, S. (1962). *Semántica. Introducción a la ciencia del significado.* Madrid: Aguilar, 1978.
Van Dormolen, J. (1991). Metaphors mediating the teaching and understanding of mathematics. En *Mathematical knowledge: Its growth through teaching* (pp. 87-106). Springer Netherlands.
Vergnaud, G. (1982). Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. *For the Learning of Mathematics, 3* (2), 31-41.
Vergnaud, G. (1990), La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, *10* (2,3), 133-170.
Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal for Mathematical Behaviour*, *17* (2), 167-181.
Weinberg, D. and Gavelek, J. (1987) A Social Constructivist Theory of Instruction and the Development of Mathematical Cognition, *Proceedings of PME 11*, Montreal, 3, 346-352.
Wittgenstein, L. (1953). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Crítica.
Wittgenstein, L. (1976). *Observaciones sobre los fundamentos de las matemáticas*. Madrid: Alianza.