CONFIGURACIONES EPISTÉMICAS ASOCIADAS A LA NOCIÓN DE IGUALDAD DE NÚMEROS REALES

Miguel R. Wilhelmi[*], Juan D. Godino[**], Eduardo Lacasta[***]

RÉSUMÉ

Les objets émergents des systèmes de pratiques mathématiques dans les différents contextes d'utilisation sont structurés par des *configurations épistémiques*. La détermination et la description des configurations épistémiques, associées à la notion d'égalité des nombres réels, nous permet d'introduire la notion d'*holo-signifié* d'une notion mathématique. La notion d'holo-signifié est constituée par l'interaction des différents modèles mathématiques associés à cette notion. Les notions d'holo-signifié et de modèle constituent un cadre pour la sélection des signifiés curriculaires à enseigner et pour la recherche de situations fondamentales dans un projet global d'enseignement.

ABSTRACT

The emergent objects of the systems of mathematical practices in the various contexts of use are structured into *epistemic networks*. The determination and description of the epistemic networks associated with the concept of the equality of real numbers serve to establish the idea of *comprehensive meaning* constituted by the interaction of different mathematical models associated with a mathematical concept. The concepts of model and *comprehensive meaning* constitute a framework for selecting the curricular meanings we try to teach and for seeking fundamental situations within a global educational project.

* Universidad Pública de Navarra, Pamplona (España). miguelr.wilhelmi@unavarra.es

** Universidad de Granada, Granada (España). jgodino@ugr.es

*** Universidad Pública de Navarra, Pamplona (España). elacasta@unavarra.es

Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 27, n° 1, pp. 77-120, 2007

RESUMEN

Los objetos emergentes de los sistemas de prácticas matemáticas en los distintos contextos de uso se estructuran formando *configuraciones epistémicas*. La determinación y la descripción de las configuraciones epistémicas asociadas a la noción de igualdad de números reales nos permite introducir la noción de *holo-significado* de una noción matemática, constituido por la interacción de distintos *modelos* matemáticos asociados a dicha noción. Las nociones de holo-significado y de modelo constituyen un marco para la selección de los significados curriculares que se pretenden enseñar y para la búsqueda de situaciones fundamentales dentro de un proyecto global de enseñanza.

Palabras-clave: Definición, modelo, significado, sistema de prácticas, currículo, praxeología, situación fundamental.

I. MOTIVACIÓN TEÓRICA Y PLAN GENERAL

En la actualidad, uno de los grandes problemas que enfrenta la didáctica, si no el principal, es el análisis de los procesos de construcción y comunicación de conocimientos matemáticos por los sujetos y por las instituciones, de hecho, de forma genérica la didáctica representa « una teoría fundamental de la comunicación de conocimientos matemáticos » (Brousseau, 1998, p.358). Este objetivo precisa de la discriminación y descripción de las nociones, procesos y significados matemáticos que han de ser enseñados. En particular, es necesario determinar los significados asociados a los objetos matemáticos en los diferentes contextos de uso en las instituciones escolares y organizarlos como un todo complejo y coherente.

Godino y Batanero (1994) introducen la noción de « sistema de prácticas operativas y discursivas asociadas al campo de problemas en el que se pone en juego un objeto matemático » como el foco de atención primario para describir el significado institucional y personal de dichos objetos matemáticos. En este trabajo estamos especialmente interesados en determinar y describir la relación entre los sistemas de prácticas, los objetos emergentes de tales sistemas y las relaciones que se establecen entre estos objetos (las cuales deben ser tenidas en cuenta en el análisis del significado de las nociones matemáticas).

Godino (2002) identifica el « sistema de prácticas » con el contenido que una institución asigna a un objeto matemático, estableciendo, por lo tanto, una correspondencia entre el sistema de prácticas (significado sistémico) y la expresión del objeto matemático. En dicho trabajo, la descripción del significado de referencia de un objeto se presenta como un listado de objetos clasificados en seis categorías: problemas, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentos.

Consideramos que estas descripciones del sistema de prácticas son insuficientes por varios motivos. En primer lugar, las categorías enunciadas son objetos emergentes del sistema de prácticas en que se pone en juego el objeto matemático y, por lo tanto, son estos objetos los que constituyen el referente explicitable del significado institucional.

> « El significado comienza siendo pragmático, relativo al contexto, pero existen tipos de usos que permiten orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje matemáticos. Estos tipos de usos son objetivados mediante el lenguaje y constituyen los referentes del léxico institucional. » (Godino, 2003, p. 38).

En segundo lugar, tanto los sistemas de prácticas como los objetos emergentes están relacionados entre sí constituyendo redes o configuraciones epistémicas; la descripción de tales redes debe ser un objetivo del análisis epistemológico de una noción matemática desde la perspectiva de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. En tercer lugar, un proyecto global de enseñanza puede ser dividido en subsistemas de prácticas ligados a tipos específicos de problemas; para elaborar currículos y construir proyectos de enseñanza, es necesario identificar y describir estos subsistemas de prácticas y los objetos emergentes de tal actividad.

A partir de estas consideraciones nos preguntamos:

- ¿Es posible estructurar en un complejo coherente distintas definiciones de una noción matemática emergentes de diferentes subsistemas de prácticas en contextos de uso determinados?
- ¿Qué significa comprender una noción matemática?
- ¿La descripción del significado de una noción como « totalidad » tiene consecuencias sobre la elaboración del currículo y, en particular, permite analizar las aplicaciones de las propuestas educativas con relación a dicha noción?

Para responder estas preguntas, centrando el discurso en la noción de igualdad[1], introducimos las nociones de *modelo* y de *holo-significado* de una noción matemática. Brevemente, un *modelo* de una noción matemática representa el complejo estructurado de un sistema de prácticas en un *contexto de uso*[2] determinado y de los emergentes de dichos sistemas (incluidas las definiciones); el *holo-significado* de una noción matemática representa la expresión de los diversos modelos asociados a la dicha noción (entendidos como un sistema único). Asimismo, las nociones de holo-significado y de modelo nos permitirán analizar la noción de *praxeología* de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) (Chevallard, 1997) con relación a la práctica matemática y enmarcar la

1. En este texto, el término igualdad será utilizado como sinónimo de « igualdad de números reales ».

2. En una primera aproximación, los contextos de uso pueden ser identificados con la noción de *marco* introducida por Douady (1986, p. 10). Esta aproximación, sin embargo, no aborda la caracterización de un marco según el tipo de objetos (nociones, procesos y significados) genuinamente representativos de dicho marco. Esta caracterización requiere considerar una institución de referencia, puesto que, por ejemplo, no es posible asociar los mismos problemas, nociones, propiedades, argumentaciones, acciones y lenguaje al « álgebra elemental en la institución escolar » que al « álgebra formal en la institución universitaria ». De esta forma, en una segunda aproximación, los contextos de uso pueden ser considerados como *marcos de organización de las nociones y proposiciones matemáticas que determinan el tipo de argumentaciones, acciones y lenguaje que es admisible y pertinente movilizar en una determinada institución a propósito de un tipo de problemas*.

búsqueda de *situaciones fundamentales* (Brousseau, 1998) en un proyecto global de enseñanza; en concreto, mostraremos la conveniencia de que una situación fundamental incluya una muestra representativa de los modelos que componen el holo-significado (aunque con frecuencia tal representatividad tendrá que restringirse a algunos modelos asociados a la noción matemática que se desea introducir o desarrollar).

Con relación a la noción de igualdad, el objetivo de este trabajo es mostrar cómo los diferentes contextos de uso delimitan significados específicos, que se sintetizan en distintas definiciones de la noción de igualdad, no siendo posible privilegiar ninguna de ellas. De esta manera, en la sección II introducimos las distintas definiciones de la noción de igualdad; asimismo, apoyándonos en la demostración de la proposición $\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$, indicamos cómo estas definiciones condicionan las prácticas matemáticas en los diferentes contextos de uso[3]. En la sección III, después de comparar la modelización de la actividad matemática en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (mediante la noción de « praxeología ») y en el Enfoque Ontológico y Semiótico (mediante la noción de « sistema de prácticas operativas y discursivas »), describimos de forma somera las entidades primarias y el tipo de lenguaje asociados a la noción de igualdad en distintos contextos de uso.

En la sección IV explicitamos una estructuración de los modelos y significados asociados a la noción de igualdad. En la sección V se introduce la noción de holo-significado y se describe el holo-significado de la noción de igualdad; a continuación, se analizan algunas implicaciones curriculares de la noción genérica de holo-significado (sección VI). Por último, en la sección VII se resaltan algunas implicaciones *macro-didácticas* (referidas a la evolución de las cuestiones fundamentales sobre el estado institucional, social y cultural de los objetos matemá-

---

3. Las definiciones y proposiciones matemáticas son la parte más visible de la realidad antropológica y cultural de las matemáticas (aquella que es susceptible de ser explícitamente reconstruida y comunicada). Las definiciones matemáticas son una parte de los sistemas de prácticas matemáticas, un componente discursivo de dichas prácticas, que desde un punto de vista ontogénico son dependientes y « posteriores » a las prácticas operatorias. Las definiciones interactúan de manera compleja y recursiva con los problemas, las proposiciones previamente establecidas, el tipo de argumentaciones y lenguaje regulativos de la acción operatoria y del discurso (con relación a una determinada noción matemática). Esta interacción da lugar a nuevas cuestiones y nuevos sistemas de prácticas; en este sentido, podemos afirmar que « las definiciones condicionan las prácticas matemáticas en los diferentes contextos de uso ».

ticos), *microdidácticas* (donde prevalece la singularidad de los objetos matemáticos y la individualidad de los sujetos agentes) y *teóricas* (relación de las herramientas introducidas con nociones didácticas aceptadas dentro de la comunidad científica).

II. DEFINICIONES DE LA NOCIÓN DE IGUALDAD

Desde un punto de vista estrictamente *formal* y *oficial* (Brown, 1998) se acepta que la definición de un objeto matemático constituye su significado, puesto que permite la discriminación unívoca del mismo en el universo de objetos dónde se introduce. « Toda definición es en efecto una clasificación. Separa los objetos que satisfacen la definición y aquellos que no la satisfacen y los sitúa en dos clases distintas » (Poincaré, citado en Lorenzo, 1974, p. 58). Entonces, para introducir la noción de igualdad es suficiente enunciar: El signo '=' (igual) indica que lo que se encuentra a la izquierda de este signo, primer miembro de la igualdad, y lo que se encuentra a la derecha de este signo, llamado el segundo miembro de la igualdad, son dos maneras de designar al mismo objeto, o dos escrituras diferentes del mismo. Esta descripción de la noción de igualdad no explicita referencia alguna a un sistema de prácticas matemáticas ni tampoco a un contexto matemático de uso. En muchas circunstancias las instituciones escolares aceptan (irreflexivamente) que los estudiantes tienen la capacidad de adaptar esta definición formal de la noción de igualdad a los diferentes contextos de uso, produciéndose un fenómeno de *ilusión de transparencia*.

> « Le fait de ne pas signaler aux élèves de Collège que le signe " = " peut avoir des significations différentes, relève de la transposition didactique; en effet, ceci peut s'expliquer par un souci de simplification: on laisse ainsi croire à l'élève, implicitement, que le signe " = " a toujours le même statut. Or, dans le cursus scolaire d'un élève, aucune étude explicite sur les différents statuts du signe " = " n'est effectuée. Les professeurs eux-mêmes peuvent alors, souvent, ne pas avoir vraiment conscience des différents rôles du signe " = ". Ceci peut expliquer que la dé-transposition n'est pas effectuée lorsqu'elle devient nécessaire. En effet, répétons-le, pour pouvoir dé-transposer convenablement une notion, il faut avoir bien compris en quoi consistait la transposition initiale de cette notion. » (Antibi et Brousseau, 2000, p. 31).

> « Although quantitative sameness is conventionally encoded in the equal symbol, it had not been necessarily so interpreted by the students. Hence, it was clear that the children needed to experience a variety of numerical equalities to continue their progressive understanding of the meanings of the equal sign. » (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998, p. 182).

Las definiciones de igualdad representan objetos emergentes de los sistemas de prácticas asociados a los distintos contextos de uso, en ningún caso son el marco de cierre de los significados atribuidos a la noción de igualdad. Para justificar si a y b representan el mismo número es necesario explicitar un contexto de uso: numérico, aritmético, algebraico, analítico o topológico. De esta forma, según el contexto de uso, la igualdad entre dos números a y b ($a = b$) queda determinada por unas relaciones específicas a dicho contexto.

En esta sección daremos las definiciones de la noción de igualdad según el contexto matemático de referencia y ciertas propiedades del conjunto de los números reales; realizaremos una breve discusión de las mismas que contribuya a su interpretación recta; y, por último, mostraremos cómo las definiciones dadas condicionan las prácticas operativas y discursivas.

1. Definiciones

La definición de igualdad como equivalencia clasifica a un conjunto (el de los números reales) en clases **R**/=; brevemente, no importa la representación del número sino el valor que éste toma ($\frac{2}{4} \equiv \frac{1}{2}$; $1 \equiv 0,\overline{9}$; etc.); no estamos interesados en determinar cómo quedan definidas las clases (sucesiones de Cauchy, cortaduras de Dedekind, etc.). Brevemente, se define:

> *Definición 1 (Igualdad como equivalencia)* Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si representan la misma clase; esto es:
>
> $$a = b \Leftrightarrow a \equiv b$$

La igualdad entre dos números reales a y b puede también establecerse por doble desigualdad; **R**, dotado de las operaciones suma (+) y producto (·) y de la relación de orden menor o igual (≤), es un cuerpo ordenado. Se define:

> *Definición 2 (Igualdad de orden)* Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si la relación de orden en **R** (≤) cumple para ellos la propiedad antisimétrica; esto es: $a = b \Leftrightarrow [\, a \leq b \wedge b \leq a]$
>
> O equivalentemente: $a = b \Leftrightarrow (\, a \in (-\infty; b] \wedge b \in (-\infty; a]\,)$

El valor absoluto dota al conjunto de los números reales de una métrica (estándar). Se define la distancia entre dos números a y b, se denota $d(a; b)$, como el valor absoluto de la diferencia ($|a - b|$). De esta forma, se define:

> *Definición 3 (Igualdad métrica)* Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si la distancia entre ambos es nula; esto es:
>
> $$a = b \Leftrightarrow d(a; b) = |a - b| = 0$$

Se puede interpretar la métrica valor absoluto como una topología sobre **R**, en tal caso (**R**; d) es espacio topológico; en este contexto, afirmar que la distancia entre dos puntos a y b es cero es equivalente a determinar que el conjunto $\{a; b\}$ es conexo[4]. Se define:

> *Definición 4 (Igualdad conectiva)* Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si el conjunto $\{a; b\}$ es conexo.

La definición algebraica supone la determinación de un número como solución de una ecuación. Denotamos por $\delta()$ la función característica que asocia 1 a una sentencia verdadera y 0 a una falsa; y por $E()$ a la relación asociada a una ecuación E. De esta forma, $\delta(E(a)) = 1$ significa que el valor a verifica la relación $E()$ o, con otras palabras, a es solución de la ecuación E. De manera similar, $\delta(E(a)) = 0$ significa que el valor a no verifica la relación $E()$, esto es, a no es solución de la ecuación E. Se define:

> *Definición 5 (Igualdad algebraica)* Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si siempre que a es solución de una ecuación E, b también lo es: $a = b \Leftrightarrow [\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 1]$

La igualdad entre dos números reales se puede definir también apoyándose en la teoría de funciones. En efecto, para determinar si dos números reales son iguales es suficiente determinar si sus imágenes respecto a una función inyectiva son iguales. Se define:

> *Definición 6 (Igualdad funcional)* Sea $F_i(D)$ el conjunto de funciones reales de variable real inyectivas y con dominio D. Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si sus respectivas imágenes a través de una función inyectiva son iguales; esto es:
>
> $a = b \Leftrightarrow \exists f \in F_i(D)$, $\{a; b\} \subseteq D$, tal que $f(a) = f(b)$

En la definición anterior, si f es la función identidad se estable una tautología semántica. Se hace la distinción entre tautología lógica y tautología semántica. Una *tautología lógica* es una afirmación del tipo $a = \bar{a}$, donde a y $\bar{a}$ representan el mismo objeto, sin necesidad de que a y $\bar{a}$ tengan el mismo representante ostensivo (por ejemplo, $a > 0$, $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$). La *tautología semántica* es una tautología lógica que exige la equivalencia tanto del objeto como de su representante ostensivo

4. « Por topología entenderemos el estudio de los aspectos cualitativos de las formas espaciales o de las leyes de conexión, de la mutua posición y del orden de los puntos, rectas, superficies, cuerpos, así como de sus partes y uniones, haciendo abstracción de medida y magnitud » (Listing (1836), citado por Ayala et al. (1997, p. ix)).

(por ejemplo, $a > 0$, $\sqrt{a} = \sqrt{a}$). Una tautología semántica es auto-evidente; una tautología lógica no tiene por qué serlo. En la práctica, la demostración de la igualdad de dos números dados por representantes ostensivos distintos implica la determinación de una función inyectiva distinta de la identidad.

En el contexto del análisis matemático, la igualdad se sustituye por la intersección de toda una clase no numerable de inecuaciones o de entornos. Se define:

> *Definición 7 (Igualdad como proceso de paso al límite)* Dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si a está dentro de todo entorno abierto centrado en b ($B(b; \varepsilon)$) o viceversa; esto es:
>
> $a = b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, a \in B(b; \varepsilon) \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, b \in B(a; \varepsilon)$
>
> O, equivalentemente: $a = b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, |a - b| < \varepsilon$

Por último, la definición numérica de igualdad presupone la aceptación de un margen de error, que depende de la naturaleza del problema o es atribuido al instrumento de cálculo. La ruptura con las definiciones anteriores es radical desde el punto de vista formal; su inclusión obedece a razones *pragmáticas* (restricciones de medida y cálculo, instrumentos de cálculo – calculadoras, programas de ordenador) y *epistemológicas* (nociones de *aproximación suficiente* y de *vecindad*, *halo*, etc. – análisis no estándar).

> *Definición 8 (Igualdad numérica)* Sea $T > 0$ una tolerancia de error admitido, dos números reales a y b son iguales, se denota $a = b$, si a está dentro de un entorno abierto centrado en b y radio menor o igual a T ($B(b; t)$, $0 < t \leq T$) o viceversa; esto es:
>
> $a = b \Leftrightarrow \forall\ t > 0, \text{con } t \leq T, a \in B(b; t)$
> $\Leftrightarrow \forall\ t > 0, \text{con } t \leq T, b \in B(a; t)$
>
> O, equivalentemente: $(a = b) \Leftrightarrow |a - b| \leq T$

2. Breve análisis de las definiciones dadas

El análisis que se muestra a continuación tiene por objetivo matizar las definiciones dadas para su correcta interpretación. Una sucinta confrontación de las definiciones se realiza al final de la sección II.3.

La definición aritmética remite a la « identidad de nombre ». Brevemente, para probar, con base en la definición aritmética, que dos expresiones representan el mismo número se hacen transformaciones de las mismas que conserven la igualdad, hasta la obtención de una *tautología semántica*, esto es, del mismo representante ostensivo para ambos números.

Las definiciones métrica y de orden muestran criterios de actuación para la demostración de la igualdad de dos números reales; representan una interpretación de la definición aritmética en función de ciertas características atribuibles a **R** (cuerpo ordenado, espacio métrico). De esta forma, teóricamente, para la discriminación de números reales se procede en dos pasos: se dota a **R** de una propiedad (orden, métrica) y se establece en función de ésta la igualdad o no de dos números.

La pertinencia de la definición de igualdad algebraica se fundamenta en que la ecuación se ha denominado tradicionalmente *igualdad condicional:* la igualdad se cumple sólo para determinados valores de la variable. Es lógico entonces asociar a cada ecuación el conjunto de soluciones o valores que hacen cierta la igualdad y, de manera indirecta, definir un número como la solución de una clase de ecuaciones. El hecho de hablar de « clase de ecuaciones » es estrictamente necesario, puesto que infinitas ecuaciones tienen por solución un determinado número real y sólo dicho conjunto puede discriminar al número real. De hecho, la definición dada resulta más operativa formulada como negación:

$$a \neq b \Leftrightarrow \exists\, E \text{ tal que } [\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta(E(b)) = 0]$$

De otra forma, dos números a y b son distintos si se conoce una ecuación E tal que si a es solución, b no lo es; y, viceversa, si b es solución, a no lo es. En definitiva, existe una ecuación E para la cual a y b no son simultáneamente solución.

La definición como proceso de paso al límite no remite a la identidad de nombre, sino a razonamientos por condiciones suficientes y pérdida controlada de información en cadenas de desigualdades. Este hecho determina una diferencia radical entre las demostraciones analíticas y las algebraicas. En este orden de ideas, Newton escribe en *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, en un pasaje analítico: « Cantidades, y la razón de cantidades, que en cualquier intervalo finito de tiempo convergen continuamente a la igualdad, y que antes del final de dicho tiempo se aproximan una a la otra más que cualquier diferencia dada, se hacen finalmente iguales », citado por Boyer (1969, p. 500).

La definición funcional relaciona un concepto genuinamente analítico (función) y la solución de una ecuación. En efecto, sea f una función inyectiva y consideremos la ecuación $f(x) = h$; entonces, si a y b son soluciones de la ecuación, esto es, las relaciones $f(a) = h$ y $f(b) = h$ son ciertas, necesariamente $a = b$. De esta forma, el análisis de la ecuación $f(x) = h$ en términos de las propiedades de la función f asociada, determina una condición suficiente para la igualdad algebraica: no es necesario verificar que, para toda relación $E()$,

« $\delta(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta\,(E(b)) = 1$ », basta con encontrar una relación homogénea[5] $E^*()$, tal que $y = E^*(x)$ sea inyectiva, donde $E^*() \equiv f() - h$.

De esta manera, la definición funcional no involucra explícitamente la noción de límite, que es central en el modelo de igualdad analítico. Sin embargo, si la función f es continua, es posible explicitar dicha noción. En efecto, si f es continua en el punto a, $f(a) = h$, se tiene:

$$\forall\ \varepsilon>0, \exists\ \delta>0 \text{ tal que si } |b-a|<\delta \Rightarrow |f(b)-f(a)|<\varepsilon$$
$$\Leftrightarrow \text{lím}_{b\to a} f(b) = f(a)$$

La definición numérica de igualdad puede ser comprendida como una « restricción » de la definición analítica como proceso de paso al límite: fija órdenes de aproximación o establece entornos admisibles de pertenencia. Con otras palabras, dos números analíticamente iguales son numéricamente iguales para cualquier tolerancia. Por otro lado, la definición numérica puede darse de igual manera en términos de resolución de ecuaciones; en efecto, si denotamos por $\delta()$ la función característica que asocia 1 a una sentencia verdadera y 0 a una falsa, y por $E(\ ,T)$ a la relación asociada a una ecuación E con un orden de aproximación T, dos números a y b son numéricamente iguales (con un orden de aproximación T) si:

$$a = b \Leftrightarrow [\delta\,(E(a, T)) = 1 \Leftrightarrow \delta\,(E(b, T)) = 1]$$

De esta forma, la igualdad numérica bascula entre la igualdad algebraica y la analítica como proceso de paso al límite.

Por último, cada definición de igualdad introducida (sección II.1) es un emergente de un sistema de prácticas matemáticas relativo a un campo de problemas determinado, que incluye objetos lingüísticos, nociones y técnicas operatorias específicos. Estos sistemas de prácticas se distinguen unos de otros por su relativa eficacia y generalidad para realizar el trabajo matemático, como ejemplificaremos en la sección II.3.

3. Influencia de las definiciones en el trabajo matemático

Definir consiste en establecer un conjunto de condiciones necesarias y suficientes que permitan discriminar unívocamente un objeto dentro de un universo. En muchas circunstancias, dicha discriminación se lleva a cabo mediante una formalización; formalización que ha hecho que ciertos autores afirmen que *definir en matemáticas es dar un nombre* (Leikin & Winicki-Landman, 2000). Esta perspectiva supondría afirmar

---

5. En este contexto, una ecuación es homogénea cuando uno de sus miembros es cero.

que la definición formal discrimina al objeto matemático, es su « medida ». Sin embargo, un mismo objeto matemático puede ser definido por medio de formas equivalentes. Dos definiciones son equivalentes si designan el mismo objeto ; no es posible privilegiar *a priori* ninguna de ellas. La pertinencia en el uso de una definición se mide por el grado de adaptación al contexto de aplicación. En particular, apoyándonos en la demostración de la proposición $\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$, mostraremos cómo las definiciones de igualdad introducidas condicionan las prácticas operatorias y discursivas. Asimismo, el ejemplo permitirá observar relaciones no triviales entre las definiciones dadas y sus prácticas asociadas.

Demostración según la definición aritmética como equivalencia

Realizamos la demostración aritmética por transformación de un representante ostensivo hasta la obtención del otro, utilizando propiedades básicas de los números reales, que se presumen justificadas con anterioridad a partir de la definición axiomática de **R** (14 axiomas agrupados en cuatro grupos: de existencia, algebraicos, ordinales y topológicos o de continuidad[6]).

$$\sqrt{2}\overset{(1)}{=}\sqrt{2}\cdot 1\overset{(2)}{=}\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\overset{(3)}{=}\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\overset{(4)}{=}\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\overset{(5)}{=}\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{2}}\overset{(6)}{=}\frac{2}{\sqrt{2}}$$

Las igualdades quedan justificadas de la siguiente forma:

$\overset{(1)}{=}$ Existencia de elemento unidad en **R**.

$\overset{(2)}{=}$ $\forall\ a\in \mathbf{R}\setminus\{0\},\ 1=\frac{a}{a}$.

$\overset{(3)}{=}$ $\forall\ a\in\mathbf{R},\ a=\frac{a}{1}$.

$\overset{(4)}{=}$ Producto en **R**.

$\overset{(5)}{=}$ Potenciación en **R**.

$\overset{(6)}{=}$ $\forall\ a\in[0;\infty),\ \left(\sqrt{a}\right)^2=a$.

La demostración propuesta no es única. Si se define $\sqrt{2}$ como el único real positivo tal que el cuadrado es igual a 2, basta realizar el

6. Estos aspectos (de existencia, ordinal, algebraico y topológico) de la estructura de **R** tienen abundantes interdependencias, alguna de las cuales proviene de la propia axiomática de **R**; por ejemplo, postular que (**R**, +, ·, ≤) es un *cuerpo ordenado arquimediano y completo*.

siguiente cálculo: $2 = \left(\sqrt{2}\right)^2 = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ y, dividiendo por $\sqrt{2}$, se tiene: $\frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$. El modo de demostración « por equivalencias sucesivas » supone implícitamente la aceptación de unas prácticas operatorias (*saber hacer*, *técnica*) privilegiadas y naturalizadas en las instituciones escolares actuales con relación a la noción de igualdad.

> « L'analyse des livres scolaires et des réponses des enseignants et des élèves […] montre que, presque toujours, en présence d'un problème de ce type [Démontrer que $A = B$], " il convient " de transformer A en une suite d'expressions égales $A_1, \ldots, A_n$ telles que $A = A_1 = \ldots = A_n = = B$ de façon à " partir de A pour arriver à B ". Il est clair que l'on pourrait […] transformer à la fois A et B en utilisant le raisonnement " $A = C$ et $B = C$ donc $A = B$ " […] Ces procédés sont rarement utilisés par les élèves et il se trouve des enseignants pour ne pas les accepter. » (Antibi et Brousseau, 2000, p. 30).

Demostración según la definición aritmética de orden

Sean $A = (-\infty;\ \sqrt{2})$ y $B = (\sqrt{2};\ +\infty)$. Por la ley de tricotomía: $\frac{2}{\sqrt{2}} \in A$; o bien $\frac{2}{\sqrt{2}} \in B$; o bien $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$; Supongamos que $\frac{2}{\sqrt{2}} \in A$, entonces: $\frac{2}{\sqrt{2}} < \sqrt{2}$ y, puesto que $\sqrt{2} > 0$, se cumple que $\frac{2}{\sqrt{2}} \cdot \sqrt{2} < \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}$ y, por lo tanto, $2 < 2$; lo cual es absurdo. De manera similar se demuestra que $\frac{2}{\sqrt{2}} \notin B$, concluyéndose que $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Demostración según la definición métrica

Sea ε la distancia entre $\sqrt{2}$ y $\frac{2}{\sqrt{2}}$: $\varepsilon = d\left(\sqrt{2}; \frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left|\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right|$

Entonces $\varepsilon = 0$; en efecto ($\forall\ x \in \mathbf{R}$, $|x| = \sqrt{x^2}$):

$$\varepsilon = \sqrt{\left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2} = \sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2 - 2 \cdot \sqrt{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{2}} + \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2}$$
$$= \sqrt{2 - 4 + 2} = \sqrt{0} = 0$$

En conclusión, $\varepsilon = 0$ y, por lo tanto, $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$.

Demostración según la definición conectiva

En el conjunto de los números reales, las nociones de conjunto conexo y conjunto convexo son equivalentes, por ello, para probar que $A = \left\{\sqrt{2}; \frac{2}{\sqrt{2}}\right\}$ es conexo, es suficiente razonar que $B = \left\{\sqrt{2}\cdot(1-r) + \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot r \,/\, r \in [0;1]\right\} \subseteq A$.[7] En efecto, sea $x \in B$:

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{2}\cdot(1-r) + \frac{2}{\sqrt{2}}\cdot r = \sqrt{2} - \left(\sqrt{2} - \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\cdot r = \\ &= \sqrt{2} - \left(\frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}-2}{\sqrt{2}}\right)\cdot r = \sqrt{2} - \left(\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2-2}{\sqrt{2}}\right)\cdot r = \\ &= \sqrt{2} - \left(\frac{2-2}{\sqrt{2}}\right)\cdot r = \sqrt{2} - 0\cdot r = \sqrt{2} \end{aligned}$$

Demostración según la definición funcional

Sea $f(x) = x^2$ en $[0; \infty)$. Se cumple:

1. $f\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4}{2} = 2$
2. $f\left(\sqrt{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 = 2$

De esta manera, puesto que f es inyectiva, se concluye que $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$.

Demostración según la definición como proceso límite

Sean $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{2}{x}$ en $[1; \infty)$. Demostrar que $\sqrt{2}$ es punto de corte de f y g [$f\left(\sqrt{2}\right) = g\left(\sqrt{2}\right)$] es equivalente a demostrar que $x = \sqrt{2}$ es el cero de la función $h(x) = x - \frac{2}{x}$ en $[1; \infty)$:

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, tal que si $|\,x - \sqrt{2}\,| < \delta \Rightarrow |h(x) - 0| < \varepsilon$

En efecto, dado $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \leq 1$, se toma $\delta = \frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}}$, entonces $(x \geq 1)$:

7. No es necesario utilizar la equivalencia de las nociones de conexidad y convexidad de un conjunto de números reales; basta observar que no existe $y \in \mathbf{R}$ entre $\sqrt{2}$ y $\frac{2}{\sqrt{2}}$ tal que $y \notin A$.

$$\begin{aligned}
\left|x-\frac{2}{x}-0\right| &= \left|\left(x-\frac{2}{x}\right)-\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)\right| \leq \\
&\leq \left|x-\sqrt{2}\right|+\left|\sqrt{2}-\frac{2}{x}\right| = \\
&\leq \left|x-\sqrt{2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{|x|}\cdot\left|x-\sqrt{2}\right| \leq \\
&\leq \left|x-\sqrt{2}\right|+\frac{\sqrt{2}}{1}\cdot\left|x-\sqrt{2}\right| \leq \\
&\leq \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\left|x-\sqrt{2}\right| < \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\delta = \left(1+\sqrt{2}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{1+\sqrt{2}} = \varepsilon
\end{aligned}$$

En conclusión, $\text{lím}_{x\to\sqrt{2}}\, h(x)=0$ o, equivalentemente, $\text{lím}_{x\to\sqrt{2}}\, f(x)=\text{lím}_{x\to\sqrt{2}}\, g(x)$ y, puesto que *f* y *g* son continuas en [1; +∞), se concluye que $\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$.

Demostración según la definición numérica

En las mismas condiciones de la demostración analítica como proceso límite, se demuestra que aproximaciones a $x=\sqrt{2}$ son « ceros » de la función $h(x)=x-\frac{2}{x}$ (con un orden de tolerancia arbitrario, pero fijo; en los límites de la calculadora o programa de ordenador utilizados). Entonces, la proposición $\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$ queda demostrada « tolerancia a tolerancia ».

En la tabla 1 se muestra un programa editado con la calculadora gráfica y programable *TI-81*. El programa está basado en el método de Newton o de la tangente. Se podían haber editado otros programas; sin embargo, está fuera del alcance de este trabajo discutir características de eficacia, corrección, robustez y amigabilidad de un programa[8].

---

8. En informática se dice que un programa es robusto si cumple las dos condiciones seguientes: una, es *correcto*, esto es, toda semilla o valor introducido que satisface las condiciones de entrada impuestas produce una salida o resultado obtenido *admisible* (que satisface las condiciones de salida); otra, permite *detectar errores*, es decir, para todas las semillas que no satisfacen las condiciones impuestas de entrada se obtiene un mensaje de error, que indica la elección inadecuada. Si además de estas dos condiciones, el programa, para todas las semillas que no satisfacen las condiciones impuestas de entrada, concede al usuario la oportunidad de corregir el error y continuar, se dice que el programa es *amigable*.

```
PrgmD:NEWTON
:DisP
« TOLERANCIA »
:InPut T
:1->X
:Lbl 1
:4X/(X^2+2)->R
:If abs(X-R)<T
:Goto 2
:R->X
:Goto 1
:Lbl 2
:DisP « SOLUCION »
:DisP R
```

Tabla 1. Programa editado con una *TI-81* para la obtención del cero de la función $h(x) = x - \frac{2}{x}$, $x \in [1; \infty)$, dada una tolerancia T.

De esta forma, para cada tolerancia T, se demuestra que ($E \equiv h(x) = 0$):

$$\delta\,(E(\sqrt{2}\,,\,T)) = 1 \Leftrightarrow (\sqrt{2}\,,\,T) = \frac{2}{(\sqrt{2},T)}$$

Sucinta confrontación de las demostraciones de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$

La demostración según la definición como equivalencia puede generalizarse para cualquier número entero $a > 0$: $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$; o, recíprocamente, aceptar la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ como un caso particular de la fórmula $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$. De esta forma, la proposición $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$ puede ser aceptada como una demostración « aritmética en lenguaje algebraico », esto es, se explicita una relación entre las prácticas en un contexto aritmético y aquéllas referidas a un contexto algebraico. De hecho, la fórmula $\sqrt{a} = \frac{a}{\sqrt{a}}$ refiere una permanencia, antes que una acción; de manera similar a lo que sucede con la *identidad* $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$. Este cambio de « acción a permanencia » delimita el paso de un lenguaje aritmético a uno algebraico. Gascón (1994) ha razonado que el signo igual en contextos aritméticos representa una acción: « 2 + 3 = 5 » es equivalente a « 2 más 3 da 5 ». Sin embargo, en el lenguaje algebraico, existe una dualidad entre el uso como acción ($3x + 2 = 1$) y el uso como permanencia ($a\,(b + c) = a\,b + a\,c$).

La dualidad del signo igual no es privativa del contexto algebraico. La igualdad analítica como proceso de paso al límite mantiene un estado estático y otro dinámico, asociados a la noción de límite. Si consideramos la constante a como sucesión ($a_n = a$, $\forall\ n \in \mathbf{N}$), entonces a_n tiende a b: $a = b \Leftrightarrow \forall\ \varepsilon > 0, \exists\ N, \forall n > N, |a_n - b| < \varepsilon$. El estado de dualidad es más « impactante » que en el contexto algebraico, puesto que la noción de igualdad se manifiesta a la vez como proceso y como objeto; en el fondo, la dificultad radical que se suscita es la dual naturaleza del infinito matemático (potencial-actual). De esta manera, puesto que los procesos infinitos, que en muchas circunstancias implican alguna operación de paso al límite, son densos en el Análisis Matemático, la dualidad proceso-objeto debe jugar un papel central en los análisis didácticos. En este orden de ideas, Tall (1991) llama *procepts* –pro(cess)(con)cepts –, a ciertos objetos matemáticos de naturaleza dual; Cornu (1991) identifica en los estudiantes dos concepciones esencialmente distintas con relación a la noción de límite secuencial (estática y dinámica); Schneider (2001) establece la necesidad de estructurar la introducción de la noción de derivada en dos etapas: una, aproximación afín (no dinámica); otra, límite de secantes (dinámica); etc.

Por otro lado, es posible identificar la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ como el resultado de la búsqueda de los puntos de corte de las funciones $f(x) = x$ y $g(x) = \frac{2}{x}$ en $[1; \infty)$:

$$f(x) = g(x) \Rightarrow x = \frac{2}{x} \Rightarrow x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2} \Rightarrow \sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}\,.$$

La Teoría de funciones permite justificar la obtención de la ecuación de segundo grado (e, implícitamente, darle una intepretación gráfica). Esta ecuación debe ser resuelta con un tipo de argumentación y de acciones propias del álgebra (y que no requieren interpretación en términos del problema propuesto). Este hecho puede formularse en los siguientes términos: la demostración está constituida por un componente discursivo propio de la teoría de funciones y un componente operatorio propio del álgebra. De hecho, si se define $\sqrt{2}$ como el único real positivo cuyo cuadrado es igual a 2, se tiene:

$$x = \sqrt{2} \Leftrightarrow x > 0 \wedge x^2 = 2$$

De esta forma, $\sqrt{2}$ es la única solución positiva de la ecuación $x^2 = 2$ y, por lo tanto, la proposición $\frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$ queda justificada sin más que verificar $\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2$. Este último hecho muestra que, en este caso, se puede establecer una identificación de las demostraciones según las definiciones funcional y algebraica.

Por último, la demostración numérica puede ser comprendida en términos analíticos y resuelta en el marco algebraico. En efecto, la determinación de la existencia y unicidad del límite de la sucesión (x_n), viene dada por la fórmula de recurrencia (método de Newton):

$$\begin{cases} x_{n+1} = \dfrac{4x_n}{x_n^2 + 2} \\ x_1 = 1 \end{cases}$$

Esta expresión involucra prácticas discursivas y operatorias tanto analíticas (acotación, pérdida controlada de información, etc.) como algebraicas (manipulación de las expresiones algebraicas involucradas); siendo complejo etiquetar los diferentes momentos (aspectos) de la actividad matemática (como un complejo de nociones, procesos y significados matemáticos puestos en juego). Una vez justificada la convergencia de la sucesión (x_n) a un número positivo, se introducen límites en ambos miembros de la regla de recurrencia y se resuelve la ecuación que resulta:

$$\begin{aligned} x_{n+1} = \frac{4x_n}{x_n^2 + 2} \quad & \Rightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\left(x_{n+1}\right) = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{4x_n}{x_n^2+2}\right) \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad x = \frac{4x}{x^2+2} \Rightarrow \\ & \Rightarrow \quad x^3 + 2x = 4x \Rightarrow x = \sqrt{2} \end{aligned}$$

La demostración de la proposición « $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ » nos ha servido para ejemplificar cómo las distintas definiciones de la noción de igualdad condicionan el trabajo matemático. La evolución de la noción de igualdad ha seguido el proceso inverso: la práctica matemática ha condicionado los significados atribuidos a la noción de igualdad y, sólo después, tomada esta noción como objeto de estudio, se ha formalizado dicho significado en definiciones (emergentes de ciertos sistemas de prácticas matemáticas relativos a campos de problemas determinados). Una tarea fundamental consiste, por lo tanto, en reconstruir este proceso, esto es, en determinar las prácticas discursivas y operatorias que han hecho emerger las definiciones de la noción de igualdad en los diferentes contextos de uso. En la sección III esbozamos estas prácticas.

III. SUBSISTEMAS DE PRÁCTICAS ASOCIADOS A LOS DISTINTOS CONTEXTOS DE USO

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y el Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS) comparten los mismos supuestos antropológicos sobre los conocimientos institucionales (saberes). De hecho, los sistemas de prácticas operativas y discursivas son al EOS lo que las praxeologías matemáticas son a la TAD. Sin embargo, la descripción de dichos sistemas de prácticas no es equivalente a la descripción de las praxeologías. La TAD caracteriza la actividad matemática partiendo de las tareas y de las técnicas, para llegar finalmente al discurso tecnológico-teórico (sin problematizar la naturaleza de los objetos que intervienen en dicho discurso). La noción de praxeología modeliza el conocimiento matemático como actividad humana, entendiendo por conocimiento el producto (refinado) de un estudio sistemático, intencionado, histórico y social. El producto más inmediato del estudio son las técnicas (« saber-hacer »), cuya vigencia está supeditada a un discurso tecnológico-teórico que las justifique (« saber », segundo producto). De esta manera, « saber-hacer » y « saber » constituyen las dos caras de una praxeología (« praxis-logos »).

> « Una organización matemática surge siempre como respuesta a una cuestión o a un conjunto de cuestiones. No se dice lo que *es* una organización matemática, pero se da un esbozo de su estructura, postulando que está constituida por cuatro componentes principales: *tipos de problemas*, *técnicas*, *tecnologías* y *teorías*. Si ponemos el énfasis en las relaciones dinámicas que se establecen entre dichos componentes a fin de llevar a cabo la actividad matemática necesaria para responder a las cuestiones problemáticas iniciales, entonces aparecen dos aspectos inseparables: la práctica matemática o ‘praxis’ (formada por *tareas* y *técnicas*) y el discurso razonado o ‘logos’ sobre dicha práctica (formado por *tecnologías* y *teorías*). » (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, p. 251).

De esta forma, el trabajo mostrado permite determinar una praxeología asociada a la *cuestión generatriz* (Chevallard, 1999, p. 232): Dados a, $b \in \mathbf{R}$, ¿a y b representan el mismo número? La tarea es demostrar que dos números representados por diferentes ostensivos son iguales. Las técnicas se asocian a cada una de las definiciones: transformar por equivalencias sucesivas uno de los números hasta obtener el otro; justificar que, dados $a, b \in \mathbf{R}$, se cumple simultáneamente, $a \leq b$ y $b \leq a$; razonar que, dados a, $b \in \mathbf{R}$, no son ciertas ninguna de las dos desigualdades siguientes $a < b$ y $b < a$ y que, por lo tanto, por la ley de triconomía, $a = b$; determinar que la distancia euclídea entre dos números es cero; etc. La tecnología permite justificar los pasos realizados mediante cada una de las técnicas; de hecho, en la institución donde se realiza el proceso de estudio suele aceptarse implícitamente que los gestos técnicos realizados (multiplicar por la unidad, elevar al cuadrado, etc.) y los objetos matemáticos utilizados (raíz cuadrada, relación de orden, conexión, etc.) han sido previamente justificados o definidos. La teoría se refiere a nociones estructurales, topológicas y analíticas fundamentales de los números reales que sirven de soporte y referencia y que, en la mayoría de los casos, representan abstracciones o generalizaciones de los presupuestos y enunciados tecnológicos. El « nivel de justificación », esto es, el desarrollo del bloque tecnológico-teórico, es consustancial a cada institución.

> « Le style de rationalité mis en jeu varie bien entendu dans l'espace institutionnel, et, en une institution donnée, au fil de l'histoire de cette institution, de sorte qu'une rationalité institutionnelle donnée pourra apparaître… peu rationnelle depuis telle autre institution. » (Chevallard, 1999, p. 226).

Por otro lado, el EOS está interesado en teorizar la noción de significado en la didáctica, lo que hace mediante la noción de función semiótica y una ontología matemática asociada. El punto de partida del EOS es tratar de caracterizar la naturaleza y el significado de las nociones matemáticas; se parte de los elementos del discurso tecnológico (nociones, propiedades, argumentos, etc.) y se concluye que su naturaleza es inescindible de los sistemas de prácticas y contextos de uso correspondientes. En este ámbito, las propiedades suficientes y necesarias de cada una de las definiciones son el antecedente (expresión) explícito de una función semiótica cuyo consecuente es la noción de igualdad y, por lo tanto, estas propiedades determinan el significado de dicha noción en tanto que objeto técnológico-teórico.

> « Une étude plus approfondie montrerait que de nombreuses difficultés proviennent aussi de ce que le signe « = » est mobilisé en même temps dans la langue objet : l'équation, l'identité, le calcul, et dans la langue de travail sur l'objet : comme descripteur des transformations, comme métathéorème, ou comme « inférence » ». (Antibi et Brousseau, 2000, p. 31).

Pero las definiciones dadas no determinan el significado de la noción de igualdad por sí solas, representan únicamente la « parte visible » de los sistemas de prácticas, cristalización de ciertas formas de hacer y de justificar, de operar y de elaborar el discurso. De esta forma, para describir los sistemas de prácticas operativas y discursivas con relación a un objeto matemático es necesario, en primer lugar, identificar las principales nociones, propiedades, lenguaje, argumentos y acciones utilizados en una clase amplia de problemas prototípicos en los diferentes contextos de uso y, en segundo lugar, describir las relaciones entre los objetos matemáticos involucrados en los distintos subsistemas de prácticas que quedan constituidos. Una descripción detallada de estos subsistemas de prácticas excede el objetivo de este artículo[9]. A continuación, se da de forma breve un esbozo de ellos.

Las nociones fundamentales asociadas a la noción de igualdad son: en el contexto numérico, aproximación y tolerancia, que determinan intervalos de validez de resultados; en el aritmético, identidad y relación de orden; en el algebraico, equivalencia y función (en la mayoría de los casos, de tipo algebraico); en el analítico, función (en particular, transcendente) y límite (convergencia); y en el topológico, distancia (medida) y conexión.

En el contexto aritmético el lenguaje matemático está poco formalizado. El discurso se apoya en la manipulación de valores concretos y la argumentación se basa en propiedades de simetría y transitividad de la igualdad, aceptándose implícitamente que « las relaciones simétricas y transitivas son formalmente de la naturaleza de la igualdad » (Russell, 1903, p. 257)[10]. De hecho, esta falta de formalización implica usos abusivos del signo igual en contextos aritméticos.

> « In exercise books of arithmetic 2 + 7 = 9 + 7 = 16 + 7 = 23 +… is a well-known feature. We reject it. It is not because it cannot be justified – not without long hesitation has this notation been forbidden. There are still rudimentary traces of the mathematical style which would allow such formulae. It could be maintained with appropriate such as (((((2 + 7 = 9) + 7) = 16) + 7 = 23) +…, or by the convention that with no further comment every formula is read by progressing from left to right. In fact this is the rule with all expressions that contain additions and subtractions only. » (Freudenthal, 1986, pp. 299-300).

9. Bien entendida, la descripción detallada de un sistema de prácticas asociado a una noción matemática supone una *reconstrucción racional* (Lakatos, 1976) o la elaboración de una *antropología del saber* (Chevallard, 1985) de dicha noción.

10. Lorenzo (1974, p.55) formula este hecho en los siguientes términos: « *Cálculo con igualdad*: Regla o proceso de razonamiento […] mediante la cual una misma operación uniforme aplicada a dos números iguales dará resultados idénticos […] Es regla que cabría traducir a lenguaje simbólico como '$a = b \Rightarrow f(a) = f(b)$' constituyendo, realmente, una de las premisas caracterizadoras de la relación de igualdad, mientras que la otra premisa sería una forma del principio de identidad 'toda cantidad es igual a ella misma'. » Asimismo, esta formulación remite a la definición funcional de igualdad dada por nosotros en el presente artículo.

En el contexto algebraico los objetos se representan mediante un lenguaje simbólico-literal, cuyo objetivo es generalizar las operaciones concretas, construir un sistema de signos fácilmente reconocible y establecer una estructura operativa y discursiva que permita reducir a expresiones canónicas los objetos matemáticos, de tal forma que « por simple observación » se puedan describir dichos objetos. En el contexto numérico el discurso se organiza mediante sentencias que determinan órdenes de ejecución de algoritmos programables. De esta forma, el lenguaje es el propio de la programación. La igualdad tiene dos funciones: *lógica*, en sentencias del tipo « si $a = b$ entonces… » , y *aritmética*, asigna el valor a a b $(a \to b)$.

En el contexto analítico se utiliza el lenguaje de los infinitésimos y la argumentación « clásica » en términos de la notación « ε-δ ».

> « Decir que una cantidad real $\lambda \in \mathbf{R}$ es cero precisamente cuando ocurre que $|\lambda| \leq \varepsilon,\ \forall\ \varepsilon > 0$, forma parte del *lenguaje* y *modo de razonar* del analista (de la misma manera, un analista inmediatamente dice que dos números $a, b \in \mathbf{R}$ son iguales si $\forall\ n \in \mathbf{N}\ |a - b| < \frac{1}{n}$). Un algebrista probablemente diría (admitiendo que estemos en un cuerpo de característica cero) que $\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda + \lambda = \lambda$ (algo que forma parte del *lenguaje* y *modo de razonar* del algebrista). Si volvemos a la 'jerga' analítica '*épsilon-delta*' vemos que hay una *estructura* subyacente […] *La principal característica que puede llegar a tener el lenguaje del Análisis Matemático es la forma en la que sus conceptos son sistemáticamente estructurados, así como la propia filosofía de su metodología*. » (Induráin, 2001, pp. 64-65).

Por último, el lenguaje topológico comparte parte del simbolismo algebraico (transformación por equivalencias), conjuntista (pertenencia, contenido, etc.) y aritmético-analítico (operaciones suma y producto, relación de orden, etc.).

Las proposiciones[11] aritméticas básicas resaltan algunas de las propiedades fundamentales de los números reales dotados de las operaciones binarias suma y producto; de hecho, « It is also important to take into consideration that the symbol for equality did not evolve independently from the symbols for arithmetical operations and operations with variables » (Sáenz-Ludlow & Walgamuth, 1998, pp. 155). En mu-

11. Las proposiciones son propiedades matemáticas que la convención y la cultura matemáticas han privilegiado. No hay justificación matemática para considerarlas como elementos primarios. De esta forma, las proposiciones juegan, dentro del EOS, un papel similar al de las definiciones, que son también consideradas como un tipo particular de propiedades; a saber, aquellas discriminan unívocamente un objeto en un determinado universo.

chas ocasiones se modelizan estas proposiciones aritméticas mediante álgebra (Bolea, Bosch y Gascón, 2001, pp. 257-265), en este sentido, las proposiciones algebraicas generalizan a las aritméticas y constituyen una justificación explícita de las mismas. Otro tipo de propiedades algebraicas tratan sobre la estructura de **Q** (y por extensión de **R**): desde la demostración de leyes básicas tales como las de *cancelación para la suma* ($a + c = b + c$ implica $a = b$) o de *cancelación para el producto* ($a\cdot c = b\cdot c$ y $c \neq 0$ implican $a = b$) hasta la justificación de que las operaciones « sustracción » y « división » o la demostración de la *regla de los signos*, todas se deducen de los axiomas de definición de los números racionales (reales) e implican la noción de igualdad[12].

Por otro lado, las proposiciones analíticas suponen en muchos casos una ruptura radical con las aritmético-algebraicas. Esta ruptura se identifica en muchos casos con la necesidad de realizar procesos infinitos, que en muchas ocasiones precisan de un paso al límite (o de forma más abstracta, de la noción de convergencia), o por la participación de una función trascendente. Así, la proposición:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} = \underset{n\to\infty}{lím}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

que determina que « el número trascendente (no algebraico) de Euler (*e*) puede ser expresado de al menos dos formas equivalentes » es una proposición analítica. Asimismo, implican la noción de igualdad el enunciado y demostración de propiedades básica de límites; por ejemplo, la unicidad de límite de una sucesión (convergente[13]).

Las proposiciones en el contexto numérico suponen siempre la aceptación de un margen de error o tolerancia. No se trata de determinar que $0{,}\overline{9} = 1{,}\overline{0}$ (con infinitos nueves o ceros) sino que, para una tolerancia determinada, es posible disponer de un número finito de nueves y ceros tal que la diferencia entre estos dos números sea menor que dicha tolerancia. Esta forma de enunciar y demostrar las proposiciones determina la diferencia fundamental entre los contextos numérico y analítico. Así, en un contexto analítico, la proposición anterior se enunciaría en los siguientes términos:

---

12. Aliprantis & Burkinshaw (1999, pp.12-20), por ejemplo, enuncian y demuestran una colección de estos problemas.

13. Si no se ha demostrado la existencia de límite, se justifica que « toda sucesión tiene *a lo sumo* un límite »; si se ha demostrado la existencia para una sucesión particular o si se toma como hipótesis la existencia de límite, se demuestra « que el límite es *único* ».

> « *Theorem*. A real number x has exactly one decimal expansion or else x has two decimal expansions, one ending in a sequence of all 0's and the other ending in a sequence of all 9's. » (Ross, 1980, p. 108).

En los contextos aritmético y algebraico un problema fundamental es la obtención de representantes canónicos y, para resolver este problema, la acción característica es la manipulación de objetos mediante equivalencias (que quedan justificadas por los axiomas de los números reales o por propiedades previamente establecidas). Este problema determina el gran peso que tienen los modelos aritmético y algebraico de la noción de igualdad en las instituciones actuales, puesto que determina una tarea fundamental de toda actividad matemática.

> « La raison d'être ainsi identifiée est générique: étant donné un système d'objets mathématiques, il est très utile de se doter, chaque fois que la chose est possible, d'un système d'écriture canonique de ces objets, et cela afin de pouvoir comparer sans ambiguïté deux tels objets. » (Chevallard, 1999, p. 244).

En los contextos numérico y analítico un problema fundamental es la comparación; sin embargo, ambos contextos se diferencian por el tipo de entidades comparadas: intervalos en el contexto numérico; números (únicos, puntuales) en el analítico. La determinación de un número en un contexto numérico supone la obtención de una aproximación « suficientemente buena », esto es, con un margen de error preestablecido (tolerancia), que determina un intervalo admisible para dicho número. Asimismo, el tipo de entidades comparadas determina las acciones características en cada uno de los contextos: en el contexto numérico, la acción principal consiste en la construcción de una secuencia lógica de sentencias que permita, para un rango de valores de entrada preestablecido, obtener una respuesta dicotómica (verdadero o falso, sí o no, 1 o 0, etc.) sobre la cuestión « dados a, $b \in \mathbf{R}$, ¿$a = b$ para una *tolerancia admisible*? »; en el contexto analítico, la comparación se realiza mediante pérdida controlada de información, que permite determinar condiciones suficientes para responder a la pregunta: « dados a, $b \in \mathbf{R}$, ¿$a = b$ para *toda tolerancia*? »

En el contexto topológico, el problema fundamental es la determinación de la igualdad o diferencia entre números, esto es, no se pretende « medir la diferencia », sino establecer una función característica Δ tal que, dados a, $b \in \mathbf{R}$: $\Delta(a, b) = 1$, si $a \neq b$; $\Delta(a, b) = 0$, si $a = b$. Esto determina una de las diferencias entre el contexto topológico y el analítico. Según Induráin (2001, p. 96) uno de los procesos básicos del análisis es *separar* o *calcular distancias* que descansa sobre la noción de *distancia* o *métrica*[14]. De esta forma, en un contexto analítico interesa determinar la igualdad o diferencia de dos números y, en caso de ser distintos, *cuánto*.

Así, por ejemplo, sean las sucesiones (a_n / a_{n-1}) y (b_n), definidas de manera recursiva por:

$$\begin{cases} a_1 = 1 = a_2 \\ \forall n \geq 3 : a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \end{cases} ; \quad \begin{cases} b_1 = 1/2 \\ \forall n \geq 2 : b_n = \dfrac{1}{1+b_{n-1}} \end{cases}$$

Y sean a y b los límites de dichas sucesiones. Entonces, la afirmación topológica $\Delta(a, b) = 1$ supone afirmar únicamente que a y b son distintos; mientras que la afirmación métrica $d(a; b) = 1$ determina la magnitud de la diferencia entre ambos límites ($a = (1+\sqrt{5})/2$ y $b = (-1+\sqrt{5})/2$). De hecho, para demostrar que $\Delta(a, b) = 1$ es suficiente justificar que $a>1>b$.

En la sección siguiente mostraremos cómo estructurar los subsistemas de prácticas asociados a los distintos contextos de uso y los emergentes de estos subsistemas (incluidas la definiciones). Propondremos un organigrama de los distintos objetos asociados a la noción de igualdad y de las correspondencias que se establecen entre ellos. Identificaremos en « niveles » los contextos de uso de la noción de igualdad, los sistemas de prácticas asociadas, los objetos emergentes de dichos sistemas, el lenguaje (voz « igualdad », signo « = ») y, por último, la estructura formal a la que explícita o implícitamente se refiere todo el trabajo matemático (operatorio y discursivo) con relación a la noción de igualdad.

IV. OBJETOS, SIGNIFICADOS Y MODELOS ASOCIADOS A LA NOCIÓN DE IGUALDAD

La interpretación del significado de los objetos matemáticos en términos de « sistemas de prácticas operatorias y discursivas », relativos a una institución determinada, conduce a postular un relativismo socio-epistémico con relación a los objetos matemáticos, consecuencia de adoptar un punto de vista antropológico para las matemáticas (Godino,

14. Según este mismo autor, los otros cuatro procesos analíticos fundamentales y las nociones sobre los que éstos descansan son: *contar* sobre la noción de *número*; *comparar* y *ordenar* sobre la noción de *ordenación*; *aproximar* o calcular la *tendencia de una magnitud* sobre la noción de *límite*, de *convergencia* o de la idea más avanzada de *continuidad*; *medir* sobre la noción de *medida* o i*ntegral*.

2003). Este relativismo socio-epistémico contradice aparentemente el carácter absoluto y universal que el matemático profesional atribuye a los objetos matemáticos. Sin embargo, a nuestro entender, este dilema se resuelve al aceptar que el matemático identifica una misma estructura formal en la variedad de objetos y prácticas (operatorias y discursivas); estructura que considera como « el objeto matemático », que representa la referencia implícita de la variedad de sistemas de prácticas y objetos emergentes en los distintos contextos de uso. En el caso de la igualdad, brevemente, la estructura formal puede ser descrita como:

$$a = b \Leftrightarrow a \text{ y } b \text{ representan el mismo número.}$$

De esta manera, la estructura formal representa una descripción de la noción de igualdad sin referente explícito a unas prácticas o contexto concretos.

La figura 1 muestra esquemáticamente la diversidad de objetos asociados a la noción de igualdad. Cada definición representa un objeto emergente de un sistema de prácticas en un determinado contexto de uso. Cada binomio « definición - sistema de prácticas » (y, en general, « objeto emergente - sistema de prácticas ») determinan un *modelo de la noción de igualdad*; esto es, una relación efectiva o potencial con la noción de igualdad (entendida como sistema) que establece un sujeto (o una institución) a partir de un conocimiento *a priori* de dicha noción. El modelo es pues una forma coherente de estructurar los diferentes contextos de uso, las prácticas matemáticas relativas a los mismos y los objetos emergentes de tales prácticas.

Según los diferentes contextos de uso, la práctica matemática se estructura en torno a ciertas nociones y técnicas matemáticas privilegiadas. Asimismo, la práctica matemática establece criterios básicos de demostración (sobre cómo evolucionan los procesos deductivos según la naturaleza de las condiciones) y determina pautas de término de una demostración (necesidad de obtención de una tautología semántica o aceptación de una taulogía lógica). De hecho, la estabilidad de los modelos en las instituciones educativas se fundamenta en un proceso de « objetivación de los modelos » que consiste en la determinación de un conjunto de *entidades discursivas* (nociones, argumentos, propiedades), otro de *entidades praxémicas* (problemas, acciones) y un lenguaje (gráfico, simbólico, oral, etc.) específicos de la noción matemática que se desea introducir o desarrollar. La estructuración de las entidades práxemicas y discursivas y la integración del lenguaje constituyen una red o configuración epistémica *local* (asociada a un contexto de uso específico). Cada configuración epistémica local « sintetiza » un aspecto parcial del significado de la noción correspondiente; a saber: aquél que se asocia con el sistema modelizador.

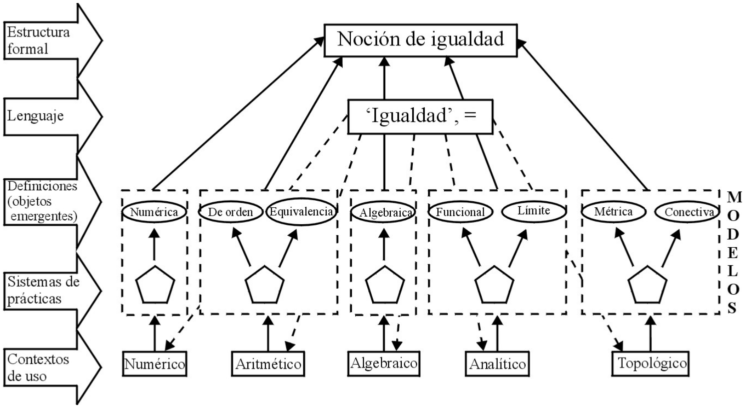

Figura 1. Estructuración de los modelos y significados asociados a la igualdad.

Por otro lado, la figura 1 muestra una estructuración estática de los modelos y significados asociados a la noción de igualdad, donde únicamente se indican (mediante flechas) relaciones de nivel entre los diferentes objetos involucrados: con relación a la noción de igualdad, en cada contexto de uso concreto, se asocia un modelo (sistema de prácticas - objetos emergentes), que determina un significado (parcial) de dicha noción. La actividad matemática constituye, sin embargo, un flujo entre los distintos niveles. De los sistemas de prácticas emergen entidades praxémicas, discursivas y lingüísticas, que, paulatinamente, se van integrando en dichas prácticas como reglas operatorias (saber hacer), como instrumentos de argumentación o regulación (saber) o como medios de expresión y comunicación. La *metáfora ecológica* (Godino, 1993) representa un enfoque pertinente para la descripción de la dinámica de la estructura propuesta.

La noción de *holo-significado* que introduciremos en la sección V nos permitirá interpretar la « igualdad » como una red de modelos asociados a ella (*configuración global*). Asimismo, la noción de *holo-significado* nos permitirá determinar qué expresamos al afirmar que una persona comprende la noción de igualdad.

V. HOLO-SIGNIFICADO DE LA NOCIÓN DE IGUALDAD

La práctica matemática ha asumido un fenómeno de homonimia con relación a la noción de igualdad; a saber, para evitar designar « cada » igualdad con un término diferente, se mantiene el nombre (igualdad) y el signo (=) común en todos los contextos de uso, aceptando el significado específico que se atribuye a la noción de igualdad en cada uno de ellos[15]. De hecho, desde el punto de vista estrictamente formal, se acepta que la definición de un objeto matemático constituye su significado. De esta forma, el problema homonimia se soluciona sin más que seleccionar una de las definiciones y demostrar a continuación la equivalencia del resto en un teorema. Por ejemplo, si se está trabajando en un contexto eminentemente analítico, se aceptará que dos números a y b son iguales si, para todo $\varepsilon > 0$, se cumple $|a - b| < \varepsilon$ (def.7) y el objetivo será demostrar el siguiente[16]:

> *Teorema 1 (Igualdad)* Dados dos números reales a y b, son equivalentes las siguientes proposiciones:
> 1. $a = b$.
> 2. $d(a; b) = 0$.
> 3. $\{a\} \equiv \{\mathrm{b}\}$.
> 4. $\{a; b\}$ es conexo.
> 5. $a \leq b \wedge b \leq a$.
> 6. Para toda ecuación E, $[\delta\,(E(a)) = 1 \Leftrightarrow \delta\,(E(b)) = 1]$.
> 7. Sea $F_i(D)$ el conjunto de las funciones inyectivas en un dominio D, entonces $\exists f \in F_i(D)$, $\{a, b\} \subseteq D$, tal que $f(a) = f(b)$.

Demostrar el teorema 1 supone afirmar que las definiciones dadas designan el mismo objeto (a saber, la igualdad); aún más, la definición de igualdad como proceso límite es considerada como « definición », mientras que el resto de definiciones como « caracterizaciones » unívocas de aquélla. La diferencia entre una definición y una caracterización obedece a convenios matemáticos o usos culturales más o menos explícitos. De esta manera, una caracterización de un objeto matemático es una definición del mismo que rivaliza con una definición anterior que se ha impuesto como natural dentro de unas prácticas institucionales y sobre la cual, por lo tanto, se ha perdido la conciencia del convenio que la sustenta. En la institución escolar se ha privilegiado la definición de igualdad aritmética como equivalencia y, por lo tanto, el resto de definiciones son consideradas como caracterizaciones. Esto supone, en la introducción de las primeras nociones del análisis, la necesidad de una reconstrucción de los modos de razonamiento con relación a la noción

15. Este hecho es una muestra de la imposibilidad de evitar los obstáculos en el progreso de aprendizaje: el discurso se ve constantemente abocado a decidir entre un fenómeno de sinonimia y uno (antagónico) de homonimia. El caso de la igualdad no es patológico; por ejemplo, Wilhelmi (2003) ha observado este mismo fenómeno respecto a las nociones *función continua* y *valor absoluto*.

16. En el teorema 1 se excluye la definición de igualdad numérica, que es de naturaleza esencialmente distinta. En la sección 2.2 hemos comentado la relación entre la definición numérica y la analítica como proceso de paso al límite.

de igualdad, que, en particular, hacen evolucionar la técnica de demostración por equivalencias sucesivas a la técnica de demostración por pérdida controlada de información y condiciones suficientes.

> « Le travail en analyse s'appuie à l'évidence sur des compétences algébriques mais il impose, dès que l'on ne se limite pas bien sûr à une analyse algébrisée, une reconstruction du rapport à l'égalité. Cette reconstruction s'accompagne d'un basculement des modes de raisonnement : on passe de raisonnements par équivalences successives basés sur la conservation d'égalités à des raisonnements par conditions suffisantes basés sur la perte contrôlée d'informations dans le traitement d'inégalités, l'égalité devenant une inégalité satisfaite à ε près pour tout ε strictement positif. » (Artigue, 1998, p. 239).

La equivalencia de definiciones se constata en el plano matemático, no en el *cognitivo* (puesto que, en particular, las definiciones no generan las mismas estrategias de acción) ni en el *instruccional* (ya que no vienen motivadas por una introducción equivalente del tópico) ni tampoco en el *didáctico* (dado que el significado social difiere y provoca filiaciones distintas entre el sujeto y el objeto igualdad, generando en el contrato didáctico cláusulas difícilmente equiparables). Por ello, el teorema 1 no representa un instrumento adecuado de estructuración de los modelos asociados a la noción de igualdad.

El estudio de los modelos de igualdad (junto con sus definiciones asociadas) y de la aplicación para la demostración de la proposición $\sqrt{2} = \frac{2}{\sqrt{2}}$ muestran, con relación al significado, la necesidad de un *tránsito flexible* entre los distintos modelos. Wilhelmi (2003) define el *pensamiento matemático flexible* como la acción realizada por un sujeto que le permite el tránsito rutinario entre diferentes modelos asociados a un objeto matemático, reconociendo las limitaciones propias de cada uno de ellos; asimismo, le permite establecer nexos firmes entre dichos modelos y uno o varios contextos matemáticos, que determinan un control eficaz de la actividad y capacitan al sujeto para responsabilizarse matemáticamente de los resultados que produce. El *holo-significado* incorpora las relaciones entre dichos modelos y las tensiones, filiaciones y contradicciones que entre ellos se establecen (que el pensamiento matemático flexible permite identificar, describir y controlar).

Ahora bien, ¿cómo describir el *holo-significado* de la noción de igualdad? Esta noción queda determinada (teóricamente) por las relaciones que se establecen entre los modelos asociados a ella. La figura 2 representa un esquema de dicha noción.

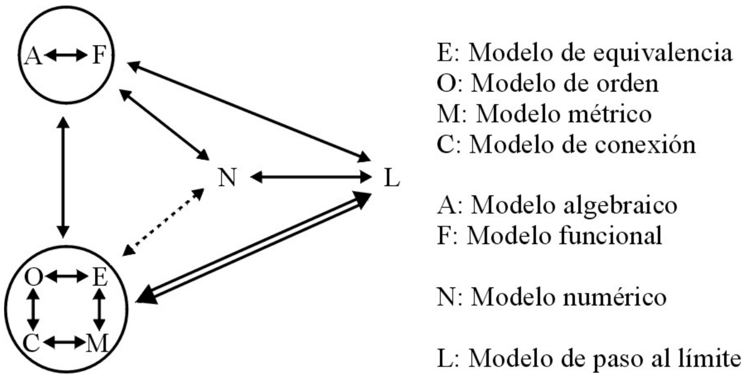

Figura 2. Representación del holo-significado de la noción de igualdad.

En la figura 2, las longitudes de las flechas de relación no son anecdóticas; tampoco el hecho de que unas sean de trazo sencillo, otras dobles y otra discontinua. La longitud determina la distancia de los modelos; distancia medida como *intervalo de tiempo* (dos modelos están próximos si su introducción se puede realizar de manera pertinente dentro de una misma unidad temporal del proceso de estudio) o como *intervalo de lugar* (dos modelos permanecen próximos en la medida en que son utilizados simultáneamente en una amplia clase de situaciones). Las flechas dobles refieren una interacción dialéctica entre modelos: un modelo se comprende esencialmente por oposición a otro modelo. La interacción, entonces, no es circunstancial a unas prácticas naturalizadas o a una estructuración cultural del saber, sino que tiene una relación inescindible con los propios modelos. La flecha discontinua determina una relación de naturaleza no esencialmente epistemológica, sino material (instrumentos de cálculo utilizados) o práctica (usos específicos en las instituciones educativas actuales). Por último, el halo que circunda los modelos determina un sistema de modelos que únicamente pueden ser diferenciados por las realizaciones, esto es, por los usos de los modelos, por los contextos donde aparecen y por el significado atribuido a los mismos.

De esta forma, la distancia entre el modelo aritmético como equivalencia (E) y el modelo analítico de paso al límite (L) se comprende por la debilidad de atracción entre los mismos: escasez de instrumentos ostensivos y ausencia casi total de discurso explícito que contribuya a la aproximación de ambos modelos. Con otras palabras, la debilidad de atracción es una manifestación del desequilibrio evidente que existe entre los modelos aritmético y analítico[17].

Cuando el modelo L « irrumpe », se produce una interacción constante con el modelo E. De hecho, por ejemplo, la sola escritura lím $a_n = a$ implica la aceptación *ipso facto* de ambos modelos. En este contexto, los modelos E y L permanecen próximos, puesto que son utilizados simultáneamente en una amplia clase de situaciones (proximidad de lugar); sin embargo, están muy distantes en el currículo, no siendo viable establecer en las instituciones escolares actuales (en los textos del saber) su emergencia dentro de una misma unidad temporal del proceso de estudio (distanciamiento de tiempo). ¿Qué implicaciones se derivan de esta distinción clara entre la distancia de lugar (ligada a las prácticas) y la distancia de tiempo (con relación al currículo)? Esta distinción parece constituir una condición necesaria para el surgimiento de un *obstáculo*, esto es, un conocimiento útil y pertinente (igualdad como equivalencia) dentro de una clase de situaciones (demostración de la igualdad de números algebraicos), pero que deja de serlo en un contexto de uso diferente (analítico) o para otra clase de situaciones (demostración de la igualdad de números transcendentes) y que la sola presentación de un nuevo conocimiento, que generaliza, restructura o sustituye el conocimiento original (definición analítica ε-δ), no es suficiente para la estabilidad dentro de las prácticas operatorias y discursivas futuras (analíticas). La naturaleza de este obstáculo es esencialmente didáctica[18], esto es, es el resultado de una transposición didáctica que el profesor no puede renegociar, al menos en el ámbito de la clase.

De lo dicho se desprende, por otro lado, que las prácticas escolares privilegian el modelo E y tienden, en muchos casos, huelga decirlo, a reafirmarlo, a perpetuarlo, incluso en ámbitos de aplicación que le son vedados. De hecho, el modelo L es comprendido únicamente, en muchas circunstancias, como un subproducto de la noción de límite; la designación de igualdad se restringe, entonces, en la práctica, a la noción

17. En realidad, desde el punto de vista cognitivo, no es evidente establecer que ambos son modelos de la misma noción. De hecho, habría que analizar con detenimiento cómo la idea de « proximidad » influye en la noción de igualdad como equivalencia (en particular, en el momento de emergencia de los números decimales en la escuela).

18. Al afirmar que « la naturaleza del obstáculo es *esencialmente didáctica* » estamos implícitamente aceptando que admite otra interpretación; en particular, epistemológica. De hecho, creemos que sería necesario estudiar « la composición » del obstáculo, pero esta investigación se escapa al objetivo de este artículo.

de igualdad aritmética como equivalencia, « como posibilidad de obtención de una tautología literal o semántica ». Este presupuesto condiciona el tipo de prácticas naturalizadas dentro de las instituciones escolares actuales con relación a la noción de igualdad; en concreto, la noción de igualdad es considerada una noción *paradidáctica* (Chevallard, 1985). Este fenómeno tiene un origen *cultural*, relacionado con los conocimientos didácticos y epistemológicos existentes en la actualidad en el ámbito de la noosfera (que se concretan en las transposiciones didácticas elaboradas).

El modelo L se explica únicamente por oposición dialéctica al modelo E, no siendo posible reducir la interacción entre dichos modelos a las prácticas naturalizadas o a una estructuración cultural del saber: la relación es consustancial a los propios modelos. No sucede así entre los modelos de orden, métrico, topológico y como equivalencia (algebraico y funcional), que son comprensibles de manera aislada, no siendo necesaria una referencia explícita a otro modelo. Además, la distancia entre estos es mínima, siendo posible discriminar un modelo de otro sólo por el contexto práctico donde aparece y por los efectos que provoca sobre el sistema.

El modelo numérico, como ya hemos señalado, juega un papel articulador entre los modelos algebraico y analítico, por ello se sitúa entre ambos; lo cual no implica que la relación entre los modelos algebraico y analítico siempre se realice por intermedio del modelo numérico. Por otro lado, la relación del modelo numérico con el modelo aritmético se realiza en función de los medios materiales utilizados (el signo igual de las calculadoras representa una aproximación numérica con un orden de aproximación fijado por las características técnicas de la misma) y de las prácticas naturalizadas en las instituciones actuales (se escribe, por ejemplo, que $\pi = 3{,}1416$, para expresar « aproximadamente iguales » o una « aproximación suficientemente buena », ¿pero esto no implica en sí mismo la aceptación de un error admisible?).

Por último, ¿qué quiere decir que una persona comprende la noción de igualdad? Sucintamente, que interpreta de manera adecuada la figura 2, esto es, que es capaz de discriminar los diferentes modelos de igualdad, de estructurar dichos modelos en un todo complejo y coherente y de afrontar las necesidades operativas y discursivas con relación a la noción de igualdad en los diferentes contextos de uso (ver sección III).

VI. IMPLICACIONES CURRICULARES DEL HOLO-SIGNIFICADO

El análisis hecho sobre la noción de igualdad no es circunstancial ni aislado. Wilhelmi (2003) hace un uso implícito del holo-significado como interacción de modelos matemáticos para la descripción sistémica de las nociones « función continua » y « valor absoluto », interpretando estas nociones como configuraciones epistémicas donde quedan jerarquizados los diferentes modelos en niveles de abstracción y generalidad (función continua) o en niveles de formalización y expresión sintáctica (valor absoluto). Asimismo, determina un marco para dichas nociones dentro del sistema didáctico, esto es, una perspectiva global de qué técnicas se quiere enseñar en un proyecto global de enseñanza. Por otro lado, la descripción del significado de referencia del objeto estadístico « mediana » que se presenta en Godino (2002) como un listado de objetos clasificados en seis categorías (problemas, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentos), puede ser comprendido como el « sustrato base » del holo-significado de la noción de mediana (siendo necesario un análisis relacional que en dicho trabajo queda únicamente apuntado)[19].

Vinner (1991) sugiere que una de las metas de la enseñanza de las matemáticas debería ser encauzar más tempranamente los hábitos de pensamiento cotidiano hacia el modo del pensar técnico-científico y concluye que, en la adquisición de un conocimiento, la definición es la mejor representación del conflicto entre la estructura de las matemáticas y el progreso cognitivo. Sin embargo, en una enseñanza basada en la

19. Hasta la fecha, la noción de holo-significado ha sido utilizada para estructurar y describir nociones matemáticas; sin embargo, cabe preguntarse si la noción de holo-significado puede ser pertiente para la descripción de otras entidades primarias que no sean nociones (argumentos, acciones, problemas o proposiciones). *A priori*, es admisible aceptar que la noción podría utilizarse, en particular, para observar en qué contextos y de qué forma se utiliza un determinado tipo de argumentación (en particular, una técnica de demostración matemática), de tal manera que se pudieran seleccionar los problemas y proposiciones para introducir o desarrollar dicho tipo de argumentación. Por ejemplo, la demostración por inducción matemática es utilizada en diferentes contextos (analítico, combinatorio, etc.) y sería conveniente describir y estructurar las prácticas operatorias y discursivas con relación a este método de definición y demostración y clasificar con relación a la inducción matemática: a los problemas, según su especificidad (¿pueden ser resueltos por métodos alternativos?); a las acciones, según su efectividad (¿con qué costo permiten obtener una solución o una justificación a una determinada clase de problemas?) y según su campo de aplicación (¿en qué tipo de problemas son pertintes?); a las nociones, según su frecuencia de empleo (la noción de sucesión es consustancial al método de inducción matemática, ¿qué otras nociones utilizadas son consustanciales de igual manera a dicho método?).

teoría pedagógica del currículo[20] se infravalora la definición. Y es que, desde la citada perspectiva teórica, la cuestión de fondo es la temporalización y secuencia de contenidos: se introduce un conjunto « suficiente » de nociones, técnicas y proposiciones, para, progresivamente, definir nuevas nociones, descubrir nuevos procedimientos y enunciar nuevos teoremas. Frecuentemente, la introducción de las nociones se realiza de forma ostensiva, de suerte que, a posteriori, casi de manera irremediable, el conocimiento se mostrará ineficaz para afrontar situaciones complejas. Entonces, el sistema educativo procede a definir las nociones, otra vez ostensivamente y de manera formal. A partir de este momento, se acepta, generalmente de forma implícita, que las nociones se adquieren por medio de sus definiciones y que los estudiantes son capaces de usar éstas para resolver problemas y probar teoremas. En definitiva, se presume una transparencia entre el objeto matemático y su definición formal.

En el *Programa Epistemológico* (Gascón, 1998) el saber matemático es explícitamente problematizado y, por lo tanto, no se presume que una definición de un objeto matemático sea la « medida » del mismo. De hecho, con vistas a la enseñanza y aprendizaje de un tópico matemático, es necesaria una modelización explícita de dicho objeto. Estas modelizaciones condicionan la estructuración del currículo en una institución, puesto que representan transposiciones de las obras matemáticas. En estos procesos transpositivos es necesario determinar las técnicas que se desea enseñar (y justificaciones de estas técnicas), que condicionan los sistemas de prácticas ante una clase de problemas. De esta forma, el holo-significado de un objeto matemático descrito, como interacción de modelos matemáticos asociados a dicho objeto, constituye una herramienta macro y micro didáctica.

La determinación de las técnicas que se desea enseñar permite establecer orientaciones sobre la ecología de los saberes y la elaboración de una transposición didáctica pertinente, que se concretará en la construcción de un currículo o en la determinación de pautas generales para la confección de un libro de texto dentro de una institución concreta (nivel macrodidáctico). Por otro lado, es posible establecer criterios de descripción y comprensión de las concepciones de los estudiantes en la construcción y comunicación de conocimientos matemáticos específicos

---

20. Gimeno y Pérez (1983, pp. 189-250) hacen una descripción de la *Teoría del currículo* desde su perspectiva pedagógica original, la cual determinó, en particular, la elaboración de los « diseños curriculares base » (MEC, 1989). Chevallard, Bosch y Gascón (1997, pp. 141-147) dan una visión crítica de dicha teoría desde la didáctica de las matemáticas.

(que constituyen el núcleo de los sistemas de prácticas operatorias y discursivas con relación a la noción de igualdad, ver sección III), así como potenciales formas de gestión de un aprendizaje de tipo constructivista, donde el profesor necesita, « en tiempo real », anticipar las acciones de los estudiantes y desarrollar mecanismos de recogida de información y de interpretación, así como estrategias de actuación y toma de decisiones, adaptándose a situaciones concretas (nivel micro-didáctico). En la siguiente sección resaltamos algunas consideraciones macro y micro didácticas con relación a la noción de igualdad.

VII. SÍNTESIS Y CONCLUSIONES

La evolución de la didáctica de las matemáticas ha venido marcada por una ampliación progresiva de su objeto principal de interés: de la búsqueda exclusiva de dispositivos para la acción directa en los procesos de enseñanza y aprendizaje (didáctica *normativa* o *técnica*) hacia la complementación mediante el análisis de hechos y fenómenos de enseñanza y aprendizaje (didáctica como *disciplina científica*). A esta ampliación han contribuido de manera determinante estudios epistemológicos robustos, cuyo objetivo es la determinación de una referencia objetiva que pueda servir para el análisis de realizaciones efectivas o potenciales.

El estudio epistemológico que hemos realizado determina un marco para valorar la « efectividad » de posibles *intervenciones didácticas*[21], resultado de adaptaciones representativas del significado institucional de referencia con relación a la noción de igualdad. Por lo tanto, las conclusiones que ahora esbozamos, de marcado carácter teórico, no buscan cambios escolares « efectivos » e inmediatos, sino *regular* las posibles acciones didácticas para la introducción o desarrollo de la noción de igualdad.

1. Macrodidácticas

El estudio realizado sobre la noción de igualdad apoya pone de manifiesto, en particular, la necesidad de elaborar instrumentos mejor adaptados a la enseñanza integrada de la aritmética, el álgebra y el análisis; en concreto, medios para evitar los fenómenos de *linealidad* y *reduccionismo*. Brevemente, la linealidad se puede describir afirmando que « la

21. « Las intervenciones didácticas son *regulaciones* destinadas a mantener equilibrios, más que a producir directamente efectos, y esas regulaciones son específicas de la noción matemática. » (Brousseau, 2000, p.25).

aritmética precede al álgebra y ésta al análisis ». Se entiende con esto que son « obras cadena » y que el aprendizaje de cada una establece condiciones previas necesarias para el aprendizaje de la « siguiente ». El esquema de enseñanza es:

$$\text{Aritmética} \rightarrow \text{Álgebra} \rightarrow \text{Análisis}$$

El reduccionismo se puede describir en los siguientes términos: el álgebra es comprendida como una aritmética generalizada (con letras) y el análisis como un álgebra de funciones. De esta manera, la enseñanza del álgebra se centra en la manipulación simbólica y en generalizar los métodos aritméticos concretos (implementados sobre números concretos); según Gascón (1994), este hecho ha conducido a una verdadera desarticulación del cuerpo de problemas de la aritmética generalizada. Por otro lado, la enseñanza del análisis ha intentado mostrar la potencia de las manipulaciones formales esbozadas en la enseñanza del álgebra. Estos dos reduccionismos invierten, en la práctica, el esquema anterior:

$$\text{Aritmética} \leftarrow \text{Álgebra} \leftarrow \text{Análisis}$$

La noción de igualdad no puede ser restringida a un contexto matemático único. En efecto, el signo « = » viene determinado por el conjunto de relaciones que se establecen entre los modelos asociados a él y que emergen de las prácticas usuales en las instituciones educativas actuales. Estas prácticas han privilegiado sobremanera el modelo aritmético, remarcando la importancia de las transformaciones « por equivalencias » y la simplificación de expresiones aritméticas y algebraicas para la obtención de representantes « canónicos » de los objetos matemáticos.

Esta focalización del tipo de tareas ha determinado que las relaciones fundamentales entre el sistema conformado por los modelos aritmético, de orden, métrico y topológico y el sistema algebraico-funcional y los modelos analítico y numérico sean de tipo dialéctico; de esta manera, no es posible, en particular, la comprensión de la noción analítica de igualdad como proceso límite sino por oposición a la noción aritmética de relación de equivalencia entre dos objetos[22].

El análisis de la noción de igualdad es una muestra de que la enseñanza atomizada y lineal de la aritmética, el álgebra y el análisis (en este orden) no contribuye al aprendizaje de estas obras matemáticas; es necesaria una concepción triangular que permita, en cada pro-

22. De hecho, nuestro estudio epistemológico confirma los análisis empíricos y teóricos realizados por otros autores (Bloch, 1995; Artigue,1998; Wilhelmi, 2003).

blema concreto, la interacción de aproximaciones numéricas, algebraicas y analíticas para la obtención de una solución. Por ejemplo, dada la sucesión de Fibonacci (a_n), para la determinación del límite de la sucesión (a_{n+1}/a_n), el análisis numérico-concreto permite la determinación de un valor aproximado « tentativo » (intervalo de soluciones plausibles); el algebraico, la formalización del cálculo del límite (valor exacto); el analítico, la argumentación de la existencia y unicidad de límite. La valoración de las acciones y argumentos utilizados en cada caso se determina por su eficacia en la resolución o justificación de cada una de las tareas. No hay un *momento* (Chevallard, 1997) « más importante » que otro: la determinación de un valor aproximado (*momento exploratorio*) permite establecer un intervalo de aceptación o rechazo del valor exacto obtenido (*momento tecnológico*) y la justificación de la existencia y unicidad de dicho valor (*momento teórico*) establece la pertinencia de los cálculos realizados.

El estudio realizado sugiere el desplazamiento del foco de interés en la enseñanza del análisis matemático: de los análisis formales (por ejemplo, manipulaciones literales de funciones algebraicas) hacia la comunicación y construcción de conocimientos de forma más intuitiva, gráfica y numérica (donde la comparación y la aproximación representan procesos fundamentales). En este contexto, las nuevas tecnologías (calculadoras gráficas y programables y softwares especializados) deben jugar un papel central en la introducción de las nociones, procesos y significados de objetos analíticos. De hecho, « la recherche en didactique de l'analyse ne peut se déployer en faisant abstraction de la dimension technologique » (Artigue, 1998, p. 258).

De esta forma, se denuncia una supuesta necesidad funcional en la enseñanza del cálculo numérico que lo pospone a la introducción y desarrollo de las nociones fundamentales del análisis matemático. El estudio numérico de las relaciones entre objetos constituye una vía de acceso a la noción de igualdad, posibilitando un tránsito flexible entre los diferentes modelos propuestos. No hay pues una oposición entre las justificaciones analíticas y numéricas, ni una gradación pragmática de las mismas (ésta únicamente puede establecerse con relación a una teoría y a unos criterios preestablecidos sobre el discurso matemático).

2. Microdidácticas

Es necesario construir una ingeniería didáctica para el desarrollo del objeto « igualdad » tal y como ha sido mostrado. Dentro de la Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) (Brousseau, 1998) esto supondría la búsqueda de una situación fundamental, capaz de generar (en la mayoría de los estudiantes) tensiones estables con gran parte de los modelos ligados al saber igualdad, así como filiaciones útiles con los contextos de uso donde dichos modelos se inscriben.

La determinación de una situación fundamental de la noción de igualdad es compleja. Hemos razonado cómo el modelo analítico de igualdad es comprendido, en muchas circunstancias, como un subproducto de la noción de límite; a saber:

$$a = b \Leftrightarrow a_n = a,\ \forall\ n \in \mathrm{N},\ \text{lím}\ a_n = b$$

Este hecho, unido a la relación dialéctica entre los modelos aritmético como equivalencia y analítico como proceso límite, representa un apoyo epistemológico para conjeturar que la búsqueda de una situación fundamental de la noción de igualdad es equivalente a la búsqueda de una situación fundamental de la noción de límite secuencial y, por lo tanto, relacionar la problemática de la búsqueda de una situación fundamental para la noción de igualdad con otra que ha sido ampliamente debatida (limitaciones de la situación del petrolero (Di Martino, 1992); la posibilidad de obtención de situaciones con un componente esencial adidáctico (Bloch, 1999); uso de las calculadoras gráficas y programables *TI-81* para la introducción de la noción de límite secuencial (Wilhelmi 2003); etc.). Asimismo, la conjetura de la equivalencia de los dos problemas de investigación encuentra sustento en otras investigaciones didácticas. Por ejemplo, Cornu (1991) distingue diferentes modelos de la noción de límite, en los cuales se problematiza, implícitamente, la noción de igualdad cuando hay un proceso infinito mediante caracterizaciones de la « aproximación », la « tendencia » o la « distancia ». Tall & Vinner (1981) introducen la noción de *conflicto cognitivo* para resaltar situaciones en las que la « intuición » y el « cálculo formal » no son compatibles; por ejemplo, la justificación de que $0{,}\overline{9} = 1$ mediante la fórmula general de la suma infinita de una progresión geométrica de razón menor que uno[23] se « opone » a la intuición (incorrecta) de que « $0{,}\overline{9}$ tiene cada vez más nueves y, entonces, se aproxima cada vez más a 1, pero nunca lo alcanza ». Por último, Artigue (1998, p. 239) es mucho más explícita en establecer una relación entre la nociones de límite (secuencial) y de igualdad:

> « On travaille d'abord sur des objets préconstruits auxquels on essaie de donner sens par un ensemble de pratiques; ce n'est que dans un second temps que ces objets sont censés prendre le statut d'objets construits assujettis à des définitions. L'enseignement actuel du concept de limite, central en analyse, en est un exemple évident et les besoins mathé-

23. La expresión $0{,}\overline{9}$ puede ser interpretada como una progresión geométrica de razón 1/10 y primer término 9/10.

> matiques des reconstructions ci-dessus évoquées [ver cita anterior de Artigue, sección V] aident bien à comprendre, nous semble-t-il, ce qui peut séparer la capacité à donner un sens intuitif au concept, à l'illustrer par des exemples et contre-exemples, de la capacité à manipuler opérationnellement le concept avec son statut d'objet construit, assujetti à des preuves formelles. » (Artigue, 1998, p. 239).

La complejidad apuntada no implica el rechazo de la búsqueda de una situación fundamental, ni para la noción de límite secuencial ni para la noción de igualdad. Legrand (1996) ha defendido la tesis paradójica según la cual la búsqueda de situaciones fundamentales es consistente tanto para la investigación en didáctica de las matemáticas como para la enseñanza, independientemente de si se encuentra o no una situación. Grosso modo, Legrand justifica la búsqueda de situaciones fundamentales porque constituye un instrumento fructífero de análisis de saberes, de determinación del proyecto de enseñanza y de selección de intervenciones didácticas. Aún más, « la recherche des situations fondamentales est un passage obligé pour le professeur qui veut engager et gérer un réel 'débat scientifique' sur un savoir précis » (Legrand, 1996, p. 223).

El Enfoque Ontológico y Semiótico (EOS) (Godino, 2003) determina una solución para elaborar una « enseñanza de calidad », esto es, una enseñanza que conjugue el *saber hacer* (técnica) y el *significado* (ámbito de aplicabilidad de la técnica), que articule el análisis epistemológico propio de la búsqueda de una situación fundamental (se haya o no obtenido una) con las restricciones metodológicas y de tiempo dentro de una institución concreta. En particular, con relación a la noción de igualdad, el objetivo consistiría en establecer un sistema de prácticas institucionales que posibilite la interacción explícita del modelo aritmético de igualdad con el resto de modelos y, muy en particular, con el modelo analítico, de tal forma que la noción de igualdad, comprendida como sistema, reequilibre los pesos que los modelos tienen con relación al significado personal que los sujetos le atribuyen.

3. Teóricas

La Teoría de Situaciones Didácticas (TSD) postula que todo « saber » puede ser modelizado por una o varias situaciones adidácticas que preservan el significado atribuido a dicho saber. La noción de saber, dentro de la TSD, se refiere explícitamente a los conocimientos que son objeto de estudio (explicitables, comunicables y validables o invalidables) en una cultura y en una sociedad determinada. La noción de *holo-significado* (red de modelos) representa la estructuración del conocimiento objetivado y, por lo tanto, constituye una referencia para el proceso de modelización apuntado. Aún más, la noción de holo-significado puede ser utilizada en el análisis *a priori* de la búsqueda de una situación fundamental para la introducción o desarrollo de una determinada noción matemática; en concreto, determinar el grado de representatividad de la situación con relación al significado institucional pretendido.

Asimismo, las nociones de modelo y holo-significado de un objeto matemático son herramientas teóricas para el análisis epistemológico de los objetos discursivos matemáticos, esto es, los productos culturales resultantes de la actividad matemática. Las nociones de modelo y holo-significado proponen una respuesta a las preguntas: ¿qué es una noción matemática?, ¿qué es conocer dicha noción?; en particular, ¿qué es la noción de igualdad?, ¿qué quiere decir conocer la noción de igualdad?

Por otro lado, como hemos comentado, los sistemas de prácticas operativas y discursivas son al EOS lo que las praxeologías matemáticas son a la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD). De esta forma, la noción de praxeología representa un componente de un esquema más general de la actividad matemática (y de los productos que de ella se obtienen) propuesto dentro del EOS. De forma más precisa, el EOS considera que cada noción matemática es el antecedente (expresión) de una función semiótica (Godino, 2002) cuyo consecuente (significado) es la configuración formada por el sistema de prácticas, contextos de uso de la expresión y la red de objetos emergentes de tales sistemas de prácticas (figura 3).

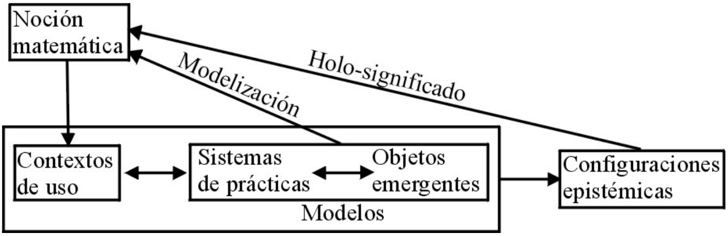

Figura 3. Herramientas para el análisis epistemológico en el EOS.

De esta manera, la diferencia esencial entre la TAD y el EOS queda determinada por la forma en que ambas describen y analizan la actividad matemática. El EOS se preocupa por la determinación de una ontología matemática específica, en la descripción de las funciones semióticas posibles entre los objetos matemáticos involucrados en la actividad matemática y en la caracterización de la naturaleza de dichos objetos. La TAD se centra en la determinación de praxeologías (los objetos matemáticos pueden ser descritos únicamente como constituyentes de praxeologías) y en el análisis de la problemática ecológica dentro de las instituciones (los objetos matemáticos representan el producto de una actividad institucional).

> « La TAD situe l'activité *mathématique*, et donc l'activité d'*étude* en mathématiques, dans *l'ensemble des activités humaines et des institutions sociales* […] On y admet en effet que *toute* activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle *unique*, que résume ici le mot de *praxéologie*. » (Chevallard, 1999, p. 223).

Por último, las nociones de praxeología y de configuración epistémica constituyen herramientas poderosas para el análisis didáctico y curricular. Las teorías del currículo estructuran la materia objeto de estudio en contenidos *conceptuales*, *procedimentales* y *actitudinales*, obviando la especificidad de cada disciplina. La aplicación del modelo de descripción y análisis de la actividad matemática propuesto por la TAD supondría para la estructuración del currículo la identificación de las técnicas necesarias para abordar el tipo de tareas que los estudiantes tendrán que afrontar, resaltando las tensiones que fuerzan la aparición de una determinada técnica y las justificaciones necesarias para su « vida » en el contexto escolar (tecnologías y teorías subyacentes). Sin embargo, en el proceso de estudio no siempre se explicita la cuaterna (tarea, técnica, tecnología, teoría).

> On peut imaginer un monde institutionnel dans lequel les activités humaines seraient régies par des praxéologies bien adaptées permettant d'accomplir toutes les tâches voulues d'une manière à la fois efficace, sûre et intelligible. Mais un tel monde n'existe pas […] Ordinairement, la pénurie praxéologique se traduit d'abord par un manque de *techniques*. (Chevallard, 1999, pp. 230-232).

El EOS, por su lado, distingue seis categorías de objetos primarios constituyentes de un sistema de prácticas: problemas, acciones, lenguaje, nociones, propiedades y argumentos. Una configuración epistémica es el sistema de objetos (y de funciones semióticas que se establecen entre estos objetos) con relación a la comunicación, validación, formulación o resolución de una situación matemática. De esta forma, el EOS permite describir el análisis de las demostraciones de la proposición $\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$ en términos de la noción de sistema de prácticas operatorias y discursivas, sin necesidad de explicitar técnicas generales de demostración o procedimientos de justificación de esas técnicas. En efecto, el núcleo del discurso está constituido por las *definiciones*, que no representan elementos de una praxeología (entendida como cuaterna), sino más bien los objetos ostensivos de una configuración epistémica con relación a la demostración de la proposición $\sqrt{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}$ (*problema*); de hecho, la *argumentación* de las demostraciones se realiza mediante un *lenguaje* formalizado, se fundamenta en ciertas *nociones* (recta real, relación de orden, distancia, conexión, ecuación, función inyectiva, entorno-límite, error-aproximación), se apoya en *propiedades* de las nociones involucradas y en leyes lógicas (el tercio excluso, por ejemplo) y se lleva a cabo por medio de *acciones* específicas (selección de representantes de un objeto matemático, definición de intervalos o funciones, edición de un programa, etc.).

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco de los proyectos: Resolución nº 1.109/2003 de 13-octubre de la UPNA y MCYT-FEDER BSO2002-02452.

REFERENCIAS

ALIPRANTIS C.D., BURKINSHAW O. (1999), *Problems in real analysis. A Workbook with solutions*, 2nd Edition. San Diego, CA: Academic Press.

ANTIBI A., BROUSSEAU G. (2000), La dé-transposition de connaissances scolaires. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 20(1), 7-40.

ARTIGUE M. (1998), L'évolution des problématiques en didactique de l'analyse. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 18(2), 231-262.

AYALA R., DOMÍNGUEZ E., QUINTERO A. (1997). *Elementos de la topología general.* Madrid: Addison –Wesley Iberoamericana.

BLOCH I. (1995), *Approche didactique de l'enseignement des premiers concepts de l'analyse*, Mémoire DEA. Bordeaux : Univesité Bordeaux I, LADIST.

BLOCH I. (1999), L'articulation du travail mathématique du professeur et de l'élève dans l'enseignement de l'analyse en première scientifique. Détermination d'un milieu. Connaissances et savoirs. *Recherche en Didactique des Mathématiques,* 19(2), 135-194.

BOLEA P., BOSCH M., GASCÓN J. (2001), La transposición didáctica de organizaciones matemáticas en proceso de algebrización: el caso de la proporcionalidad. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 21(3), 247-304.

BOYER C. (1969), *Historia de la matemática.* Madrid: Alianza Universidad, 1996.

BROUSSEAU G. (1998), *Théorie des Situations Didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

BROUSSEAU G. (2000), Educación y didáctica de las matemáticas. *Educación Matemática*, 12(1), 5-38.

BROWN J.R. (1998), What is a definition? *Foundations of Science*, 1, 111-132.

CANTORAL R., FARFÁN R. M. (2003), Mathematics Education: a vision of its evolution. *Educational Studies in Mathematics*, 53, 255-270. Dordrech, HOL: Kluwer.

CHEVALLARD Y. (1985), *La transposition didactique*. Grenoble : La Pensée Sauvage.

CHEVALLARD Y. (1997), Familière et problématique, la figure du professeur. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 17(3), 17-54.

CHEVALLARD Y. (1999), L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-266.

CHEVALLARD Y., BOSCH M., GASCÓN J. (1997), *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje*. Barcelona: ICE – Horsori, Universitat de Barcelona.

CORNU B. (1991), Limits. In D. Tall (ed.), *Avanced mathematical thinking* (pp. 133-166). Dordrecht, HOL: Kluwer.

DI MARTINO H. (1992), *Analyse du contrôle épistemologique d'une situation didactique: La situation du pétrolier*, Mémoire DEA. Grenoble : IREM Grenoble. [URL: http://www.ac-grenoble.fr/irem/publications.html]

DOUADY R. (1986), Jeux de cadres et dialectique outil-objet. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

FREUDENTHAL H. (1986), *Mathematics as an educational task*. Dordrecht, HOL: Reidel.

GASCÓN J. (1994), Un nouveau modèle de l'algèbre élémentaire comme alternative à 'l'arithmetique généralisée'. *Petit x* 37, 43-63.

GASCÓN J. (1998), Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 18 (1), 7-33.

GIMENO J., PÉREZ A. (1983), *La enseñanza: su teoría y su práctica*. Madrid: Akal.

GODINO J.D. (1993), La metáfora ecológica en el estudio de la noosfera matemática. *Quadrante*, 2(2), 69-79.

GODINO J.D. (2002), Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 22(2/3), 237-284.

GODINO J.D. (2003), *Teoría de las funciones semióticas. Un enfoque ontológico-semiótico de la cognición e instrucción matemática*. Granada: Dept. de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada. [URL: http://www.ugr.es/local/jgodino]

GODINO J.D., BATANERO M.C. (1994), Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 14(3), 325-355.

INDURÁIN E. (2001), *Memoria sobre concepto, método, organización, funciones y programas en la docencia e investigación en el área de Análisis Matemático*. Pamplona, ESP: Universidad Pública de Navarra.

LAKATOS I. (1976), *Proofs and Refutations*. Cambridge, UK: Cambridge University Press.

LEGRAND M. (1996), La problématique des situations fondamentales. Confrontation du paradigme des situations à d'autres approches didactiques. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 16(2), 221-280.

LEIKIN R., WINICKI-LANDMAN G. (2000), On equivalent and non-equivalent definitions: part 1. *For the Learning of Mathematics*, 20(1), 24-29.

LORENZO J. DE (1974), *La filosofía de la matemática de Poincaré*. Madrid: Tecnos.

MEC (1989). *Diseño curricular base*. Madrid: Ministerio de Educación y Ciencia.

ROSS K. A. (1980), *Elementary analysis: the theory of calculus*. New York: Springer-Verlag, 2000.

RUSSELL B. (1903), *Los principios de la matemática*. Madrid: Espasa-Calpe, 1967.

SÁENZ-LUDLOW A., WALGAMUTH C. (1998), Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics*, 35, 153-187. Dordrech, HOL: Kluwer.
SCHNEIDER M. (2001), Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques à propos d'un enseignement des limites au secondaire. *Recherche en Didactique des Mathématiques*, 21(1/2), 7-56.
TALL D. (ED.) (1991), *Avanced mathematical thinking*. Dordrecht, HOL: Kluwer.
TALL D., VINNER S. (1981), Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
VINNER S. (1991), The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In D. Tall (ed.), *Avanced mathematical thinking* (pp. 65-81). Dordrecht, HOL: Kluwer.
WILHELMI M.R. (2003), *Análisis epistemológico y didáctico de nociones, procesos y significados de objetos analíticos*. Sección 2: Tesis doctorales, nº23. Pamplona: Universidad Pública de Navarra.