Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática[1]

Juan D. Godino

Universidad de Granada

Resumen:

Tratamos de mostrar la complejidad del conocimiento matemático, tanto en su dimensión institucional como personal, usando un modelo cognitivo que tiene en cuenta las interacciones entre los componentes lingüísticos, situacionales y regulativos de las matemáticas. Esta complejidad se muestra mediante el análisis de los conocimientos empíricos y matemáticos puestos en juego en la realización de una tarea escolar sobre la medida del peso. El análisis realizado se utiliza como contexto para reflexionar sobre el uso de las nociones de competencia y comprensión, relacionándolas con los componentes situacionales y regulativos, respectivamente, de los conocimientos de los estudiantes.

1. Introducción

Desde el punto de vista pragmático el significado de un término o expresión se debe buscar en su uso en los distintos contextos donde se pone en juego (D'Amore, 2001). Pero si indagamos en los usos de los términos y expresiones en la práctica cotidiana, o incluso en campos especializados del saber, encontramos inconsistencias y diversidad de significados. En algunos casos *competencia* viene a ser sinónimo de "capacidad general de alguien para hacer algo", mientras que en otros se restringe a la capacidad de realizar determinadas actividades prácticas. Goldin (1998) afirma que "La competencia humana se refiere a la capacidad de realizar una tarea en un momento dado, bajo condiciones que son parcial o incompletamente especificadas"(p. 147).

También la *comprensión* suele referirse más bien al dominio de los aspectos conceptuales y discursivos del conocimiento, pero también se habla de "comprensión instrumental" (Skemp, 1976), y en este caso, viene a ser sinónimo de "competencia". ¿Qué relación existe entre la comprensión y la competencia con los conocimientos y destrezas? La confusión y vaguedad con la que se usan estos constructos en el ámbito de la innovación curricular queda ilustrada con la siguiente cita de los Principios y Estándares 2000 del NCTM:

[1] Versión revisada de la conferencia impartida en el XVI Convengo Nazionale: Incontri con la Matemática. Castel San Pietro Terme (Bologna), 8-9 Novembre 2002.

"Los diez Estándares presentados describen un cuerpo conectado de comprensiones y competencias matemáticas -un fundamento global recomendado para todos los estudiantes, mas bien que un menú para hacer elecciones curriculares. Los Estándares son descripciones de lo que la instrucción matemática debería capacitar a los alumnos para conocer y hacer. Especifica las comprensiones, los conocimientos y destrezas que los estudiantes deberían adquirir desde preescolar hasta el grado 12" (p. 29).

Para la educación matemática, tanto en su vertiente de acción práctica, como de campo de conocimiento científico, es importante clarificar el uso del lenguaje cognitivo, esto es, de las herramientas teóricas que usamos para referirnos tanto a los objetos de enseñanza (contenidos, conocimientos o saberes) como a los aprendizajes de los estudiantes (concepciones, esquemas, comprensiones, competencias, capacidades, destrezas, etc).

Se trata, en última instancia de una clarificación de qué sea el conocimiento y sus variedades, cuestión de extraordinaria complejidad, ya que como afirma el filósofo y sociólogo francés Edgar Morin,

La noción de conocimiento nos parece una y evidente. Pero, en el momento en que se le interroga, estalla, se diversifica, se multiplica en nociones innumerables, planteando cada una de ellas una nueva interrogante" (E. Morin, 1977, p. 18)

Desde hace varios años tratamos de aportar una posible solución a este problema de índole filosófica (Godino y Batanero, 1994; Godino, 2002; D'Amore y Godino, 2006; Godino, Batanero y Font, 2006) proponiendo un enfoque ontosemiótico integrador sobre los objetos constituyentes del conocimiento matemático. Partimos del postulado de que no es posible tener un modelo cognitivo adecuado para la educación matemática si no adoptamos (o construimos) otro suficientemente rico de los objetos de conocimiento matemático y de la actividad de la cual provienen tales objetos.

En este trabajo vamos a presentar, mediante un ejemplo referido a la medida de la magnitud peso, las principales características del modelo cognitivo que proponemos para la educación matemática, en el cual se considera el "objeto matemático" como emergente de los "sistemas de prácticas operatorias y discursivas que un sujeto, persona o institución, realiza para resolver un tipo de situaciones-problemas".

Veremos la conveniencia de atribuir un significado distinto y complementario a las nociones de competencia y comprensión matemática, relacionado con los componentes operatorios y discursivos del conocimiento, respectivamente. No obstante, otro uso más amplio que se suele hacer de competencia, sobre todo en los contextos de innovación curricular, es para referir a todo el complejo cognitivo que comprende tanto los aspectos operatorios como discursivos del conocimiento matemático.

Trataremos de mostrar que existe una relación estrecha entre la competencia y la comprensión matemática, entre la práctica y la teoría. Lo haremos usando el ejemplo de la medida de magnitudes (el peso), mostrando que un componente esencial del aprendizaje debe ser *saber qué* se mide y qué nos proporciona la medida; este aprendizaje debe ser complementado con el dominio de las técnicas de medida. En cada elemento del significado sistémico de la medida aparece la dialéctica praxis – logos (Chevallard, 1999). Por ejemplo, para comprender qué se mide es necesario entrar en contacto (percibir) con los objetos del mundo exterior, hacer actividades de clasificación y comparación. Es necesario comprometerse con situaciones de comunicación del tamaño de las colecciones, y de búsqueda de relaciones entre cantidades. Esto a su vez nos lleva a la selección de referentes o términos de comparación (unidades de medida) y al desarrollo de técnicas de medidas, que deben ser dominadas y comprendidas. Estos elementos determinan una *configuración*[2] empírica de la medida. Pero veremos también que este sistema de prácticas operativas y discursivas de naturaleza empírica está estrechamente relacionado con otros sistemas de prácticas y configuraciones matemáticas que facilitan o hacen posible el desempeño de las tareas.

2. Análisis de la medida de la magnitud peso: Competencia y comprensión de la medición

Para poder evaluar de manera válida la competencia y comprensión de los estudiantes sobre la medida de magnitudes necesitamos elaborar un modelo para el significado sistémico de la medida de magnitudes que podamos usar como referencia para organizar y evaluar los procesos de estudio correspondientes.

A continuación presentamos la relación de “objetos" (ostensivos y no ostensivos), incluyendo las acciones (reales y mentales) que se ponen en juego en el proceso de medida de la magnitud peso. Usaremos como ejemplo una tarea escolar extraída de un libro de texto de primaria. El enunciado se apoya en la representación de una experiencia de pesar un animalito con una balanza de platillos (Figura 1). En uno de los platillos se representa un conejo y en el

[2] Redes de objetos intervinientes y emergentes de los sistemas de prácticas y las relaciones que se establecen entre los mismos. Estas configuraciones pueden ser *epistémicas* (redes de objetos institucionales) o *cognitivas* (redes de objetos personales). Los sistemas de prácticas y las configuraciones se proponen como herramientas teóricas para describir los conocimientos matemáticos, en su doble versión, personal e institucional (Godino, Batanero y Font, 2006; p. 9).

otro 3 pesas, una marcada como 2 kg, otra de 500 g y otra de 10 g. Ambos platillos están alineados horizontalmente.

(1) ¿Cuál es el peso en gramos del conejo?
(2) ¿Cuánto pesarán aproximadamente cinco conejos?

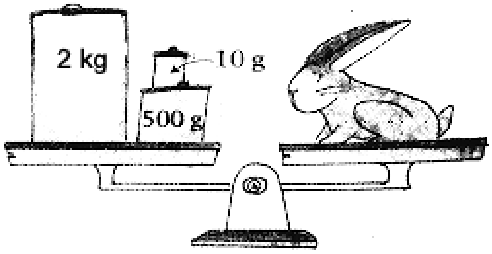

Figura 1

Se espera que el alumno dé las siguientes respuestas:

R1: 2510 gramos;

R2: 5 x 2510 = 12.550; 12.550 gramos.

A título de ejemplo vamos a analizar los conocimientos institucionales que se ponen en juego en esta tarea usando las herramientas teóricas proporcionadas por el Enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático (Godino, Batanero; 1994; Godino, Batanero y Font, 2006). Pretendemos mostrar la complejidad cognitiva de una tarea escolar, aparentemente sencilla. Mostraremos que hay dos tipos de sistemas de prácticas y configuraciones en interacción: una empírica (que involucra objetos y acciones reales o imaginadas), y otra formal o matemática que involucra objetos y prácticas matemáticas.

Para dar la respuesta R1 el alumno sólo requiere saber leer la situación representada en el dibujo, transformar los kilogramos en gramos, y sumar. La respuesta R2 sólo requiere multiplicar dos números naturales, uno de ellos de una cifra.

El análisis de la tarea y la actividad desplegada en su realización nos va a servir como contexto para reflexionar sobre el uso de términos y expresiones cognitivas tales como, conocimiento, comprensión y competencia. Los diversos elementos de la "configuración epistémica de la medida" los clasificamos en seis categorías: lenguaje, situaciones-problemas, procedimientos, conceptos, propiedades y argumentaciones.

1. Lenguaje

La tarea se presenta al niño por medio de un lenguaje verbal y gráfico. Los términos y expresiones específicas de la situación son:

-peso, gramos; número de conejos (uno y cinco)

-cantidades de peso (2 kg, 500, g, 10 g; peso de un conejo, peso de cinco conejos)

-símbolos numéricos (2, 10, 500) y de las dos unidades de medida que intervienen, kg y g.

-dibujo de una balanza de platillos y de las pesas.

Para que el niño realice la tarea con éxito debe conocer el significado de cada uno de los términos, expresiones y representaciones usadas para describir la tarea.

El lenguaje utilizado está refiriéndose a un mundo de objetos de naturaleza no lingüística; en consecuencia el niño debe conocer y estar familiarizado con ese otro mundo de objetos evocados, algunos de ellos de naturaleza física (pesas, conejo, balanza de platillos), y otros de naturaleza conceptual y operatoria (el peso como rasgo de los cuerpos físicos, cantidades, unidades de medida, igualdad y suma de cantidades, valor de la medida concreta). Excepto los símbolos numéricos, 2, 500, 10 que refieren a objetos matemáticos, los restantes términos y expresiones refieren a objetos de naturaleza empírica, tanto ejemplos particulares como abstracciones empíricas (peso, cantidades, unidades de medida)

La interpretación del texto requiere conocer algunas reglas específicas: 2kg quiere decir "dos kilogramos"; los símbolos numéricos y de las unidades de medida colocados dentro de los iconos de las pesas expresan el tamaño de dichas pesas. Estos convenios forman parte del discurso empírico que se debe conocer para poder realizar la tarea.

2. Situación-problema

El enunciado describe una situación imaginaria, potencialmente realizable, que es la pesada de objetos físicos con un tipo especial de dispositivos (balanza de platillos). La situación no se muestra directamente sino que es evocada; se supone que el sujeto ha experimentado esta clase de situaciones de pesada de objetos de diversos tipos y características, lo que le ha proporcionado el *conocimiento* de las condiciones de realización de la pesada (colocación de pesas hasta lograr el equilibrio del fiel). El ejemplo del peso del conejo está aquí en lugar de un tipo de experiencias y situaciones de medida de pesos. Se supone que el sujeto sabe que si ponemos más de un conejo en el platillo de la derecha entonces la balanza se desequilibra, y que para lograr el equilibrio debe poner más cantidad de pesas. Este conjunto de conocimientos y destrezas configura lo que podemos describir como "conocimiento situacional", cuya adquisición requerirá la experimentación efectiva del sujeto con los instrumentos correspondientes.

El conocimiento del tipo de situaciones de pesada es el que permite interpretar los símbolos de los dibujos puestos sobre el platillo de la izquierda. Los rectángulos se refieren a los tres tipos de pesas usadas; *kg* y *g* refieren a las dos unidades de medida, kilogramo y gramo; y los números refieren al tamaño de las pesas. El niño debe saber que al colocar las escrituras 2kg y 500g dentro de los rectángulos se están indicando que las pesas tienen esos tamaños, mientras que en el caso de la pesa de 10g, al no caber dentro del rectángulo la escritura se indica con la flecha. El niño sabe que la proporción relativa de los tamaños de los dibujos no se corresponde con la realidad: la pesa de 10g debería ser sensiblemente menor que la de 500g y ésta menor que la que sugiere la de 2kg. Se supone que el niño está familiarizado con estos "convenios escolares" de representación de la realidad; aquí prevalecen las etiquetas simbólicas y no el tamaño del dibujo de las pesas.

También se debe conocer que una pesa de 2kg es igual a la suma de dos pesas de 1kg, 1kg es igual a 1000g; y que la pesada es la suma de todas las pesas puestas en el platillo, la cual se hace corresponder con el peso del conejo. La segunda cuestión planteada (peso de 5 conejos) supone que el sujeto conoce que si ponemos cinco conejos de igual peso en el platillo (cosa realmente imposible, pero imaginable) las pesas del platillo se deben quintuplicar, esto es, que la situación es de "proporcionalidad directa".

Como subproblemas de naturaleza matemática encontramos los siguientes:

> -Un problema aritmético que sustituye el problema de la agregación de las cantidades de pesas por otro consistente en la adición de números naturales (1000 + 1000 + 500 + 10 = 2510).
>
> -Un problema de índole estadística, el cálculo del total de una variable estadística (los pesos de los cinco conejos) supuesto conocido el valor del peso medio. La solución de este problema se hace aplicando la técnica de la multiplicación de naturales: 5 x 2510 = 12550.

Estas “configuraciones matemáticas puntuales” modelizan el problema empírico de la agregación de las cantidades de material y evitan que el sujeto tenga que proceder a sustituir, por ejemplo, los 2kg por 2000 piezas de un gramo, agregarlas y contarlas.

3. Procedimientos

La tarea pedida requiere explícitamente que el sujeto realice las operaciones de transformación de las 2 pesas de 1kg en gramos y la agregación de todas las piezas de 1gr:

2kg = 2 x 1000g = 2000g; 2000g + 500g + 10g = 2510g.

Estas operaciones serían de extraordinaria dificultad si se hicieran empíricamente, por lo que el sujeto modeliza la agregación mediante las correspondientes operaciones aritméticas sobre las medidas:

2000 + 500 + 10 = 2510;

La acción de agregar las pesas se sustituye por la operación de adición de naturales, y el resultado numérico se interpreta en términos de cantidad de peso.

Para la segunda cuestión debe ser capaz de multiplicar la cantidad de 2510g por 5, operación empírica modelada con la operación de multiplicación de la medida por 5. Se trata en este caso de un conocimiento aritmético elemental de naturaleza algorítmica. Pero la identificación de las operaciones de adición y multiplicación está basada en un conocimiento específico del tipo de situación involucrada. La acción evocada de pesar 5 objetos se sustituye por la operación de multiplicación; se trata, por tanto, de una medida indirecta.

La realización de la tarea se apoya en un conocimiento implícito de la técnica empírica de pesar objetos con la balanza de platillos. Esta técnica pone en juego destrezas manipulativas como el logro del equilibrio del fiel de la balanza, mediante el añadido progresivo de pesas puestas de mayor a menor valor.

La realización efectiva de la tarea por parte de un sujeto conllevaría que califiquemos a dicho sujeto como *competente* en la determinación de pesos de objetos, o en la lectura de la situación y realización de los cálculos requeridos por la modelización matemática de la situación real. Pero un sujeto podría ser adiestrado en la realización de pesadas físicas, o en el cálculo aritmético, sin saber qué está haciendo. Un *saber social* de la pesada exige que el sujeto conozca o sepa qué es el peso, qué es pesar y para qué sirve pesar. Este componente del conocimiento suele describirse como que el sujeto *comprenda* la medida del peso. Esta comprensión pone en juego otros objetos que configuran lo que podemos describir como conocimiento discursivo (tecnológico - teórico), que se compone de conceptos, propiedades y argumentaciones.

4. Conceptos (definiciones)

Analizamos a continuación los conocimientos de tipo conceptual sobre la medida de pesos que un sujeto debería manifestar cuando su relación personal a la medida incluye la comprensión, o lo que es equivalente incluye un conocimiento relacional o discursivo.

1) La magnitud continua peso

El conejo y las pesas son objetos físicos (aquí solamente evocados) que pueden ser identificados según diversos caracteres, rasgos o atributos. Por ejemplo, la forma, el color, la textura, etc, y, también, su peso. Esa cualidad es percibida por un sujeto sosteniendo entre sus manos los objetos en cuestión, si tienen un tamaño manejable. Si con la mano derecha sostenemos un conejo y con la otra una pesa de 500g percibimos que la mano derecha tiende a irse hacia el suelo. Con la palabra 'peso' designamos esa cualidad todos los cuerpos físicos. Decimos que se trata de una entidad conceptual, de naturaleza empírica o física, que se define como "la mayor o menor fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos según su masa". Parece deseable que el sujeto que resuelve la tarea pedida sea capaz de identificar de alguna manera la pesadez de los cuerpos, para lo cual debe ser capaz de expresar algún tipo de discurso describiendo la sensación correspondiente.

2) La cantidad

El conjunto de los cuerpos físicos se pueden comparar en cuanto al rasgo del peso: Unos pesan más, otros menos, otros igual. Aquellos cuerpos que equilibran la balanza, y que producen la misma sensación de tirantez en ambos brazos al ser sostenidos decimos que tienen igual *cantidad de peso*, o simplemente, el mismo peso. En nuestro ejemplo, el conejo pesa igual cantidad que el conjunto de las tres piezas de metal; la pesa de 2kg pesa 4 veces más que la de 500g, y la de 10g, 50 veces menos que la de 500, etc.

3) Unidad de medida

El sujeto competente debe comprender la necesidad de seleccionar unas cantidades como referentes de comparación para informar de las cantidades de peso de los diversos objetos físicos. También debe conocer que estos referentes pueden ser arbitrarios, pero es ventajoso adoptar un sistema regular y universal de unidades. En nuestra situación están presentes como unidades de medida, la pesa de 2kg, 500g y 10g. No basta con utilizar una única cantidad como referente, sino que es necesario disponer de un sistema de cantidades relacionadas con el fin de informar con precisión "suficiente" de la cantidad solicitada.

4) Magnitud discreta y cantidades "número de conejos"

Además de la magnitud continua peso se pone en juego la magnitud discreta "número de conejos", junto con su unidad de medida (un conejo) y la cantidad de 5 conejos.

5) Sistema de unidades; equivalencias

El sujeto competente debe conocer que 1kg = 1000g = 2 pesas de 500g = 100 pesas de 10g, esto es, las relaciones entre las distintas unidades del Sistema Internacional de pesas.

6) La medida como función matemática: Valor numérico de la medida

Los números reales 2, 500, 10, 2510, 12.550 son las imágenes de la función matemática que se establece en el proceso de medir entre el conjunto de cantidades y un subconjunto apropiado de números reales positivos.

$$M \to S \subset R^{+}$$
$$m_{kg} : 2kg \to 2$$

7) Precisión de la medida empírica y errores de medida

Al medir cantidades de magnitudes continuas cometemos errores por diversas causas –que van desde el propio procedimiento hasta fallos de la persona que mide. Por tanto, los valores que obtenemos son aproximados. El error de una medida también puede estar motivado por los errores sistemáticos del instrumento, que pueden deberse a defectos de fabricación, variaciones de la presión, la temperatura o la humedad. En el proceso de medir es necesario, por tanto, estimar el error que se comete al tomar ese valor. Por ejemplo, si la pesa menor de la que disponemos es el gramo y el fiel de la balanza al colocar 51g está a un lado y al poner 52g está al otro lado decimos que el peso está comprendido entre 51 y 52 gramos y que el error que se comete al medir el peso es menor que 1g.

En este caso el "valor aproximado" que se pide se debe a que parece plausible suponer que los cinco conejos no pesarán igual, unos pesarán un poco más y otros un poco menos. Sin embargo, se debe suponer, para poder responder a la pregunta del peso de los cinco conejos, que el peso de 2510g corresponde a un conejo de "peso típico", o promedio. Conocido dicho peso medio, el peso total de los cinco conejos se obtiene multiplicando por 5 (cálculo del total de una variable estadística, conocida la media aritmética y el número de datos). El valor aproximado de la medida habría que darlo mediante un intervalo de valores, que en este caso no es posible determinar.

5. Proposiciones

La medida, como isomorfismo entre el conjunto de cantidades que forman la magnitud M y un subconjunto de los números reales R^+ pone en juego las siguientes propiedades:

- $m_u(a+b) = m_u(a) + m_u(b)$;
- $m_u (ka) = km_u(a)$.

Estas dos propiedades de la función medida (aditividad y producto por un escalar) se ponen en juego de manera implícita en la tarea pedida. La medida de la suma de cantidades (las pesas de 500g y 10g, por ejemplo) es la suma de las medidas de cada una de las cantidades. La medida de la pesa de 2kg es el producto de 2 por la medida de la pesa de 1kg.

No es necesario para medir pesos un conocimiento explícito de estos "teoremas" matemáticos, pero si su conocimiento como "teoremas en acto" (Vergnaud, 1990), como propiedades implícitas que regulan y justifican los procedimientos.

6. Argumentos

Justificaciones de las técnicas de medida, de la necesidad de un sistema convenido de unidades y de los invariantes matemáticos característicos, de las modelizaciones matemáticas implementadas (adición, multiplicación, relación entre promedio y total, proporcionalidad).

El tipo de argumentación empírica que esperamos encontrar es: "El peso del conejo es 2510g porque hemos necesitado poner 3 piezas para equilibrar el fiel de la balanza: una de 2kg, otra de 500g y otra de 10g".

La argumentación debe continuar con una deducción informal: "Como cada kg equivale a 1000g, el peso total puesto en el platillo de la izquierda es la suma de las 3 pesas, o sea, 2000 g + 500 g + 10 g = 2510g".

La medida aparece en la resolución de la tarea como una secuencia de acciones situadas, reguladas, y mediadas por instrumentos materiales y lingüísticos, de la que emergen objetos conceptuales, proposicionales y validativos, de naturaleza empírica en unos casos y matemática en otros. En definitiva, el significado que interesa atribuir al "*concepto* de medida" debemos concebirlo como el par formado por el "sistema de prácticas operativas y discursivas" y la "configuración" de objetos emergentes de tal sistema de prácticas.

La emisión de un juicio sobre la competencia de un sujeto sobre la medida (entendida en sentido amplio que incluye conocimiento y comprensión) debe basarse en el conocimiento integral, tanto de los elementos operatorios sobre la medida como los discursivos.

3. Significados personales sobre la medida de magnitudes

El análisis que hemos hecho de la magnitud peso nos ha permitido describir "el significado institucional" de la medida de pesos, esto es, el significado de referencia del tipo de tareas representado por este ejemplo particular. Básicamente está constituido por una configuración empírica, cuyos componentes operatorios y discursivos hemos descrito. También hemos visto su dependencia con unas configuraciones matemáticas puntuales (aritmética y estadística).

A continuación veremos en qué grado son dominadas estas configuraciones epistémicas por un grupo de estudiantes. Esto nos llevará a desglosar el conocimiento de los sujetos en sus distintas componentes y a proponer el uso de los términos 'competencia' y 'comprensión' para referirnos a los componentes operatorios y discursivos, respectivamente, del conocimiento. Como hemos dicho anteriormente, el término 'competencia' se usa también para designar al conocimiento subjetivo de todos los elementos del sistema de prácticas que constituye el significado de un concepto u objeto matemático.

Como introducción al estudio de la medida de magnitudes hemos usado esta tarea con un grupo de 15 estudiantes de magisterio con el fin de determinar los conocimientos (personales) previos sobre el tema. La consigna dada a los estudiantes fue la siguiente:

1. *Resuelve las cuestiones a) y b)(Fig. 1)*

2. *Indica las magnitudes, las cantidades y las unidades de medida que se ponen en juego en este problema.*

3. *Pon otros dos ejemplos de atributos o rasgos de objetos que consideres son magnitudes.*

4. *Para cada uno de los dos ejemplos de magnitudes que has dado en la pregunta 3, indica ejemplos de cantidades de dichas magnitudes.*

5. *Para cada uno de los ejemplos de la pregunta 3 indica las unidades de medida que se usan habitualmente.*

6. *Describe la diferencia entre "magnitud", cantidad" y "medida de una cantidad".*

Con estas cuestiones no se tienen en cuenta de una manera sistemática todos los elementos del significado de la medida, sino una parte del componente discursivo, correspondiente a las distinciones conceptuales entre magnitud, cantidad y medida.

Las frecuencias de respuestas correctas a las cuestiones se dan en la tabla 1.

Tabla 1: Frecuencia y porcentaje de respuestas correctas

Pregunta	**Frecuencia**	**Porcentaje**
1. Lectura y cálculo de pesos	15	100
2. Identificación de la magnitud peso	7	47
" de cantidades de peso	7	47
" de unidades de medida de peso	11	73
3. Ejemplos de magnitudes	7	47
4. Ejemplos de cantidades	6	40
5. Ejemplos de unidades de medida	6	40
6. Descripción de diferencias conceptuales	0	0

Podemos decir que los estudiantes conocen la lectura de pesos con la balanza y tienen destrezas en el cálculo aritmético elemental requerido. La interpretación del peso del conejo como peso representativo de los cinco conejos no ha planteado ninguna dificultad ya que todos han resuelto bien la tarea. Pero tienen serias carencias en el componente *discursivo,* para explicar las diferencias entre los conceptos de magnitud, cantidad y medida. Ninguno ha sido capaz de redactar de manera coherente un texto que explique el uso correcto de los términos magnitud, cantidad y medida, aunque en algunos casos han propuesto ejemplos correctos de magnitudes, cantidades y medida, tanto referidos a la tarea propuesta como a otros casos de su invención (longitudes, capacidades, tiempo). Más de la mitad de los estudiantes confunden magnitud con unidad de medida, cantidad con el valor numérico de la medida.

Las siguientes respuestas de un estudiante son indicativas de la confusión conceptual que tienen la mayor parte de los estudiantes:

- *"Las magnitudes son el gramo y el kilo.*

  Las cantidades, 2, 500 y 10.

  La unidad de medida es la masa".

- *"En el ejemplo de los litros la cantidad es 5 y la cantidad de metros es 3".*

- *"Para los litros la unidad de medida es la capacidad. Para los metros la unidad de medida es la longitud".*

Otros ejemplos de respuestas erróneas son los siguientes:

- *Confusión entre cantidad y valor numérico de la medida:*

E1:

"Cantidades: 5, 2, 500, 10, 2510, 12.550"

E3: "Cantidad de magnitud: se refiere al número de veces que se repite esa magnitud"

- *Confusión de magnitud con unidad de medida:*

E3: "Para expresar la distancia entre dos pueblos se utiliza otra magnitud (kilómetro)

"Magnitud, podemos decir que es el patrón que utilizamos para medir o cuantificar algo"

E4: "Las magnitudes son el gramo y el kilo"

E9: Ejemplos de magnitudes: "Metro, litro"

Los estudiantes han sido capaces de responder correctamente a la tarea escolar (que básicamente solicita modelizar el problema empírico mediante un modelo aritmético y realizar operaciones de adición y multiplicación con números naturales sencillos). Pero este ejemplo muestra la complejidad de cualquier tarea matemática, y las dificultades de los alumnos con el componente discursivo del significado sistémico de los objetos matemáticos.

5. Reflexiones finales sobre el uso de términos cognitivos

El conocimiento se puede describir de manera general como propone Chevallard (1992) como la relación de alguien (persona o institución) a un objeto. Esta noción abarcaría todos los constructos cognitivos usados en las diversas ciencias y tecnologías de la cognición humana (Varela, 1988), pero para hacerla operativa tenemos que modelizar adecuadamente el objeto de conocimiento, esto es, aquello con lo que establecemos relación, y los tipos de relaciones posibles.

En general, la relación de X (persona o institución) a un objeto (O) se traduce en las correspondencias que X puede establecer entre O y otros objetos, correspondencias que nosotros interpretamos como funciones semióticas (Godino, Batanero y Font, 2006). Si O es un término o expresión, el sujeto X puede atribuir a O otro objeto, su significado S; si O es una tarea, X puede aplicar a O una técnica o varias técnicas de solución, así como aportar explicaciones y justificaciones, etc. El objeto O puede ser una organización matemática más o menos compleja y el sujeto puede tener distintas relaciones a cada uno de sus componentes. En el enfoque ontosemiótico de la cognición matemática, al igual que en la teoría antropológica de lo didáctico (Chevallard, 1992; 1999), los objetos matemáticos se conciben en términos de sistemas de prácticas operativas y discursivas, esto es, sistemas compuestos de *praxis* y *logos*. El sujeto puede tener una relación bien adaptada a la praxis, pero no al componente discursivo. En este caso decimos que el sujeto conoce cómo hacer un tipo de tareas, tiene competencia o capacidad para hacerla, pero no comprende (o comprende parcialmente) el por qué de las técnicas que aplica.

Las expresiones del tipo, "X es competente para realizar la tarea T", indican que el sujeto X domina o es capaz de aplicar correctamente la técnica *t* que resuelve o permite hacer bien la tarea T. En esas circunstancias decimos que el sujeto tiene una capacidad o competencia específica, o también que "conoce cómo hacer" la tarea. En cambio, la expresión, "X comprende la técnica t que permite realizar la tarea T" se aplica si X conoce porqué dicha técnica es adecuada, su ámbito de validez y las relaciones con otras técnicas.

La competencia matemática, entendida en sentido restringido como capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas, debe complementarse con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y de las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego. Consideramos, por tanto, que la competencia y la comprensión en matemáticas son nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático y sus relaciones con el mundo empírico. Incluso, como indica Barallobres (2001) "Es necesaria una dialéctica competencia-comprensión, teniendo en cuenta que es imprescindible tener disponible cierta práctica “instrumental” (por supuesto que adquirida en contextos significativos que involucra la “comprensión” de la misma) para avanzar hacia otras problemáticas de “comprensión” más complejas”.

Entendida en su sentido amplio, como se usa en los contextos de innovación curricular, la competencia debería abarcar los diversos elementos del significado sistémico que hemos descrito para el caso de la medida de la magnitud peso.

En la sección 2 hemos mostrado los diversos elementos que se deben tener en cuenta si nos preguntamos por el significado de la "medida" de una magnitud particular. Hemos visto la complejidad de ese objeto, y por tanto la diversidad de relaciones que pueden tener los sujetos con ese objeto.

El reconocimiento de la complejidad del conocimiento matemático debe llevarnos a reconocer también una complejidad para el logro de la competencia y comprensión matemática, las cuales no pueden ser concebidas como estados dicotómicos, esto es, se tiene o no, competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático. Se tratan más bien de procesos en progresivo crecimiento y mejora, que, además, deberán ser valorados relativamente a los contextos institucionales correspondientes.

El problema del logro del binomio (competencia, comprensión) está, por consiguiente, íntimamente ligado a cómo se concibe el propio conocimiento matemático. Los términos y expresiones matemáticas denotan entidades abstractas (no ostensivas, generalizaciones) cuya naturaleza y origen tenemos que explicitar para poder elaborar un modelo útil y efectivo sobre qué entendemos por comprender tales objetos.

Referencias

Barallobres, G. (2001). Contribución en el Foro Indimat realizada el 28 Nov 2001. URL: http://listserv.rediris.es/archives/indimat.html

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12 (1): 73-112.

Chevallard, Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19 (2): 221-266

D’Amore B. (2000). La complessità dell’educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*, 4, 35-40.

D’Amore, B. y Godino, J. D. (2006). Punti di vista antropologico ed ontosemiotico in Didattica della Matemática. *La matemática e la sua didattica*, 20 (1): 7-36.

Godino, J. D. (2002). Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques,* 22 (2/3): 237-284

Godino, J. D. y Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, Vol. 14, nº 3: 325-355. [*Significato istituzionale e personale degli oggetti matematici. La matemática e la sua didattica*, n3/2000, p. 260-291, trad. Angel Balderas]

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2006). Un enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemática. *Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada*. Disponible en Internet: URL: http://www.ugr.es/local/jgodino/indice_eos.htm.

Goldin, G. A. (1998). Representational system, learning, and problem solving in mathematics. *Journal of Mathematical Behaviour*, 17 (2): 137-165.

Morin, E. (1977). *El método I; la naturaleza de la naturaleza*. Madrid: Cátedra, 1986.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Tearchers of Mathematics. Edición electrónica: http://standards.nctm.org/

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, December, 1976.

Varela, F. J. (1988). *Conocer. Las ciencias cognitivas: tendencias y perspectivas; cartografía de las ideas actuales.* Barcelona: Gedisa, 1990.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactiques des Mathématiques*, Vol. 10, n. 2,3, pp. 133-170.