Nota: Parte de los resultados han sido obtenidos en colaboración con **Laiachi El Kaoutit** y **F. Javier Lobillo**.

Coanillos semisimples

José Gómez Torrecillas
Universidad de Granada

22 de marzo de 2002

Coanillos.(*Sweedler*, 1975) Sea A un anillo. Un A–*coanillo* es una terna $(\mathfrak{C}, \Delta_{\mathfrak{C}}, \epsilon_{\mathfrak{C}})$ que consiste en un A–bimódulo $\mathfrak{C}$ y dos homomorfismos de A–bimódulos

$$\Delta_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \longrightarrow \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \qquad \epsilon_{\mathfrak{C}} : \mathfrak{C} \longrightarrow A \tag{1}$$

tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\Delta_{\mathfrak{C}}"] \arrow[d, "\Delta_{\mathfrak{C}}"'] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "\mathfrak{C} \underset{A}{\otimes} \Delta_{\mathfrak{C}}"] \\
\mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[r, "\Delta_{\mathfrak{C}} \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C}"] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C}
\end{tikzcd}$$

y

$$\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\Delta_{\mathfrak{C}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "\mathfrak{C} \underset{A}{\otimes} \epsilon_{\mathfrak{C}}"] \\
& \mathfrak{C} \otimes_A A
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\mathfrak{C} \arrow[r, "\Delta_{\mathfrak{C}}"] \arrow[dr, "\cong"'] & \mathfrak{C} \otimes_A \mathfrak{C} \arrow[d, "\epsilon_{\mathfrak{C}} \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C}"] \\
& A \otimes_A \mathfrak{C}
\end{tikzcd}$$

conmutan.

Ejemplo. *Coanillo canónico de Sweedler.* $B \leq A$ un subanillo.

$\boxed{\text{Bimódulo:}}$

$$A \otimes_B A, \quad a(a' \otimes a'')a''' = aa' \otimes a''a'''$$

$\boxed{\text{Comultiplicación:}}$

$$\Delta : A \otimes_B A \longrightarrow A \otimes_B A \otimes_A A \otimes_B A$$

$$a \otimes a' \longmapsto a \otimes 1 \otimes 1 \otimes a'$$

$\boxed{\text{Counidad:}}$

$$\epsilon : A \otimes_B A \longrightarrow A, \quad a \otimes a' \longmapsto aa'$$

Ejemplo. *Coanillo idempotente.*

$\boxed{\text{Bimódulo:}}$ Ideal bilátero I tal que $I^2 = I$ y ${}_A A/I$ o A/I_A plano.

$\boxed{\text{Comultiplicación:}}$ Isomorfismo canónico $I \cong I \otimes_A I$.

$\boxed{\text{Counidad:}}$ Inclusión $I \subseteq A$.

Ejemplo. *Coanillo para una estructura entrelazante (Brzeziński-Takeuchi)*

$(A, C)_\varphi$ estructura entrelazante sobre una anillo conmutativo K, con A una $K-$álgebra, C una $K-$coálgebra y $\varphi : C \otimes_K A \to A \otimes_K C$ el morfismo de estructura.

$\boxed{\text{Bimódulo:}}$ $A \otimes_K C$, $a(a' \otimes_K c)a'' = aa'\varphi(c \otimes a'')$.

$\boxed{\text{Comultiplicación:}}$ la composición

$$A \underset{K}{\otimes} C \xrightarrow{A \underset{K}{\otimes} \Delta_C} A \underset{K}{\otimes} C \underset{K}{\otimes} C \cong A \underset{K}{\otimes} C \underset{A}{\otimes} A \underset{K}{\otimes} C$$

$\boxed{\text{Counidad:}}$ $A \otimes_K \epsilon_C : A \otimes_K C \to A \otimes_K K \cong A$.

Categorías de comódulos. Dado un A–coanillo $\mathfrak{C}$, la categoría $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ de los $\mathfrak{C}$–comódulos por la derecha se define como sigue.

$\boxed{\text{Objetos:}}$ pares (M, ρ_M), con M_A un módulo, y $\rho_M : M \to M \otimes_A \mathfrak{C}$ un morfismo de A–módulos tales que los diagramas

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[d, "\rho_M"'] & M \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C} \arrow[d, "M \underset{A}{\otimes} \Delta_{\mathfrak{C}}"] \\
M \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C} \arrow[r, "\rho_M \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C}"] & M \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C} \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C}
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\rho_M"] \arrow[dr, "\cong"] & M \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C} \arrow[d, "M \underset{A}{\otimes} \epsilon_{\mathfrak{C}}"] \\
& M \underset{A}{\otimes} A
\end{tikzcd}$$

conmutan.

$\boxed{\text{Morfismos:}}$ un morfismo $f : (M, \rho_M) \to (N, \rho_N)$ es un morfismo de A–módulos $f : M \to N$ tal que conmuta el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\
M \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C} \arrow[r, "f \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C}"] & N \underset{A}{\otimes} \mathfrak{C}
\end{tikzcd}$$

Curiosidad: Nuestras “viejas” categorías $A-gr$ de módulos graduados para un anillo graduado por un grupo A son ejemplos de categorías de comódulos sobre ciertos coanillos.

$\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría aditiva con límites inductivos, pero no es abeliana en general (fallan los núcleos).

$$\begin{tikzcd} \mathcal{M}^{\mathfrak{C}} \arrow[d, shift right, "U"'] \\ \mathcal{M}_A \arrow[u, shift right, "-\otimes_A \mathfrak{C}"'] \end{tikzcd}$$

el funtor subyacente U tiene un adjunto por la derecha $-\otimes_A \mathfrak{C}$

Teorema. *Son equivalentes*

(i) $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría abeliana y U es exacto;

(ii) $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ es una categoría de Grothendieck y U es exacto;

(iii) ${}_A\mathfrak{C}$ es un módulo plano.

Observación. *$\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ puede ser abeliana sin ser ${}_A\mathfrak{C}$ plano.*

$\boxed{\text{$\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ semisimple $\equiv$ abeliana + todo objeto semisimple}}$

Teorema. *Son equivalentes:*

(i) $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ *es semisimple;*

(ii) ${}_A\mathfrak{C}$ *es plano y* $\mathfrak{C}_{\mathfrak{C}}$ *es semisimple;*

(iii) ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ *es semisimple;*

(iv) $\mathfrak{C}_A$ *es plano y* ${}_{\mathfrak{C}}\mathfrak{C}$ *es semisimple;*

(v) $\mathcal{M}^{\mathfrak{C}}$ *y* ${}^{\mathfrak{C}}\mathcal{M}$ *son ambas semisimples, y* ${}_A\mathfrak{C}$ *y* $\mathfrak{C}_A$ *son proyectivos.*

$\mathfrak{C}$ simple $\equiv$ sin sub-bicomódulos no triviales

$\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{C}$ sub-bicomódulo $\equiv$ $\Delta(\mathfrak{I}) \subseteq \mathfrak{I} \bigotimes_A \mathfrak{C} \cap \mathfrak{C} \bigotimes_A \mathfrak{I}$

Teorema. *Un coanillo* $\mathfrak{C}$ *es semisimple si y sólo si* $\mathfrak{C} = \oplus_{\omega\in\Omega}\mathfrak{C}_\omega$ *para* $\mathfrak{C}_\omega$ *simples semiartinianos con* ${}_A\mathfrak{C}_\omega$, ${\mathfrak{C}_\omega}_A$ *proyectivos.*

objeto semiartiniano $\equiv$ todo factor propio contiene un simple

Teorema. *Supongamos ${}_A\mathfrak{C}$ y $\mathfrak{C}_A$ proyectivos. Son equivalentes:*

(i) $\mathfrak{C}$ es simple y semiartiniano;

(ii) $\mathfrak{C}$ es simple y contiene un $\mathfrak{C}$–subcomódulo simple por la izquierda;

(iii) $\mathfrak{C}$ es semisimple con un único tipo de simple por la izquierda;

(iv) $\mathfrak{C}$ es simple y contiene un $\mathfrak{C}$–subcomódulo simple por la derecha;

(v)$\mathfrak{C}$ es semisimple con un único tipo de simple por la derecha;

(vi) $\mathfrak{C} \cong \Sigma^* \otimes_D \Sigma$, para ${}_D\Sigma_A$ un bimódulo con Σ_A finitamente generado y proyectivo, y D un anillo de división.

Coanillos de Comatrices “infinitas”

Sea ${}_B\Sigma_A$ un $B-A$–bimódulo; suponemos Σ_A finitamente generado y proyectivo. Consideramos $\Sigma^* = \mathrm{Hom}_A(\Sigma, A_A)$; es un A–B–bimódulo.

Tomamos $\{e_i^*, e_i\} \subseteq \Sigma^* \times \Sigma$ base dual.

$\boxed{\text{Bimódulo:}}$ $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$, $a(\varphi \otimes u)a' = a\varphi \otimes ua'$.

$\boxed{\text{Comultiplicación:}}$

$$\Sigma^* \otimes_B \Sigma \xrightarrow{\quad\Delta\quad} \Sigma^* \otimes_B \Sigma \otimes_A \Sigma^* \otimes_B \Sigma$$

$$\varphi \otimes_B u \longmapsto \textstyle\sum_i \varphi \otimes_B e_i \otimes_A e_i^* \otimes_B u$$

$\boxed{\text{Counidad:}}$

$$\Sigma^* \otimes_B \Sigma \xrightarrow{\quad\epsilon\quad} A, \qquad \varphi \otimes_B u \longmapsto \varphi(u)$$

Son “comatrices” porque

$$^*(\Sigma^* \otimes_B \Sigma) \cong \mathrm{End}({}_B\Sigma),$$

como anillos.

Un teorema de estructura.

Teorema. *Si* ${}_B\Sigma_A$ *es un bimódulo con* Σ_A *finitamente generado y proyectivo, y* B *es un anillo artiniano simple, entonces* $\Sigma^* \otimes_B \Sigma$ *es un* A*–coanillo simple semisimple.*

Teorema. *Sea* $\mathfrak{C}$ *es un anillo simple semisimple, y sea* Σ *"el"* $\mathfrak{C}$*–comódulo simple por la derecha, y sea* $D = \mathrm{End}(\Sigma_{\mathfrak{C}})$ *su anillo de división de endomorfismos. Entonces existe un isomorfismo de* A*–coanilos* $\mathfrak{C} \cong \Sigma^* \otimes_D \Sigma$*.*

Teorema. *Un* A*–coanillo* $\mathfrak{C}$ *es semisimple si y sólo si existe una familia* Ω *de* A*–módulos por la derecha proyectivos de tipo finito, y un anillo de división* $D_\Sigma \subseteq \mathrm{End}(\Sigma_A)$ *para cada* $\Sigma \in \Omega$ *tales que* $\mathfrak{C} \cong \bigoplus_{\Sigma \in \Omega} \Sigma^* \otimes_{D_\Sigma} \Sigma$*, como* A*–coanillos.*