Coálgebras de Caminos de Quivers con Relaciones

Oviedo, Febrero 2004

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Básica:

A anillo artiniano $\Rightarrow 1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$

$$\Rightarrow A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \cdots \oplus Ae_n$$

Ae_i proyectivo indescomponible

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Básica:

A anillo artiniano $\Rightarrow 1 = e_1 + e_2 + \cdots + e_n$

$$\Rightarrow A = Ae_1 \oplus Ae_2 \oplus \cdots \oplus Ae_n$$

Ae_i proyectivo indescomponible

A básica $\iff Ae_i \ncong Ae_j$ para $i \neq j$

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Quiver: $Q \equiv (Q_0, Q_1, s, e)$ donde:

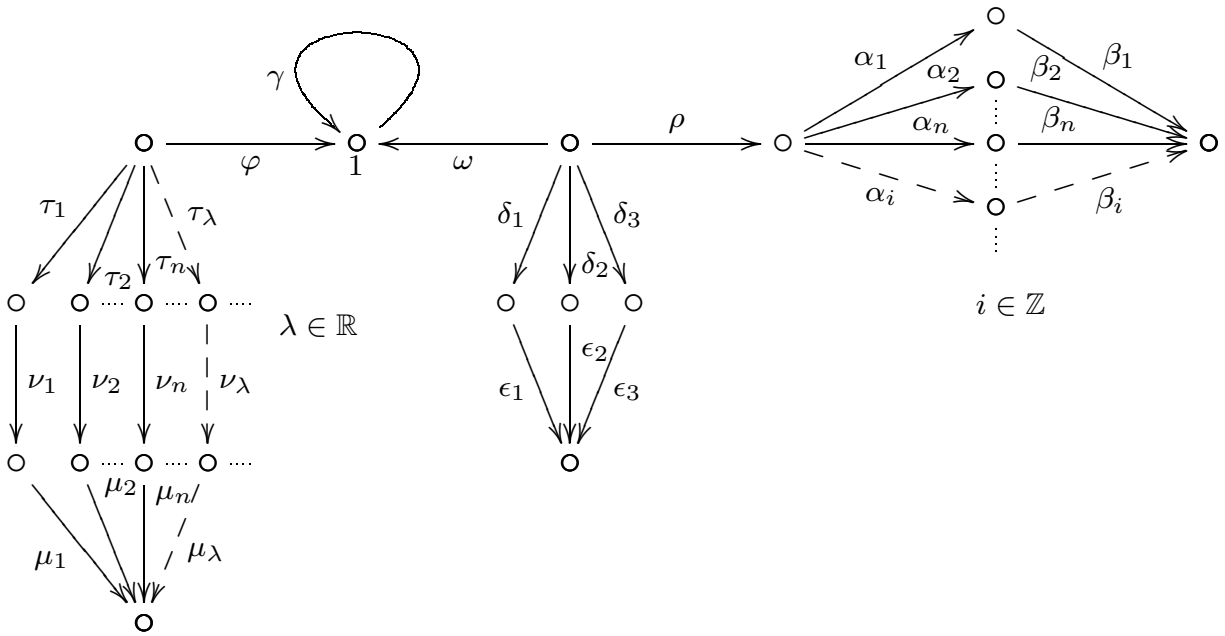
- Q_0 conjunto de vértices
- Q_1 conjunto de flechas
- $s : Q_1 \to Q_0$ aplicación. $\forall \alpha \in Q_1$, $s(\alpha)$ origen de α.
- $e : Q_1 \to Q_0$ aplicación. $\forall \alpha \in Q_1$, $e(\alpha)$ final de α.

Si $e(\alpha) = s(\alpha)$, α es un lazo.

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Ejemplo:



Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Obtención de Q_A:

- Si $1 = e_1 + \cdots + e_n$ entonces Q_A tiene n vértices.
- (n flechas de i a j)$= \dim_K e_j(A/A^2)e_i$.

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Álgebra de caminos:

Un camino de longitud n de i a j es una composición de flechas $p = \alpha_1\alpha_2 \cdots \alpha_n$ donde $s(\alpha_1) = i$, $e(\alpha_n) = j$ y $e(\alpha_k) = s(\alpha_{k+1})$ para todo $k = 1, \ldots, n-1$.

Un ciclo orientado es un camino que empieza y termina en el mismo vértice.

Dado i, vértice, le asignamos un camino de longitud cero e_i.

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Álgebra de caminos:

Sea KQ el K-espacio vectorial con base el conjunto de todos los caminos.

KQ es un álgebra inducida por el producto

$$(\alpha_1 \cdots \alpha_n)(\beta_1 \cdots \beta_m) = \begin{cases} \alpha_1 \cdots \alpha_n \beta_1 \cdots \beta_m & \text{si } e(\alpha_n) = s(\beta_1) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

(concatenación de caminos)

KQ es el álgebra de caminos del quiver Q

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Ideal Admisible:

KQ es un álgebra graduada,

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus \cdots \oplus KQ_n \oplus \cdots$$

$$Q_m = \{\text{caminos de longitud } m\}.$$

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Ideal Admisible:

KQ es un álgebra graduada,

$$KQ = KQ_0 \oplus KQ_1 \oplus \cdots \oplus KQ_n \oplus \cdots$$

$$Q_m = \{\text{caminos de longitud } m\}.$$

$\mathcal{I} \leq KQ$ admisible $\iff \mathcal{I} \subseteq KQ_2 \oplus \cdots$

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Quiver con relaciones:

Un quiver con relaciones es un par $(Q, \mathcal{I})$ donde Q es un quiver e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ.

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Quiver con relaciones:

Un quiver con relaciones es un par $(Q, \mathcal{I})$ donde Q es un quiver e $\mathcal{I}$ un ideal admisible de KQ.

Se define el **álgebra de caminos de** $(Q, \mathcal{I})$ como

$$K(Q, \mathcal{I}) = KQ/\mathcal{I}$$

Definición

Una K-coálgebra es una terna (C, Δ, ε) donde:

- *C es un K-espacio vectorial.*
- *$\Delta : C \to C \otimes C$ (comultiplicación) y $\varepsilon : C \to K$ (counidad) son aplicaciones lineales verificando*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta\otimes I} \\ C \otimes C & \xrightarrow[I\otimes\Delta]{} & C \otimes C \otimes C \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & \\ & {\scriptstyle I\otimes\varepsilon}\swarrow & \uparrow{\scriptstyle\Delta} & \searrow{\scriptstyle\varepsilon\otimes I} & \\ C \otimes K & & & & K \otimes C \\ & \cong\nwarrow & & \nearrow\cong & \\ & & C & & \end{array}$$

Definición

Una K-coálgebra es una terna (C, Δ, ε) donde:

- *C es un K-espacio vectorial.*
- *$\Delta : C \to C \otimes C$ (comultiplicación) y $\varepsilon : C \to K$ (counidad) son aplicaciones lineales verificando*

$$\begin{array}{ccc} C & \xrightarrow{\Delta} & C \otimes C \\ {\scriptstyle\Delta}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\Delta\otimes I} \\ C \otimes C & \xrightarrow[I\otimes\Delta]{} & C \otimes C \otimes C \end{array} \qquad y \qquad \begin{array}{ccccc} & & C \otimes C & & \\ & {\scriptstyle I\otimes\varepsilon}\swarrow & \uparrow{\scriptstyle\Delta} & \searrow{\scriptstyle\varepsilon\otimes I} & \\ C \otimes K & & & & K \otimes C \\ & \cong\nwarrow & & \nearrow\cong & \\ & & C & & \end{array}$$

$f : C \to D$ lineal es morfismo de coálgebras si f verifica que $\Delta_D f = (f \otimes f)\Delta_C$ y $\epsilon_D f = \epsilon_C$

$\mathcal{C}oalg_K \equiv$ categoría de las K-coálgebras y los morfismos de K-coálgebras.

Un subespacio V de C es una subcoálgebra si $\Delta_C(V) \subseteq (V \otimes V)$

$\mathcal{C}oalg_K \equiv$ categoría de las K-coálgebras y los morfismos de K-coálgebras.

Un subespacio V de C es una subcoálgebra si $\Delta_C(V) \subseteq (V \otimes V)$

Teorema

Toda K-coálgebra es unión directa de subcoálgebras de dimensión finita.

Objetivo: Encontrar un resultado para coálgebras análogo a

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Objetivo: Encontrar un resultado para coálgebras análogo a

Teorema

Sea K un cuerpo algebraicamente cerrado y A una K-álgebra básica finito dimensional entonces existe un quiver Q_A y un ideal admisible $\mathcal{I}$ de KQ_A tales que $A \cong KQ_A/\mathcal{I} = K(Q, \mathcal{I})$

Básica:

$$C = \bigoplus_{i \in I} E_i$$

E_i inyectivo indescomponible

C básica $\iff E_i \ncong E_j$ para $i \neq j$

Quiver asociado:

- Los vértices son los elementos group-like de C. Esto es, elementos $c \in C$ tales que $\Delta(c) = c \otimes c$
- (n flechas de x a y)=$\dim_K P_{x,y}/K(x-y)$. Donde $P_{x,y} = \{c \in C$ tales que $\Delta(c) = y \otimes c + c \otimes x\}$ (elementos (x,y)-primitivos).

Coálgebra de caminos:

Consideramos el espacio vectorial KQ generado por todos los caminos y le dotamos de la siguiente comultiplicación

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i$$

$$\Delta(\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_n) = e_i \otimes \beta + \beta \otimes e_j + \sum_{t=1}^{n-1} (\alpha_1 \cdots \alpha_t) \otimes (\alpha_{t+1} \cdots \alpha_n) = \sum_{\delta\eta=\beta} \delta \otimes \eta$$

Coálgebra de caminos:

Consideramos el espacio vectorial KQ generado por todos los caminos y le dotamos de la siguiente comultiplicación

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i$$

$$\Delta(\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_n) = e_i \otimes \beta + \beta \otimes e_j + \sum_{t=1}^{n-1} (\alpha_1 \cdots \alpha_t) \otimes (\alpha_{t+1} \cdots \alpha_n) = \sum_{\delta\eta=\beta} \delta \otimes \eta$$

y la counidad

$$\epsilon(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si longitud}(\alpha)=0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Coálgebra de caminos:

Consideramos el espacio vectorial KQ generado por todos los caminos y le dotamos de la siguiente comultiplicación

$$\Delta(e_i) = e_i \otimes e_i$$

$$\Delta(\beta = \alpha_1 \cdots \alpha_n) = e_i \otimes \beta + \beta \otimes e_j + \sum_{t=1}^{n-1} (\alpha_1 \cdots \alpha_t) \otimes (\alpha_{t+1} \cdots \alpha_n) = \sum_{\delta\eta=\beta} \delta \otimes \eta$$

y la counidad

$$\epsilon(\alpha) = \begin{cases} 1 & \text{si longitud}(\alpha)=0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

entonces (KQ, Δ, ϵ) es la coálgebra de caminos asociada a Q.

Proposición

Toda coálgebra punteada C es isomorfa a una subcoálgebra de la coálgebra de caminos del quiver Q_C que contiene todos los vértices y todas las flechas.

Proposición

Toda coálgebra punteada C es isomorfa a una subcoálgebra de la coálgebra de caminos del quiver Q_C que contiene todos los vértices y todas las flechas.

$C \leq KQ$ es admisible $\iff$ contiene todos los vértices y todas las flechas

Coálgebra de caminos de quivers con relaciones:

Simson propone: Dado Ω ideal admisible de KQ

$$C(Q,\Omega) = \{a \in KQ \text{ tales que } \langle a, \Omega \rangle = 0\}$$

con $\langle , \rangle : CQ \times KQ \longrightarrow K$ definida por $\langle v, w \rangle = \delta_{v,w} = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq w \\ 1 & \text{si v=w} \end{cases}$

para caminos $v, w \in KQ$.

Coálgebra de caminos de quivers con relaciones:

Simson propone: Dado Ω ideal admisible de KQ

$$C(Q,\Omega) = \{a \in KQ \text{ tales que } \langle a, \Omega\rangle = 0\}$$

con $\langle , \rangle : CQ \times KQ \longrightarrow K$ definida por $\langle v, w\rangle = \delta_{v,w} = \begin{cases} 0 & \text{si } v \neq w \\ 1 & \text{si v=w} \end{cases}$

para caminos $v, w \in KQ$.

Por tanto,

Problema: Dada C subcoálgebra admisible de KQ, ¿existe un ideal admisible Ω de KQ tal que $C = C(Q,\Omega)$?

Lema

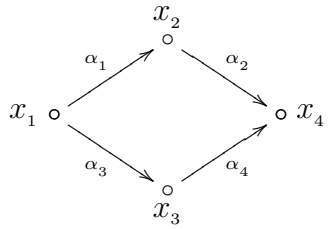
Sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra, si p es un camino en A entonces todos los subcaminos de p están en A.

Lema

Sea $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra, si p es un camino en A entonces todos los subcaminos de p están en A.

Ejemplo

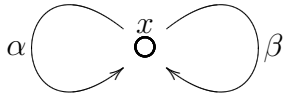
Sea Q el quiver



Entonces el subespacio vectorial generado por $\{x_1, x_2, x_3, x_4, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_2\alpha_1 + \alpha_4\alpha_3\}$ es una subcoálgebra de KQ que no está generada únicamente por caminos.

Ejemplo

Sea Q el quiver

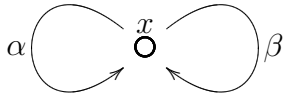


entonces la coálgebra $A = K\{x, \alpha + \beta\}$ no está generada por caminos.

No toda subcoálgebra está generada por caminos

Ejemplo

Sea Q el quiver



entonces la coálgebra $A = K\{x, \alpha + \beta\}$ no está generada por caminos.

No toda subcoálgebra está generada por caminos

Proposición

Sea Q un quiver y $A \subseteq KQ$ una subcoálgebra. Entonces existe una base de A en la que cada elemento de la base es una combinación lineal de caminos con mismo origen y mismo fin.

En el caso de una subcoálgebra admisible C,

- Contiene al conjunto de vértices, V, y de flechas, F, entonces la base sería

$$\{V, F, \{G_{ij}^{\tau} \text{ con } \tau \in \mathrm{T}_{ij} \text{ e } i, j \in Q_0\}\}$$

donde $\forall \tau \in \mathrm{T}_{ij}$, G_{ij}^{τ} es una combinación lineal de caminos de longitud mayor que 1 que empiezan en i y terminan en j.

En el caso de una subcoálgebra admisible C,

- Contiene al conjunto de vértices, V, y de flechas, F, entonces la base sería

$$\{V, F, \{G_{ij}^{\tau} \text{ con } \tau \in \mathrm{T}_{ij} \text{ e } i, j \in Q_0\}\}$$

  donde $\forall \tau \in \mathrm{T}_{ij}$, G_{ij}^{τ} es una combinación lineal de caminos de longitud mayor que 1 que empiezan en i y terminan en j.

- Sea D el conjunto de caminos de C entonces la base es

$$\{V, F, D, \{R_{ij}^{\tau} \text{ con } \tau \in \mathrm{T}_{ij} \text{ e } i, j \in Q_0\}\}$$

  donde $\forall \tau \in \mathrm{T}_{ij}$, R_{ij}^{τ} es una combinación lineal de al menos dos caminos de longitud mayor que 1 que empiezan en i y terminan en j.

En el caso de una subcoálgebra admisible C,

- Descomponemos cada conjunto $S_{ij} = \{R_{ij}^{\tau}\}_{\tau \in \mathrm{T}_{ij}}$ en sus componentes conexas y una base de A sería de la forma

$$\{V, F, D, \{\Upsilon_{\phi}\}_{\phi \in \Phi}\}$$

donde para cada $\phi \in \Phi$, Υ_{ϕ} es un conjunto conexo de combinaciones lineales de al menos dos caminos de un conjunto $\mathcal{L}_{\phi} \subset KQ_{\geq 2}$ tal que $\mathcal{L}_{\phi_1} \cap \mathcal{L}_{\phi_2} = \emptyset \Leftrightarrow \phi_1 \neq \phi_2$.

En el caso de una subcoálgebra admisible C,

- Descomponemos cada conjunto $S_{ij} = \{R_{ij}^{\tau}\}_{\tau \in \mathrm{T}_{ij}}$ en sus componentes conexas y una base de A sería de la forma

$$\{V, F, D, \{\Upsilon_{\phi}\}_{\phi \in \Phi}\}$$

  donde para cada $\phi \in \Phi$, Υ_{ϕ} es un conjunto conexo de combinaciones lineales de al menos dos caminos de un conjunto $\mathcal{L}_{\phi} \subset KQ_{\geq 2}$ tal que $\mathcal{L}_{\phi_1} \cap \mathcal{L}_{\phi_2} = \emptyset \Leftrightarrow \phi_1 \neq \phi_2$.

- Distinguimos si el conjunto Υ_{ϕ} es finito o infinito y entonces, reordenando la base de A, obtenemos

$$\{V, F, D, \{\Pi_{\gamma}\}_{\gamma \in \Gamma}, \{\Sigma_{\beta}\}_{\beta \in B}\}$$

  donde los Π_{γ} son los conjuntos finitos y los Σ_{β} son los conjuntos infinitos.

Topología débil-*

V y W K-espacios vectoriales, un apareamiento entre ellos es una aplicación bilineal $\langle -, - \rangle : V \otimes W \to K$.

Se dice no degenerado si

$$\begin{cases} \text{Si } \langle v, w \rangle = 0 \text{ para cualquier } v \in V \text{ entonces } w = 0 \\ \text{Si } \langle v, w \rangle = 0 \text{ para cualquier } w \in W \text{ entonces } v = 0 \end{cases}$$

equivalentemente,

$$\begin{array}{cc} \sigma : V \longrightarrow W^* & \tau : W \longrightarrow V^* \\ v \mapsto \langle v, - \rangle & w \mapsto \langle -, w \rangle \end{array}$$

son inyectivas

Ejemplo

(V, V^*) junto con el apareamiento $\langle v, f \rangle = f(v)$ $\forall v \in V$, $\forall f \in V^*$.
Este apareamiento es no degenerado y por tanto $V \xrightarrow{\sigma} V^{**}$ es inyectiva.

$\langle -, - \rangle$ apareamiento no degenerado entre V y W,

- Dado $S \subseteq V$,

$$S^{\perp} = \{ \ f \in V^* \text{ tales que } f(S) = 0\}$$

y

$$S^{\perp_W} = S^{\perp} \cap W = \{w \in W : \langle S, w \rangle = 0\}$$

$\langle -, - \rangle$ apareamiento no degenerado entre V y W,

- Dado $S \subseteq V$,

$$S^{\perp} = \{ \ f \in V^* \text{ tales que } f(S) = 0\}$$

y

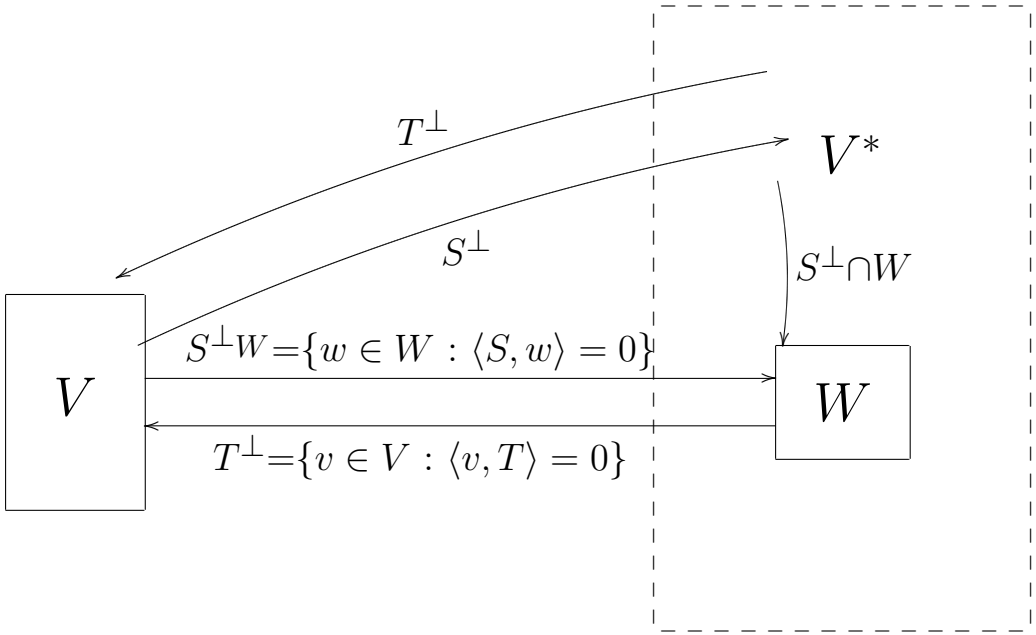
$$S^{\perp_W} = S^{\perp} \cap W = \{w \in W : \langle S, w \rangle = 0\}$$

- $T \subseteq V^*$ se define

$$T^{\perp} = \{ \ v \in V \text{ tales que } f(v) = 0 \ \forall f \in T\}$$

Si además $T \subseteq W$ entonces

$$T^{\perp} = \{ \ v \in V \text{ tales que } \langle v, w \rangle = 0 \ \forall w \in T\}.$$


$T^{\perp}$
V^*
$S^{\perp}$
$S^{\perp}\cap W$
V
$S^{\perp}W=\{w \in W : \langle S, w\rangle = 0\}$
W
$T^{\perp}=\{v \in V : \langle v, T\rangle = 0\}$

Dada $f \in V^*$ se define para cada $x \in V$,

$$\mathcal{U}_x^f = \{g \in V^* \text{ tales que } g(x) = f(x)\}$$

$\mathcal{U}^f = \{\mathcal{U}_x^f\}_{x \in V}$ subbase de entornos de f.

Dada $f \in V^*$ se define para cada $x \in V$,

$$\mathcal{U}_x^f = \{g \in V^* \text{ tales que } g(x) = f(x)\}$$

$\mathcal{U}^f = \{\mathcal{U}_x^f\}_{x \in V}$ subbase de entornos de f.

Entonces, una base de entornos de f

$$\mathcal{B}_{x_1,\ldots,x_n}^f = \{g \in V^* \text{ tales que } g(x_i) = f(x_i)\ i = 1, \ldots, n\}$$

.

Dada $f \in V^*$ se define para cada $x \in V$,

$$\mathcal{U}_x^f = \{g \in V^* \text{ tales que } g(x) = f(x)\}$$

$\mathcal{U}^f = \{\mathcal{U}_x^f\}_{x \in V}$ subbase de entornos de f.

Entonces, una base de entornos de f

$$\mathcal{B}^f_{x_1,\ldots,x_n} = \{g \in V^* \text{ tales que } g(x_i) = f(x_i)\ i = 1, \ldots, n\}$$

.

$$\Downarrow$$

Topología débil-* en V^*

Proposición

---

1. *La topología débil-* es la topología menos fina que hace continuas a las aplicaciones de V.*
2. $T \subseteq V^*$, $\overline{T} = T^{\perp\perp}$.
3. *Sea $\{A_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ una familia de subespacios de V, entonces*

$$\left(\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^{\perp} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^{\perp} \quad y \quad \left(\sum_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^{\perp_W} = \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^{\perp_W}$$

4. *Todo subespacio finito dimensional de W es cerrado.*

Proposición

---

1. *$A \leq V$ entonces $A^{\perp\perp} = A$.*
2. *$A \leq V$ de dimensión finita entonces $A^{\perp_W\perp} = A$.*
3. *Sean $\{T_i\}_{i\in I}$ una familia de subespacios de V^* entonces*

$$\left(\sum_{i\in I} T_i\right)^{\perp_V} = \bigcap_{i\in I} T_i^{\perp_V}$$

Coálgebras de caminos de quivers con relaciones

Dado Q quiver y Ω ideal admisible de KQ,

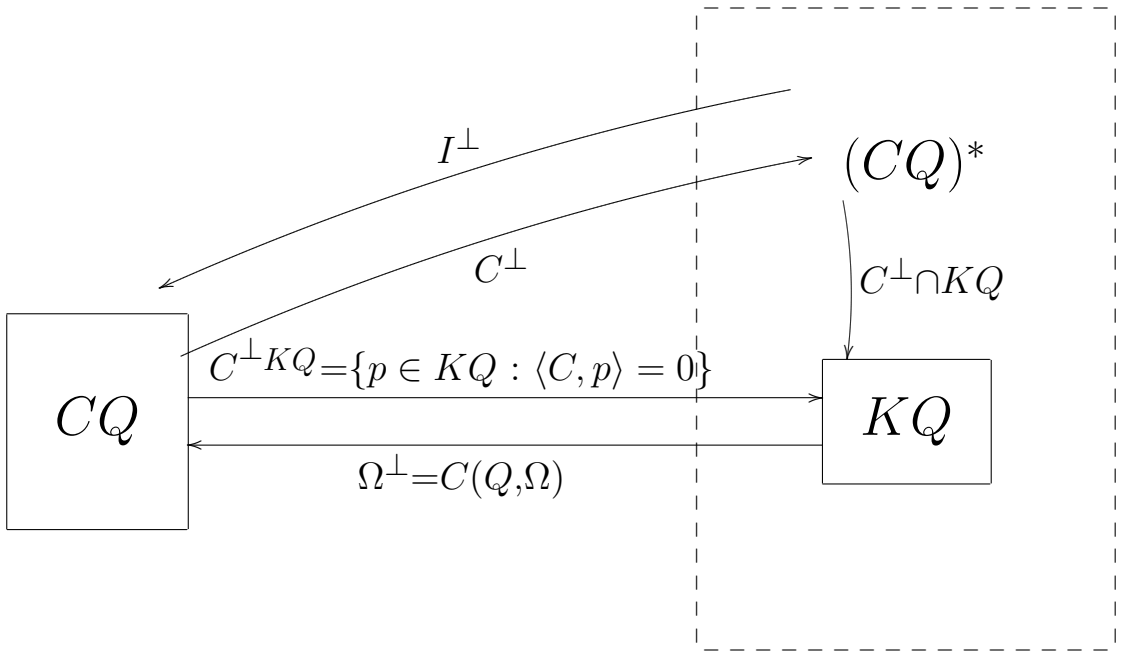
$$C(Q,\Omega) = \{a \in CQ \text{ tales que } \langle a, \Omega \rangle = 0\}$$

Coálgebras de caminos de quivers con relaciones

Dado Q quiver y Ω ideal admisible de KQ,

$$C(Q,\Omega) = \{a \in CQ \text{ tales que } \langle a, \Omega \rangle = 0\}$$

$\langle , \rangle : KQ \otimes CQ \longrightarrow K$ es un apareamiento no degenerado



Problema: Dada C subcoálgebra admisible de KQ, ¿existe un ideal admisible Ω de KQ tal que $C = \Omega^{\perp}$?

Problema: Dada C subcoálgebra admisible de KQ, ¿existe un ideal admisible Ω de KQ tal que $C = \Omega^{\perp}$?

Lema

Sea Q un quiver y C un subespacio vectorial de CQ, equivalen:

1. *Existe un subespacio Ω de KQ tal que $\Omega^{\perp} = C$.*
2. *$C^{\perp_{KQ}}$ es denso en $C^{\perp}$ con la topología débil-* en $(CQ)^*$.*
3. *$(C^{\perp_{KQ}})^{\perp} = C$.*

Base de C,

$$\{V, F, D, \{\Pi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}, \{\Sigma_\beta\}_{\beta\in B}\},$$

Base de C,

$$\{V, F, D, \{\Pi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}, \{\Sigma_\beta\}_{\beta\in B}\},$$

Entonces,

$$C = KV \oplus KF \oplus KD \oplus \left(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} K\Pi_\gamma\right) \oplus \left(\bigoplus_{\beta\in B} K\Sigma_\beta\right)$$

Base de C,

$$\{V, F, D, \{\Pi_\gamma\}_{\gamma\in\Gamma}, \{\Sigma_\beta\}_{\beta\in B}\},$$

Entonces,

$$C = KV \oplus KF \oplus KD \oplus \left(\bigoplus_{\gamma\in\Gamma} K\Pi_\gamma\right) \oplus \left(\bigoplus_{\beta\in B} K\Sigma_\beta\right)$$

- $KV = K(\mathcal{Q}\backslash V)^\perp$, $KF = K(\mathcal{Q}\backslash F)^\perp$ y $KD = K(\mathcal{Q}\backslash D)^\perp$.
- $K\Pi_\gamma$ es un espacio de dimensión finita entonces $K\Pi_\gamma = ((K\Pi_\gamma)^{\perp_{KQ}})^\perp$

Entonces,
$C = \Omega^{\perp}$ si y sólo si para cada $\beta \in B$, $\Sigma_{\beta} = (\Sigma_{\beta})^{\perp_{KQ}\perp}$.

Entonces,
$C = \Omega^{\perp}$ si y sólo si para cada $\beta \in B$, $\Sigma_\beta = (\Sigma_\beta)^{\perp_{KQ}\perp}$.

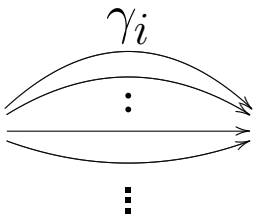
En particular,

Proposición

Si Q es un quiver localmente finito (entre dos puntos existe un número finito de caminos que los unen) y sin ciclos entonces existe una biyección

$$\{\textit{Subcoálg. admisib. de } CQ\} \longleftrightarrow \{\textit{Ideales admisibles de } KQ\}$$
$$C \longmapsto C^{\perp_{KQ}}$$
$$\Omega^{\perp} \longmapsfrom \Omega$$

Basta considerar

$Q \equiv$ 

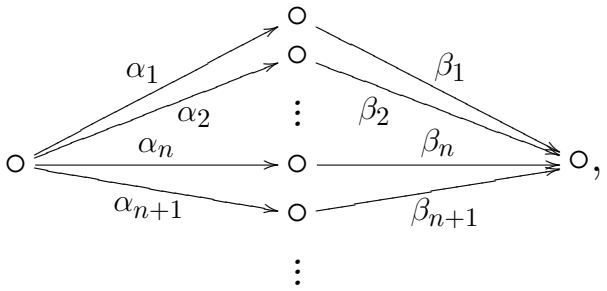
, I infinito

con $\mathcal{L} = \{\gamma_i\}_{i \in I}$ caminos de longitud mayor que 1.

$C \leq CQ$ generada por Σ, conjunto infinito y conexo de combinaciones lineales finitas de los elementos de $\mathcal{L}$, con $\gamma_i \notin C \ \forall i$.

Ejemplo

Consideramos el quiver

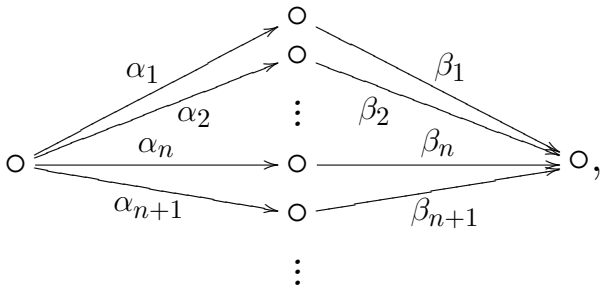


$\gamma_i = \beta_i \alpha_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

$H \leq CQ$ *generada por* $\Sigma = \{\gamma_i - \gamma_{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Ejemplo

Consideramos el quiver



$\gamma_i = \beta_i \alpha_i \ \forall i \in \mathbb{N}$

$H \leq CQ$ *generada por* $\Sigma = \{\gamma_i - \gamma_{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$.
$x = \sum_{i \geq 1} a_i \gamma_i \in H^{\perp} \Rightarrow \langle \gamma_i - \gamma_{i+1}, x \rangle = a_i - a_{i+1} = 0$
$\forall i \in \mathbb{N} \Rightarrow a_i = a_{i+1} \ \forall i \in \mathbb{N}$.
Entonces $H^{\perp} = \langle f = \sum_{i \geq 1} \gamma_i \rangle$ *y* $H^{\perp_{KQ}} = 0$

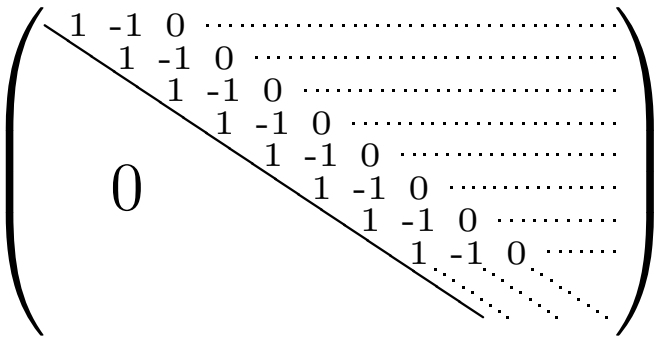
$$\nexists \Omega \text{ tal que } \Omega^{\perp} = H$$

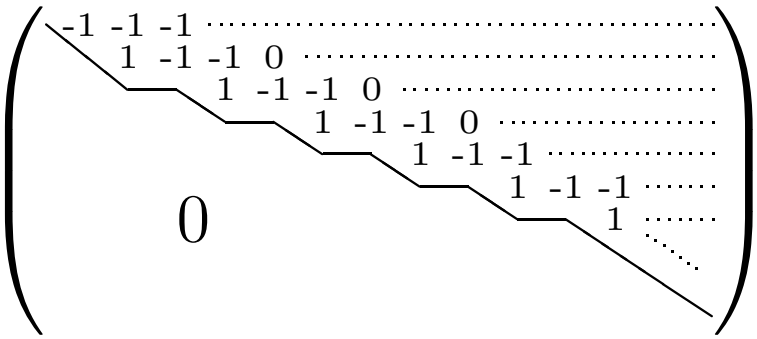
Ejemplo

Si $C \leq CQ$ *es generada por*

$$\Sigma = \{-\gamma_1 - \gamma_2, \{\gamma_{2i} - \gamma_{2i+1} - \gamma_{2i+2}\}_{i \geq 2}\}$$

Entonces si $\Omega = \langle \{-\gamma_{2n-1} + \gamma_{2n} + \gamma_{2n+1}\}_{n \geq 1} \rangle$ *se obtiene que* $\Omega^{\perp} = C$.

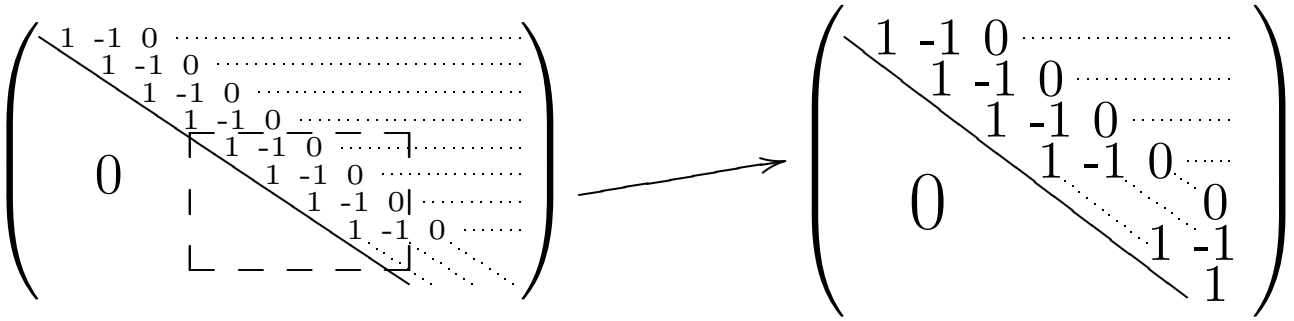

1 -1 0
1 -1 0
1 -1 0
1 -1 0
1 -1 0
1 -1 0
1 -1 0
1 -1 0
0


-1 -1 -1
1 -1 -1 0
1 -1 -1 0
1 -1 -1 0
1 -1 -1
1 -1 -1
1
0

En el caso $\Sigma = \{\gamma_i - \gamma_{i+1}\}_{i \in \mathbb{N}}$,

$C = C^{\perp_{KQ}\perp} \Leftrightarrow \forall f \in C^{\perp}$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ caminos $\exists h \in C^{\perp}$ de soporte finito tal que $h(\gamma_i) = f(\gamma_i)$

Tomamos $f = \sum \gamma_i$ y un γ_j cualquiera. $h(\Sigma) = 0$ produce un sistema con matriz asociada



Proposición

Sea Q el quiver

$$Q \equiv \circ \overset{\gamma_i}{\underset{\vdots}{\overset{\vdots}{\rightrightarrows}}} \circ, \quad I \text{ infinito}$$

y C la subcoálgebra admisible de CQ generada por Σ, conjunto conexo infinito de combinaciones lineales de los caminos γ_i tal que $\gamma_i \notin C \ \forall i \in I$.
Si existe $\Sigma' \subseteq \Sigma$ infinito, involucrando a caminos $\{\gamma_i\}_{i \in \mathbb{N} \subseteq I}$, tal que al triangularizar su matriz de coeficientes los elementos de la diagonal principal son distintos de cero entones <u>no</u> existe un ideal admisible Ω tal que $\Omega^{\perp} = C$.

Recíprocamente, supongamos que no existe Σ' en esas condiciones.

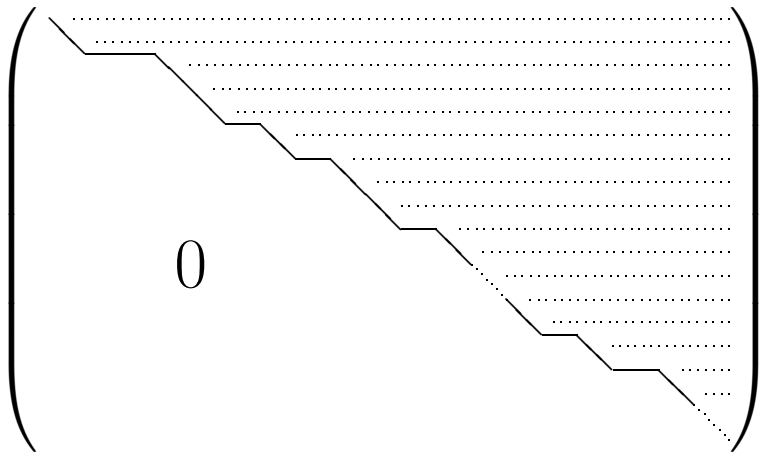
Recíprocamente, supongamos que no existe Σ' en esas condiciones.

Sea $f \in C^{\perp}$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ caminos. Buscamos $h \in C^{\perp}$ de soporte finito tal que $h(\gamma_i) = f(\gamma_i)\ \forall i = 1, \ldots, n$.

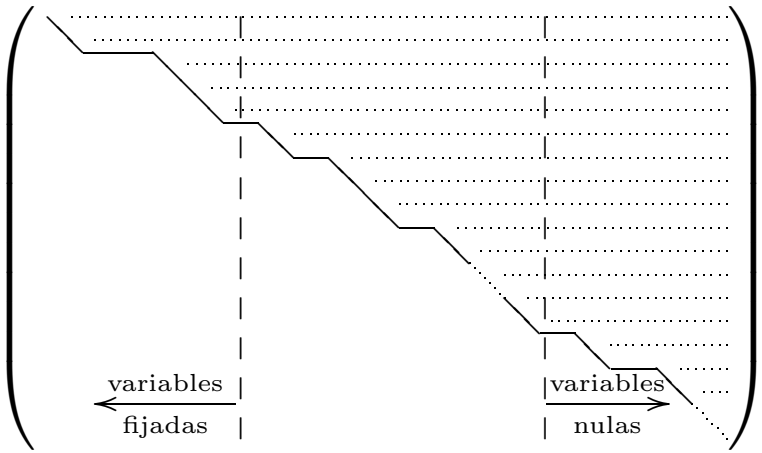
Recíprocamente, supongamos que no existe Σ' en esas condiciones.

Sea $f \in C^{\perp}$ y $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ caminos. Buscamos $h \in C^{\perp}$ de soporte finito tal que $h(\gamma_i) = f(\gamma_i)\ \forall i = 1, \ldots, n$.

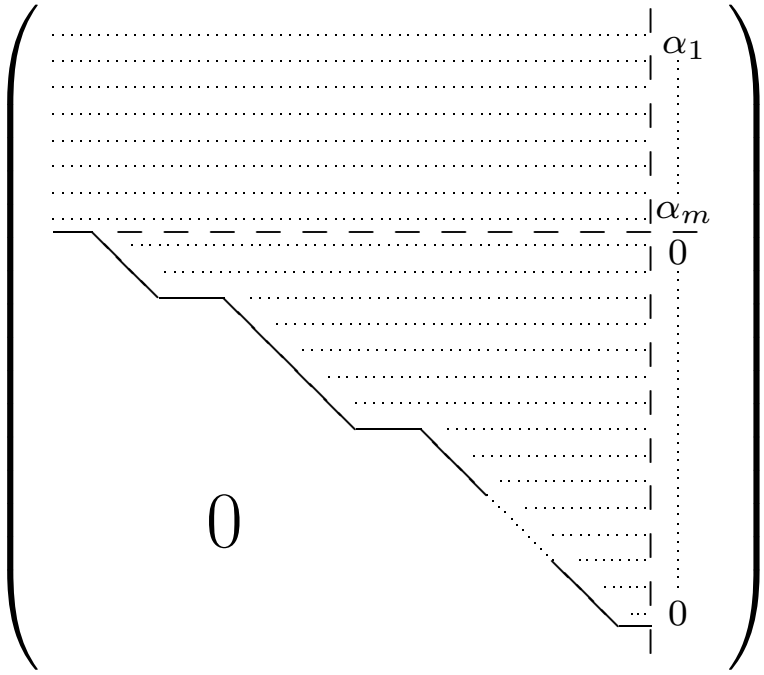
$h(\Sigma) = 0$ produce un sistema con matriz asociada



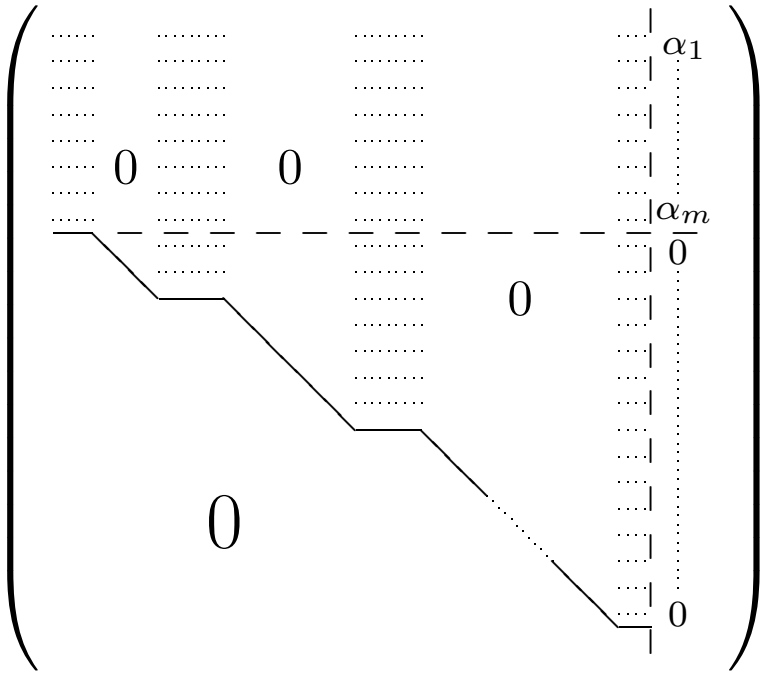
Podemos suponer que las variables asociadas a los caminos $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$ son las primeras



Entonces tratamos de resolver

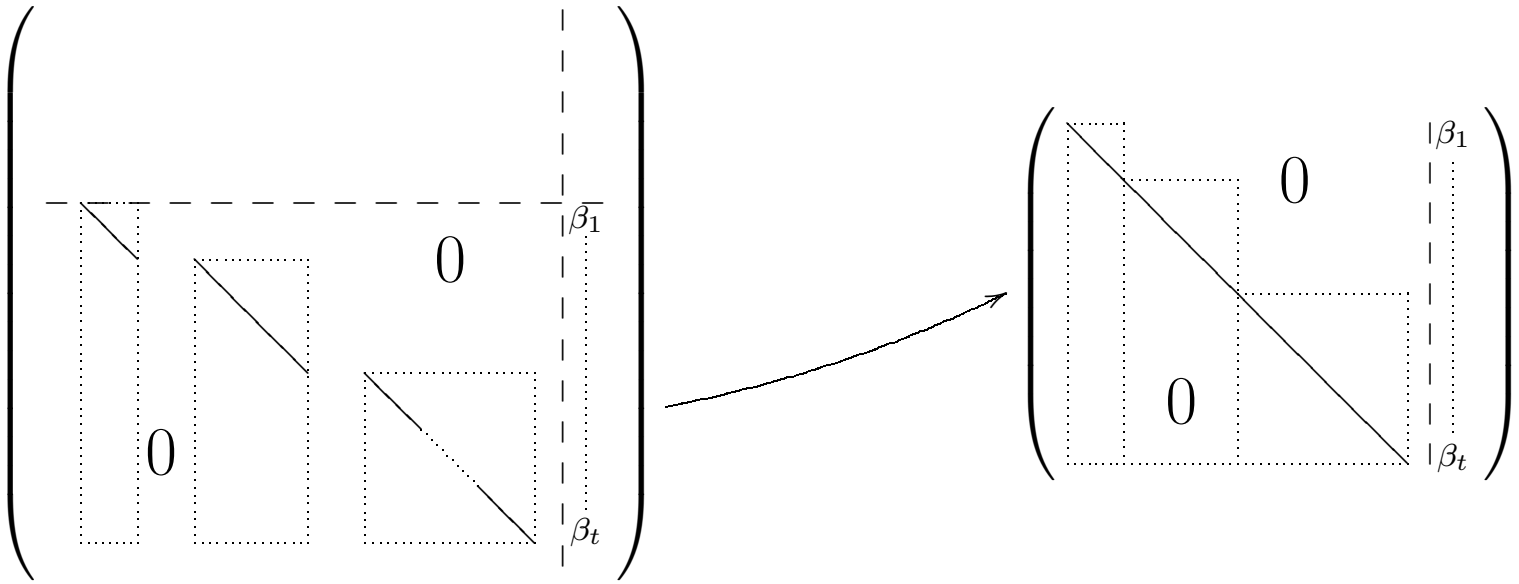


Podemos eliminar coeficientes por encima de la diagonal



f es solución y entonces tomamos los valores de f para variables las columnas y se verifican las primeras ecuaciones.

El resto es



En resumen,

Teorema

Sea C una coálgebra punteada y Q el quiver de Gabriel de C. C se puede expresar de la forma $C(Q, \Omega)$ para Ω un ideal admisible de KQ si y sólo C no contiene una subcoálgebra de la clase $\mathbb{H}$.