

Capítulo 5

Análisis de Correspondencias Simple.

Supongamos una Tabla Estadística del tipo *Tabla de Contingencia*. En este tipo de tabla se miden *frecuencias* (en principio, hoy día se consideran también tablas de contingencia más generales en este sentido), es decir, número de individuos k_{ij} pertenecientes a la clase i de la característica I y a la clase j de la característica J . Tanto I como J clasifican o *particionan una misma población*. La tabla bruta inicial, pues, es del tipo (k_{ij}) .

Como ocurre en general con cualquier *tipo de tabla*, (de contingencia, de rangos, de medidas, booleanas, etc), la Tabla bruta inicial debe ser transformada adecuadamente, teniendo en cuenta su naturaleza y características, de manera que se transforme en otra sobre la que las nociones y métodos generales del **Análisis Factorial General** puedan ser aplicados y sean útiles para analizar la tabla respectiva.

En una tabla de contingencia, por otra parte, no tiene sentido distinguir entre *variables* e *individuos*. Aquí ambos juegan un papel simétrico.

5.1. Transformación de una Tabla de Contingencia Bruta.

Dada una tabla de contingencia, con elementos k_{ij} , podemos escribirla así:

		Modalidad J				
		1	...	j	...	p
Modalidad I	1			:		
	:			:		
	i	k_{ij}
	:			:		
	n			:		

Consideramos la tabla transformada siguiente, llamada a veces tabla o matriz de correspondencias:

		Modalidad J										
		1	...	j	...	p	Total					
Modalidad I	1	$\begin{matrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}$					$\begin{matrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}$					
	:											
	i							$\frac{k_{ij}}{K}$
	:											
	n											
Total		$\begin{matrix} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \end{matrix}$					1					

$$K = \sum_{ij} k_{ij} \quad (5.1)$$

$$f_{ij} = \frac{k_{ij}}{K} \quad (5.2)$$

$$f_{i\cdot} = \sum_{j=1}^p f_{ij} = \sum_{j=1}^p \frac{k_{ij}}{K} \quad (5.3)$$

$$f_{\cdot j} = \sum_{i=1}^n f_{ij} = \sum_{i=1}^n \frac{k_{ij}}{K} \quad (5.4)$$

Nota: La razón, en principio, de introducir la nueva tabla transformada es la siguiente: Supongamos una tabla de contingencia bruta, inicial, en la que, por ejemplo, un punto-fila sea:

$$(783, 1114, 387, 4052, 497, 1464, 525, 387)$$

que constituye el reparto de 9209 individuos en 8 categorías, y supongamos que, respecto de esas mismas ocho categorías, se reparten 583 individuos, obteniéndose otro punto-fila:

$$(65, 43, 21, 294, 79, 57, 18, 6)$$

Si calculáramos la distancia euclídea entre estos dos puntos-fila, su valor no haría más que confirmar la gran diferencia de efectivos que hay en los puntos-fila considerados; pero no mediría la distancia entre los dos *tipos de comportamiento* que se reflejan en dichas filas. Habría, pues, que hacer una transformación sobre los datos brutos iniciales, k_{ij} , de manera que se eliminara el efecto de los efectivos totales de cada fila. Y lo mismo cabría decir de las columnas (puntos-columna). No olvidemos que en una tabla de contingencia, filas y columnas juegan un papel simétrico. Aquí no hay columnas-variables y filas-individuos, como por ejemplo en las Tablas de Medidas tratadas por Análisis de Componentes Principales.

5.2. Nubes de puntos en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n .

En primer lugar, insistamos en que aunque aquí no tiene sentido distinguir entre filas y columnas desde el punto de vista de la naturaleza de la tabla de contingencia, nos vamos a colocar en la situación general de una matriz de datos, $n \times p$, supuesto entonces que hemos fijado las filas (n) y las columnas (p).

Con objeto de eliminar, como antes decíamos, el efecto de los efectivos totales, definimos los **Perfiles-fila** y **Perfiles-columna**. Estos perfiles se definen así:

Perfiles-fila: $\left\{ \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} \right); j = 1, \dots, p \right\}_i$ afectados de masas $f_{i\cdot}$. Hay, pues, n perfiles-filas, cada uno afectado de la masa $f_{i\cdot}$ respectiva ($i = 1, \dots, n$).

Perfiles-columna: $\left\{ \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} \right); i = 1, \dots, n \right\}_j$, donde la masa de cada perfil es $f_{\cdot j}$.

Tenemos pues las siguientes *Tablas Transformadas* de perfiles:

	1	...	j	...	p	Masas
1	$\frac{f_{11}}{f_{1\cdot}}$...	$\frac{f_{1j}}{f_{1\cdot}}$...	$\frac{f_{1p}}{f_{1\cdot}}$	$f_{1\cdot}$
\vdots			\vdots			
i	$\frac{f_{i1}}{f_{i\cdot}}$...	$\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}$...	$\frac{f_{ip}}{f_{i\cdot}}$	$f_{i\cdot}$
\vdots			\vdots			
n	$\frac{f_{n1}}{f_{n\cdot}}$...	$\frac{f_{nj}}{f_{n\cdot}}$...	$\frac{f_{np}}{f_{n\cdot}}$	$f_{n\cdot}$

Tabla de Perfiles-Fila

	1	...	j	...	p
1	$\frac{f_{11}}{f_{\cdot 1}}$...	$\frac{f_{1j}}{f_{\cdot j}}$...	$\frac{f_{1p}}{f_{\cdot p}}$
\vdots			\vdots		
i	$\frac{f_{i1}}{f_{\cdot 1}}$...	$\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}}$...	$\frac{f_{ip}}{f_{\cdot p}}$
\vdots			\vdots		
n	$\frac{f_{n1}}{f_{\cdot 1}}$...	$\frac{f_{nj}}{f_{\cdot j}}$...	$\frac{f_{np}}{f_{\cdot p}}$
Masas	$f_{\cdot 1}$...	$f_{\cdot j}$...	$f_{\cdot p}$

Tabla de Perfiles-Columna

Así pues, existen dos *nubes de puntos*: una constituida por n puntos en \mathbb{R}^p de coordenadas:

$$\left(\frac{f_{i1}}{f_{i\cdot}}, \frac{f_{i2}}{f_{i\cdot}}, \dots, \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}, \dots, \frac{f_{ip}}{f_{i\cdot}} \right); i = 1, \dots, n \quad (5.5)$$

y la otra constituida por p puntos en \mathbb{R}^n de coordenadas

$$\left(\frac{f_{1j}}{f_{\cdot j}}, \frac{f_{2j}}{f_{\cdot j}}, \dots, \frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}}, \dots, \frac{f_{nj}}{f_{\cdot j}} \right); j = 1, \dots, p \quad (5.6)$$

cuyos puntos están afectados de masas $f_{i\cdot}$ y $f_{\cdot j}$ respectivamente.

Por otra parte, los n puntos-fila anteriores (o perfiles-fila) están situados en realidad en un subespacio $p - 1$ dimensional de \mathbb{R}^p , ya que existe entre las coordenadas de cualquiera de ellos la relación baricéntrica:

$$\sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} \right) = 1 \quad ; \quad i = 1, \dots, n$$

Lo mismo cabe decir de los p puntos-columna (perfiles-columna)

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} \right) = 1 \quad ; \quad j = 1, \dots, p$$

de modo que, análogamente, estos p puntos en \mathbb{R}^n , lo están en un subespacio $(n - 1)$ dimensional de \mathbb{R}^n .

5.3. Distancias en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n .

Cuando en AFG considerábamos la distancia entre *puntos-fila* o entre *puntos-columna*, se utilizaba la distancia euclídea habitual para medir la distancia entre puntos de \mathbb{R}^p o de \mathbb{R}^n respectivamente.

Como ahora, en ACS, consideramos los *perfiles-fila* y *perfiles-columna*, que siguen siendo *puntos* de \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n respectivamente, pero que están afectados de *masas*, la forma de medir distancias entre ellos ha de modificarse. Así, para medir la distancia entre dos *perfiles-fila*, correspondientes a los *individuos* i e i' , se puede utilizar, por ejemplo, la distancia χ^2 definida

$$d^2(i, i') = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}} \right)^2 \frac{1}{f_{\cdot j}} \quad (5.7)$$

(distancia ponderada).

Y en el caso de la distancia entre perfiles-columna, j y j' :

$$d^2(j, j') = \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \frac{1}{f_{i\cdot}} \quad (5.8)$$

Este tipo de distancia χ^2 , no es, naturalmente, la única que cabe considerar. Tradicionalmente se viene considerando como habitual en el Análisis de Correspondencias clásico y, como es sabido, entre otras ventajas, este tipo de distancia cumple lo que ya Bencekri denominó **Principio de Equivalencia Distribucional**, que desde luego también verifican otras distancias. En realidad es una cuestión de *invarianza* lo que implica dicho Principio: *Si dos puntos-fila se confunden en uno solo, en \mathbb{R}^p y se consideran englobados en un solo punto con masa la suma de las masas de ambos, entonces son invariantes las distancias entre los demás en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n . (Y lo mismo si se confunden puntos en \mathbb{R}^n)*

Esta invarianza que hace cumplirse el citado principio, tiene una profunda trascendencia en el Análisis de Correspondencias de una tabla de contingencia. En efecto, cuando se establecen las *clases* de las características I y J que definen la Tabla, hay un grado de arbitrariedad más o menos grande, de modo que podrían en un principio definirse clases en I o/y en J muy próximas entre sí. Bien podría ocurrir entonces, que clases definidas en un principio, se refundieran (o agregaran) en una sola por otros diversos motivos. En estos casos, es claro que la distancia que utilizásemos debería ser lo menos *sensible* ante esas *refundiciones* de clases, en el sentido de que no se alterasen las distancias entre puntos ya calculadas y que son entre puntos a los que no afectan en principio esas refundiciones. La distancia χ^2 dada por (5.7) y (5.8) cumple estas cualidades.

Esta distancia χ^2 es la *natural* considerando el espacio de puntos de los perfiles fila (o el de las columnas) como un espacio *euclídeo ponderado* con métrica definida por la matriz $\mathbb{D}_c^{-1} = \text{diag} \left(\frac{1}{f_{\cdot j}} \right)$, estando los puntos del correspondiente espacio afectados por las masas (ponderaciones) asociadas a cada punto, antes indicadas.

5.3.1. Sobre el Principio de equivalencia distribucional en Análisis de Correspondencias.

En el desarrollo del ACS que hemos realizado, la distancia adoptada entre puntos-fila o puntos-columna, en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n respectivamente, dotados de masas, habida cuenta del manejo a través de los respectivos *perfiles* que de ellos hacemos, viene dada por la métrica χ^2 en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n respectivamente (expresiones (5.7) y (5.8) del párrafo 5.3):

$$\begin{aligned} d^2(i, i') &= \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}} \right)^2 \frac{1}{f_{\cdot j}} \\ d^2(j, j') &= \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \frac{1}{f_{i\cdot}} \end{aligned} \quad (5.9)$$

En un lenguaje propio de la teoría de *Espacios Euclídeos Ponderados*, estas distancias al cuadrado no son más que, obviamente, las distancias al cuadrado entre puntos de los espacios euclídeos \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n ponderados, respectivamente, dadas por:

$$d^2(\bar{i}, \bar{i}') = (\bar{i} - \bar{i}')' \mathbb{D}_{\mathbb{R}^p}^{-1} (\bar{i} - \bar{i}') \quad ; \quad \mathbb{D}_{\mathbb{R}^p} = \text{diag}(f_{\cdot j})$$

$$d^2(\bar{j}, \bar{j}') = (\bar{j} - \bar{j}')' \mathbb{D}_{\mathbb{R}^n}^{-1} (\bar{j} - \bar{j}') \quad ; \quad \mathbb{D}_{\mathbb{R}^n} = \text{diag}(f_{i\cdot})$$

Aquí \bar{i} y \bar{i}' son puntos-vectores de \mathbb{R}^p y \bar{j} y \bar{j}' de \mathbb{R}^n y $\mathbb{D}_{\mathbb{R}^p}^{-1}$ y $\mathbb{D}_{\mathbb{R}^n}^{-1}$ definen las métricas en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n respectivamente.

En el párrafo 5.3 anterior ya hemos comentado el llamado Principio de Equivalencia Distribucional y su trascendencia en el ACS. Vamos a comprobar ahora que se verifica con las distancias de tipo (5.9).

Supongamos que los puntos-fila i e i' están superpuestos (se confunden) en \mathbb{R}^p . Entonces ello quiere decir que:

$$\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} = \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}} \quad j = 1, \dots, p$$

puesto que *estar superpuestos* implica que tienen iguales perfiles en \mathbb{R}^p . Por tanto, sus perfiles deben coincidir con el de un punto-fila, i^* , con un perfil superposición de ambos, y tal que

$$\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} = \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}} = \frac{f_{i^*j}}{f_{i^*\cdot}} \quad (5.10)$$

Obviamente, si entonces consideramos un punto-fila i^* , con masa la suma de las masas, $f_{i\cdot} + f_{i'\cdot} = f_{i^*\cdot}$, de los anteriores, ello equivale a considerar que i^* es la suma de las dos filas de aquellos. En efecto, de (5.10) se deduce que:

$$\frac{f_{ij} + f_{i'j}}{f_{i\cdot} + f_{i'\cdot}} = \frac{f_{i^*j}}{f_{i^*\cdot}}$$

de modo que al ser los denominadores iguales ($f_{i\cdot} + f_{i'\cdot} = f_{i^*\cdot}$), los numeradores han de serlo $f_{ij} + f_{i'j} = f_{i^*j}$, es decir, introducir el punto i con masa la suma de las sumas de i e i' , equivale a considerar el punto-suma de las filas correspondiente a los puntos i e i' en la matriz de correspondencias f_{ij} . Así pues, supongamos que sustituimos dos filas (i e i') de la matriz original (de las f_{ij}) por la fila única que es la suma de ambas filas, considerando que esta fila resultante tiene la masa dada por la suma de las masas correspondientes. La pregunta es ésta: ¿La superposición realizada altera las distancias entre puntos-fila en \mathbb{R}^p , o/y la distancia entre puntos-columna en \mathbb{R}^n ?

Contestemos por partes:

1. Las distancias entre puntos-fila en \mathbb{R}^p no se ven afectadas por la superposición. En efecto, si se consideran dos puntos-fila cualesquiera, la distancia al cuadrado χ^2 dada por (5.7), no se altera, ya que las ponderaciones $f_{\cdot j} = \sum_i f_{ij}$ no cambian si, en efecto, dos filas se han sustituido por la fila suma de ellas.
2. En cuanto a las distancias al cuadrado en \mathbb{R}^n ocurre lo siguiente: $d^2(j, j')$ contiene, entre otros sumandos, los correspondientes a las dos filas que se han confundido en una única (las i e i'). Estos dos sumandos son:

$$\frac{1}{f_{i\cdot}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 + \frac{1}{f_{i'\cdot}} \left(\frac{f_{i'j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i'j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2 \quad (5.11)$$

Pero esta expresión es igual a

$$\begin{aligned} f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} f_{\cdot j}} - \frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} f_{\cdot j'}} \right)^2 + f_{i'\cdot} \left(\frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot} f_{\cdot j}} - \frac{f_{i'j'}}{f_{i'\cdot} f_{\cdot j'}} \right)^2 = \\ = f_{i\cdot} B + f_{i'\cdot} B = (f_{i\cdot} + f_{i'\cdot}) B = f_{i^*\cdot} B \end{aligned}$$

Obsérvese que las cantidades entre paréntesis son en efecto iguales dado que $\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} = \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot}}$. Pero los dos términos en (5.11) se reemplazan, en la superposición, por

$$\frac{1}{f_{i^*\cdot}} \left(\frac{f_{i^*j}}{f_{\cdot j}} - \frac{f_{i^*j'}}{f_{\cdot j'}} \right)^2$$

Este último es, por otra parte, igual a

$$f_{i^*\cdot} \left(\frac{f_{i^*j}}{f_{i^*\cdot} f_{\cdot j}} - \frac{f_{i^*j'}}{f_{i^*\cdot} f_{\cdot j'}} \right)^2$$

que es igual a $f_{i*}B$.

Luego, en el proceso de superposición, al calcular $d^2(j, j')$ lo que se hace es sustituir los dos sumandos en (5.11) por su suma y los demás sumandos de $d^2(j, j')$ no se ven afectados por la superposición; luego $d^2(j, j')$ es invariante.

Finalmente, cabe decir que un resultado análogo se puede obtener cuando la superposición se hace en los puntos–columna, sustituyendo dos perfiles–columna cualesquiera por una nueva columna que tiene de masa la suma de las masas respectivas. Esta superposición de puntos–columna no afecta a la geometría de las filas, ni al resto de distancias χ^2 , entre los restantes puntos columna, en \mathbb{R}^n .

5.4. Ajustes a la nube de perfiles en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n .

Una vez que hemos definido las nubes de puntos perfiles (la de perfiles-fila y la de perfiles-columna, en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n respectivamente) y recordando que hemos fijado las filas y las columnas (descritas por los índices i y j respectivamente) y que en una tabla de contingencia los papeles desempeñados por los índices i y j (es decir, filas y columnas de la tabla) son simétricos, vamos a proceder al ajuste a ambas nubes de los correspondientes *subespacios óptimos*.

Para conseguirlo, cabría pensar en aplicar directamente, por ejemplo a la nube en \mathbb{R}^p , el Análisis de Componentes Principales. Pero hay una dificultad inicial para aplicar el ACP a la situación del ACS, y es que la distancia entre perfiles-fila (perfiles-columna) no es una suma de cuadrados, ya que en ACS, \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n no son euclídeos sino euclídeos ponderados.

Analizamos a continuación la forma de realizar los ajustes factoriales, primero en el caso de \mathbb{R}^p y luego en el de \mathbb{R}^n .

5.4.1. Ajuste, en \mathbb{R}^p , de la nube de perfiles-fila.

Los n puntos, perfiles-fila en \mathbb{R}^p , que constituyen la nube respectiva, son los de coordenadas

$$\left\{ \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} ; j = 1, \dots, p \right\} ; i = 1, \dots, n$$

Estos puntos pueden ser tratados a través de las coordenadas siguientes:

$$\left\{ \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} ; j = 1, \dots, p \right\} ; i = 1, \dots, n$$

Estas *coordenadas transformadas*, son tales que la distancia euclídea al cuadrado entre dos de esos puntos:

$$d^2(i, i') = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \frac{f_{i'j}}{f_{i'\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \right)^2 \quad (5.12)$$

coincide con la distancia χ^2 entre ellos, es decir, con la distancia según la métrica de la que anteriormente hemos dotado al espacio \mathbb{R}^p de perfiles-fila.

Pero ¿qué significa manejar los puntos (perfiles-fila) en \mathbb{R}^p , mediante las coordenadas transformadas? Evidentemente, pasar de las coordenadas $\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}$ a las transformadas, $\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}}$, no es otra cosa que realizar un cambio de escala en los ejes de \mathbb{R}^p $\left(f_{ij} \rightarrow \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \right)$.

Por tanto la dificultad antes planteada de que el ACP no se podía aplicar directamente al análisis de la nube de perfiles-fila en \mathbb{R}^p , queda obviada si manejamos dichos perfiles a través de las coordenadas transformadas, $\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}}$, y la distancia euclídea entre puntos transformados equivale a la distancia χ^2 entre perfiles-fila.

Por tanto, a continuación, vamos a aplicar el ACP a la nube de puntos dados por las coordenadas transformadas en \mathbb{R}^p , dotado de la distancia euclídea habitual.

Al aplicar el ACP, como previamente hemos visto, es preciso a su vez transformar adecuadamente la situación, trasladando el origen del sistema de referencia al centro de gravedad de la respectiva¹ nube de puntos en \mathbb{R}^p .

¿Cual es el centro de gravedad de la nube de puntos? Como están afectados de una masa $f_{i\cdot}$,

$$\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \rightarrow \frac{1}{f_{i\cdot}} \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}}$$

dicho centro de gravedad viene dado por:

$$\left\{ \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \right) = \sqrt{f_{\cdot j}} \ ; \ j = 1, \dots, p \right\} \quad (5.13)$$

Por tanto, al trasladar el origen al centro de gravedad, las coordenadas de los puntos-perfiles fila, en \mathbb{R}^p , pasan a ser

$$\left\{ \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \ ; \ j = 1, \dots, p \right\} \ ; \ i = 1, \dots, n \quad (5.14)$$

Siguiendo la metodología del Análisis Factorial General, al proyectar esta nube de puntos transformados dada por (5.14) sobre el subespacio vectorial definido por el vector unitario u , cada punto i ; $i = 1, \dots, n$, proporcionará una proyección, $\hat{\Psi}_i$, dada así:

$$\hat{\Psi}_i = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) u_j \quad (5.15)$$

en donde u_j es la j -ésima componente del vector unitario, u , en \mathbb{R}^p . Pero el punto i -ésimo está dotado de una masa $f_{i\cdot}$. Por tanto, la **inercia** de la nube (5.14), es decir, la suma ponderada por $f_{i\cdot}$ de todas las proyecciones al cuadrado, valdrá:

$$\sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \hat{\Psi}_i^2 \quad (5.16)$$

por tanto, el subespacio definido por aquel vector, u , tal que se verifica

$$\text{Max}_u \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \hat{\Psi}_i^2$$

define la *primera componente principal* según la metodología del AFG. Continuando dicha metodología, se llega a la conclusión de que la matriz de covarianzas a diagonalizar para obtener todas las componentes principales, $T_{p \times p}$, es la de término general

$$t_{jj'} = \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) \quad (5.17)$$

Comentario 5.4.1 Es fácil ver que esta matriz T que resuelve el problema puede ponerse como $T = X'X$, donde X es una matriz $n \times p$, con término general x_{ij} dado por

$$x_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{i\cdot}f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}} \quad (5.18)$$

En efecto, según (5.15), se tiene para la proyección del i -ésimo punto sobre u ,

¹Recuérdese que, a su vez, el ACP se resolvió aplicando el AFG, por lo tanto, ajustando subespacios vectoriales, lo que requiere obviamente el centramiento en media.

$$\begin{aligned}\widehat{\Psi}_i &= \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) u_j = \\ &= \left(\frac{f_{i1}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot 1}}} - \sqrt{f_{\cdot 1}}, \dots, \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}}, \dots, \frac{f_{ip}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot p}}} - \sqrt{f_{\cdot p}} \right)_{1 \times p} (u_1, \dots, u_p)'_{p \times 1}\end{aligned}$$

Podemos considerar globalmente las proyecciones de todos los puntos, en $i = 1, \dots, n$, englobándolas en la expresión matricial:

$$\begin{pmatrix} \frac{f_{11}}{f_{1\cdot} \sqrt{f_{\cdot 1}}} - \sqrt{f_{\cdot 1}} & \dots & \frac{f_{1j}}{f_{1\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} & \dots & \frac{f_{1p}}{f_{1\cdot} \sqrt{f_{\cdot p}}} - \sqrt{f_{\cdot p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_{i1}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot 1}}} - \sqrt{f_{\cdot 1}} & \dots & \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} & \dots & \frac{f_{ip}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot p}}} - \sqrt{f_{\cdot p}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_{n1}}{f_{n\cdot} \sqrt{f_{\cdot 1}}} - \sqrt{f_{\cdot 1}} & \dots & \frac{f_{nj}}{f_{n\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} & \dots & \frac{f_{np}}{f_{n\cdot} \sqrt{f_{\cdot p}}} - \sqrt{f_{\cdot p}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_j \\ \vdots \\ u_p \end{pmatrix} = Hu$$

en donde $H_{n \times p} u_{p \times 1}$ es el vector columna n -dimensional que contiene las n proyecciones $\widehat{\Psi}_i$; $i = 1, \dots, n$, de los n puntos de la nube de puntos. Por lo tanto, si consideramos

$$(Hu)' (Hu)$$

obtenemos la suma de los cuadrados de todas las proyecciones $\widehat{\Psi}_i$. Para obtener, finalmente, la expresión (5.16), es decir, la suma ponderada de las proyecciones al cuadrado que constituye la Inercia de la nube de puntos, tendremos que efectuar la operación

$$\sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \widehat{\Psi}_i^2 = \left(\sqrt{f_{i\cdot}} Hu \right)' \left(\sqrt{f_{i\cdot}} Hu \right) = (H^* u)' (H^* u)$$

en donde la matriz $H_{n \times p}^*$ tiene por elementos:

$$h_{ij}^* = \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \sqrt{f_{i\cdot}} \quad i = 1, \dots, n \quad ; \quad j = 1, \dots, p$$

Obsérvese que

$$h_{ij}^* = \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \sqrt{f_{i\cdot}} = \frac{f_{ij} - f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \sqrt{f_{i\cdot}} = \frac{f_{ij} - f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}}$$

con lo que queda demostrado (5.18) con $H^* = X$.

Comentario 5.4.2 Por otra parte, probemos (5.17), expresión que denota el término general $t_{j,j'}$ de la matriz T , cuyos autovalores resuelven el problema de Componentes Principales.

Es claro que la matriz $X'X$, en notación del AFG, es la matriz que ha de resolver el problema, en donde X es la matriz final de los datos, sobre la que se realiza la técnica factorial, obtenida después de las transformaciones necesarias aplicadas a la matriz inicial de datos brutos.

En el caso del ACS, la matriz X será la H^* , de tal manera que hemos de considerar $(H^*)' (H^*)$ en virtud de que la inercia está afectada por las masas de los perfiles, $f_{i\cdot}$, todo ello según la expresión (5.16).

En efecto, el término $t_{j,j'}$ de la matriz $T_{p \times p} = (H^*)' (H^*)$ viene dado por:

$$\text{fila } j\text{-ésima de } (H^*)' \times \text{columna } j'\text{-ésima de } H^* =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{f_{1j}}{f_{1\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \sqrt{f_{1\cdot}} \left(\frac{f_{1j'}}{f_{1\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) \sqrt{f_{1\cdot}} + \dots + \\
&+ \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \sqrt{f_{i\cdot}} \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) \sqrt{f_{i\cdot}} + \dots + \\
&+ \left(\frac{f_{nj}}{f_{n\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \sqrt{f_{n\cdot}} \left(\frac{f_{nj'}}{f_{n\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) \sqrt{f_{n\cdot}}.
\end{aligned}$$

Esta expresión del término (j, j') puede ponerse en la forma

$$\sum_{i=1}^n \sqrt{f_{i\cdot}} \sqrt{f_{\cdot j}} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) = t_{jj'}$$

que coincide con la expresión (5.17), como pretendíamos demostrar.

Conclusión final:

Calculados por la teoría general los autovalores λ_α de la matriz simétrica T dada por (5.17), la proyección de un punto, i , sobre el eje factorial α -ésimo, u_α , vendrá dada por:

$$\hat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) u_{\alpha j} \quad (5.19)$$

en donde u_α es el autovector de T asociado a λ_α , con $\alpha = 1, \dots, p$.

5.4.2. Simplificación en los cálculos de las proyecciones $\hat{\Psi}_{\alpha i}$.

Hay, pues, que calcular los autovalores de la matriz $T = (H^*)'(H^*) \equiv X'_{p \times n} X_{n \times p}$. Pueden comprobarse los hechos siguientes:

1. El vector $u_p = (\sqrt{f_{\cdot 1}}, \dots, \sqrt{f_{\cdot j}}, \dots, \sqrt{f_{\cdot p}})'$ es un vector propio de T , con respecto al autovalor 0.

En efecto, esto quiere decir que $(T - \lambda I)u = 0$ es cierto para

$$T_{p \times p} u_{p(p \times 1)} = 0_{p \times 1}$$

Es decir

$$T \cdot (\sqrt{f_{\cdot 1}}, \dots, \sqrt{f_{\cdot j}}, \dots, \sqrt{f_{\cdot p}})' = 0_{p \times 1}$$

lo cual es fácilmente comprobable (ver Observación 5.4.4).

2. El hecho de que $u_p = (\sqrt{f_{\cdot j}}; j = 1, \dots, p)$ sea autovalor de T conlleva consecuencias interesantes que permiten simplificar los cálculos para obtener las proyecciones de los puntos sobre los ejes factoriales. En efecto, nótese en primer lugar que dado cualquiera otro de los autovectores u_α , y denotando por $u_{\alpha j}$ a su j -ésima componente, se verifica:

$$\sum_{j=1}^p u_{\alpha j} \sqrt{f_{\cdot j}} = 0 \quad (5.20)$$

en virtud de la ortogonalidad entre autovectores. En segundo lugar, si consideramos la proyección del punto i -ésimo de la nube sobre el eje α , $\hat{\Psi}_{\alpha i}$, dada por (5.19), esta expresión se puede simplificar. En efecto,

$$\hat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) u_{\alpha j} = \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} u_{\alpha j} - \sum_{j=1}^p \sqrt{f_{\cdot j}} u_{\alpha j}$$

de donde

$$\hat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \right) u_{\alpha j} \quad (5.21)$$

3. Por otra parte puede comprobarse lo siguiente: si u_{α} es autovector de T , distinto del antes denotado u_p , lo es también de $T^* = X^{*'} X^*$, donde

$$X^* = (x_{ij}^*) \quad x_{ij}^* = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \quad (5.22)$$

y respecto del mismo autovalor.

Así pues, X^* no es centrada en contraposición con X que sí lo es. Pero es más fácil manejar X^* , de tal forma que es más simple realizar el Análisis de Correspondencias sobre $T^* = X^{*'} X^*$ que sobre $T = X' X$.

Obsérvese que hay que tener en cuenta, no obstante, que ello es cierto para todos los autovectores excepto para el denotado u_p , que lo era de T respecto del autovalor 0. Este autovector u_p lo es también de la nueva matriz, T^* , pero en cambio lo es respecto del autovalor unidad.

Comentario 5.4.3 Si usamos $x_{ij}^* = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}}$ en lugar de $x_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{i\cdot} f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}}$ podemos comprobar que $T^* = X^{*'} X^*$ cumple respecto de los autovectores la propiedad dicha.

Primero veamos qué forma tiene T^* .

$$T^* = \begin{pmatrix} \frac{f_{11}}{\sqrt{f_{1\cdot} f_{\cdot 1}}} & \cdots & \frac{f_{i1}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot 1}}} & \cdots & \frac{f_{n1}}{\sqrt{f_{n\cdot} f_{\cdot 1}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_{1j}}{\sqrt{f_{1\cdot} f_{\cdot j}}} & \cdots & \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} & \cdots & \frac{f_{nj}}{\sqrt{f_{n\cdot} f_{\cdot j}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_{1p}}{\sqrt{f_{1\cdot} f_{\cdot p}}} & \cdots & \frac{f_{ip}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot p}}} & \cdots & \frac{f_{np}}{\sqrt{f_{n\cdot} f_{\cdot p}}} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} \frac{f_{11}}{\sqrt{f_{1\cdot} f_{\cdot 1}}} & \cdots & \frac{f_{1j'}}{\sqrt{f_{1\cdot} f_{\cdot j'}}} & \cdots & \frac{f_{1p}}{\sqrt{f_{1\cdot} f_{\cdot p}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_{i1}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot 1}}} & \cdots & \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j'}}} & \cdots & \frac{f_{ip}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot p}}} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{f_{n1}}{\sqrt{f_{n\cdot} f_{\cdot 1}}} & \cdots & \frac{f_{nj'}}{\sqrt{f_{n\cdot} f_{\cdot j'}}} & \cdots & \frac{f_{np}}{\sqrt{f_{n\cdot} f_{\cdot p}}} \end{pmatrix}$$

luego el término genérico $t_{jj'}$ de la matriz $T^* = X^{*'} X^*$ se expresa así:

$$t_{jj'}^* = \frac{f_{1j}f_{1j'}}{f_{1\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\sqrt{f_{\cdot j'}}} + \cdots + \frac{f_{ij}f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\sqrt{f_{\cdot j'}}} + \cdots + \frac{f_{nj}f_{nj'}}{f_{n\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\sqrt{f_{\cdot j'}}$$

es decir

$$t_{jj'}^* = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\sqrt{f_{\cdot j'}}$$

Obsérvese que también puede ser expresado así:

$$t_{jj'}^* = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}f_{ij'}}{f_{i\cdot}^2\sqrt{f_{\cdot j}}\sqrt{f_{\cdot j'}}} f_{i\cdot} = \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} \right) \quad (5.23)$$

Comparando con la expresión (5.17) se ve que $t_{jj'}^*$ es análogo a $t_{jj'}$, salvo que no está centrado, es decir, no está restado el centro de gravedad dado por las coordenadas

$$\left(\sqrt{f_{\cdot j}} ; j = 1, \dots, p \right)$$

Por tanto podemos decir que X^* es una matriz no centrada, al contrario de X que sí lo es.

En segundo lugar, veamos lo siguiente: *Todos los autovectores v_α de la matriz T , excepto u_p , lo son también de T^* y respecto de los mismos autovalores. En cambio, u_p es autovector también de T^* pero en lugar de serlo respecto del autovalor nulo de T , lo es del autovalor unidad de T^* .*

En efecto, supongamos un autovector $u_\alpha \neq u_p$, de componentes $u_{\alpha j}$. Si v_α es autovector de T respecto del autovalor λ_α y u_α lo es de T^* respecto del mismo autovalor, entonces

$$Tu_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha$$

$$T^*u_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha$$

Luego se trata de comprobar que $Tv_\alpha = T^*u_\alpha$. Ahora bien, Tu_α es un vector $(p \times 1)$, cuya j -ésima componente se obtendrá multiplicando la j -ésima fila de T por el vector u_α , de componentes $u_{\alpha j'}$, o sea:

$$\sum_{j'=1}^p t_{jj'} u_{\alpha j'}$$

Análogamente, se llegaría a

$$\sum_{j'=1}^p t_{jj'}^* u_{\alpha j'}$$

como expresión de la j -ésima componente del vector (T^*u_α)

Por tanto se trata de comprobar que

$$\sum_{j'=1}^p t_{jj'} u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^p t_{jj'}^* u_{\alpha j'} \quad (5.24)$$

En efecto, utilizando (5.17) y (5.23)

$$\sum_{j'=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \left[\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right] \left[\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right] \right\} u_{\alpha j'} =$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j'=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \left[\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \right] \left[\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} \right] u_{\alpha j'} - \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} - \right. \\
&\quad \left. - \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} u_{\alpha j'} + \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} \right\}
\end{aligned}$$

y permutando las sumas, queda sólo el primer término del segundo, con lo que se prueba (5.24), puesto que, aplicando la expresión (5.20),

$$\sum_{j=1}^p u_{\alpha j} \sqrt{f_{\cdot j}} = 0$$

se obtiene:

1.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j'=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \right\} u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \right\} u_{\alpha j'} = \\
&= \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \left(\sum_{j'=1}^p \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} \right) = 0
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
&\sum_{j'=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} \right\} u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^p \left\{ \sum_{i=1}^n \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{\cdot j'}}} \right\} u_{\alpha j'} = \\
&= \sum_{j'=1}^p \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{\sqrt{f_{\cdot j'}}}{f_{\cdot j'}} \left(\sum_{i=1}^n f_{ij'} \right) u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^p \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} = \\
&= \sqrt{f_{\cdot j}} \sum_{j'=1}^p \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} = 0
\end{aligned}$$

3.

$$\sum_{j'=1}^p \sum_{i=1}^n \left\{ f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \right\} u_{\alpha j'} = \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \left(\sum_{j'=1}^p \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} \right) = 0$$

Comentario 5.4.4 En cuanto al estudio del vector $u_p = (\sqrt{f_{\cdot j}} ; j = 1, \dots, p)$, se tiene lo siguiente:

$$\sum_{j'} t_{jj'} \sqrt{f_{\cdot j'}} = \text{elemento } j\text{-ésimo del vector } Tu_p = \lambda_p u_p = 0$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
&\sum_{j'=1}^p \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \left[\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right] \left[\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right] \sqrt{f_{\cdot j'}} = \\
&= \sum_{j'=1}^p \left[\sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} - \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \sqrt{f_{\cdot j'}} - \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} + \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \Big] = \\
& = \sum_{j'=1}^p \left[\sum_{i=1}^n \frac{f_{ij} f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} f_{\cdot j'} - \sum_{i=1}^n f_{ij'} \sqrt{f_{\cdot j}} + \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} f_{\cdot j'} \right] = \\
& = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \left(\sum_{j'=1}^p f_{ij'} \right) - \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \left(\sum_{j'=1}^p f_{\cdot j'} \right) - \\
& - \sum_{i=1}^n \sqrt{f_{\cdot j}} \left(\sum_{j'=1}^p f_{ij'} \right) + \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \left(\sum_{j'=1}^p f_{\cdot j'} \right) = \\
& = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} f_{i\cdot} - \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sum_{i=1}^n \sqrt{f_{\cdot j}} f_{i\cdot} + \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} = 0
\end{aligned}$$

Así pues, el vector u_p es autovector de T , respecto del autovalor 0. En cambio, este autovector u_p , que lo es también de T^* , lo es respecto del autovalor 1 de dicha matriz T^* .

Es decir, se verifica:

$$T^* u_p = u_p \quad ; \quad \sum_{j'=1}^p t_{jj'}^* u_{pj'} = u_{pj}$$

O sea, en virtud de (5.23),

$$\sum_{j'=1}^p \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij} f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} = \sqrt{f_{\cdot j}}$$

En efecto:

$$\begin{aligned}
& \sum_{j'=1}^p \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij} f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} = \sum_{j'=1}^p \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij} f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} = \\
& = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \left(\sum_{j'=1}^p \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} f_{i\cdot} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} = \\
& = \frac{1}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \sum_{i=1}^n f_{ij} = \frac{f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} = \sqrt{f_{\cdot j}}
\end{aligned}$$

5.4.3. Ajuste a la nube de puntos-columna, en \mathbb{R}^n , constituida por los perfiles-columna.

Para construir este ajuste, con la metodología empleada en el ajuste en \mathbb{R}^p , basta, en ACS, efectuar una permutación de los índices generales i, j a todo lo realizado en el citado ajuste en \mathbb{R}^p . Que esto es cierto en ACS, es obvio: estamos aplicando técnicas factoriales (AFG o ACP) a una matriz inicial de datos que constituye, estadísticamente hablando, una Tabla de Contingencia, en la que el papel de filas y columnas es intercambiable, y, al contrario que ocurre en otras tablas, como por ejemplo las tablas de medidas (variables-observaciones) a las que se aplica ACP, los papeles de fila y columna son intercambiables.

Comentario 5.4.5 *Adviértase que al enunciar que los índices son intercambiables, no se quiere decir que al realizar el ajuste en \mathbb{R}^n a los perfiles-columna, aparezca el mismo ajuste. Lo que queremos decir es que, técnicamente hablando, el ajuste en \mathbb{R}^n se puede obtener intercambiando i y j simplemente.*

Ahora consideramos los puntos j de la nube en \mathbb{R}^n , que tienen por coordenadas:

$$\left\{ \frac{f_{ij}}{f_{\cdot j} \sqrt{f_{i\cdot}}} \mid i = 1, \dots, n ; f_{\cdot j} \right\} \quad j = 1, \dots, p$$

en donde $f_{\cdot j}$ es la masa de cada punto.

El centro de gravedad de los p puntos anteriores o centro de gravedad de la nube en \mathbb{R}^n , es el punto de coordenadas $(\sqrt{f_{i\cdot}} \mid i = 1, \dots, n)$. A partir de esta nube y centro de gravedad todo el desarrollo es paralelo al realizado en el caso de la nube en \mathbb{R}^p .

En concreto, el AFG (o el ACP si se quiere) se aplicaría en este caso a una matriz S (la antes denotada T), cuyos autovalores y autovectores resuelven la cuestión. Esta matriz S tendrá como elemento genérico

$$s_{ii'} = \sum_{j=1}^p f_{\cdot j} \left[\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j} \sqrt{f_{i\cdot}}} - \sqrt{f_{i\cdot}} \right] \left[\frac{f_{i'j}}{f_{\cdot j} \sqrt{f_{i'\cdot}}} - \sqrt{f_{i'\cdot}} \right] \quad i, i' = 1, \dots, n$$

S es, evidentemente, de dimensión $n \times n$, mientras que T lo era $p \times p$.

Todo el tratamiento es análogo al del caso anterior en \mathbb{R}^p . Así, por ejemplo, el escribir S como producto (de la forma $X'X$) ahora será en términos de una matriz análoga a la dada por (5.18) pero permutando i por j , llamémosla X^* , y por otro lado, según el AFG y/o ACP, considerando XX' en lugar de $X'X$. En definitiva:

$$S_{n \times n} = H^* H^{*'} = X_{n \times p}^* X_{p \times n}^{*'}$$

Comentario 5.4.6 *Nótese que:*

$$H_{n \times p}^* = ((h_{ij}^*)) \quad ; \quad h_{ij}^* = \frac{f_{ij} - f_{\cdot j} f_{i\cdot}}{\sqrt{f_{\cdot j} f_{i\cdot}}} = h_{ij} = x_{ij}$$

por lo que $H^* = X$. Basta tener en cuenta la observación 5.4.1 anterior. En definitiva, en lugar de considerar $T = X'X$, consideramos $S = XX'$.

Igual que en el caso de la nube en \mathbb{R}^p , aquí puede simplificarse el cálculo de autovalores y autovectores, porque, como es fácil comprobar, podemos calcularlo sobre una matriz no centrada, S^* , más fácil de manejar, que tiene los mismos autovalores y autovectores que la matriz S y que es del tipo no centrado:

$$S^* = X^{**} X^{**'}$$

en donde $X^{**} = (x_{ij}^{**})$, siendo

$$x_{ij}^{**} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}}$$

Comentario 5.4.7 *Puesto que $x_{ij}^{**} = x_{ij}^*$, $S = X^* X^{*'}$, en la misma forma en que $T = X'X$ en la observación 5.4.3 anterior referida a la simplificación en los cálculos sobre la nube en \mathbb{R}^p de perfiles-fila.*

Una vez que hemos fijado las matrices sobre las que actuar para el cálculo del subespacio ajustado a la nube de perfiles-columna, a saber, $S = XX'$ o bien $S^* = X^* X^{*'}$, en el caso de actuar con la matriz no centrada simplificada, se procedería al cálculo de los autovalores y autovectores de dicha matriz base de los cálculos. Sean $(\mu_\alpha; v_\alpha)$ las parejas de autovalores-autovectores de S . Una aplicación obvia de lo visto al respecto en AFG, conduce a las conclusiones siguientes:

1. Los autovalores no nulos de S coinciden con los de la matriz T (utilizada en el ajuste de los perfiles-fila). De modo que $\lambda_\alpha = \mu_\alpha$; $\alpha = 1, \dots, q$; en donde q son los no nulos de los $\alpha = 1, \dots, p$ autovalores λ_α .
2. Los correspondientes autovectores, v_α , que definen la estructura factorial ajustada a la nube de perfiles-columna en \mathbb{R}^n , se obtendrán a partir de la solución del sistema $(S - \mu I)v = 0$ para $\mu = \mu_\alpha = \lambda_\alpha$; $\alpha = 1, \dots, p$.

3. Finalmente, a los autovalores y autovectores $(\mu_\alpha; v_\alpha)$ le son aplicados respecto de las matrices S o S^* antes definidas, todas las propiedades vistas para T y T^* en la observación 5.4.3 anterior, considerando que el autovector equivalente a $u_p = (\sqrt{f_{\cdot j}}; j = 1, \dots, p)$ es ahora el vector $v_p = (\sqrt{f_{i \cdot}}; i = 1, \dots, n)$.

En función de estas consideraciones, se obtiene la siguiente conclusión final sobre el ajuste en \mathbb{R}^n :

Sean $\hat{\Phi}_{\alpha j}$ las coordenadas-proyección sobre el Entonces:

$$\hat{\Phi}_{\alpha j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j} \sqrt{f_{i \cdot}}} \right) v_{\alpha i} \quad (5.25)$$

en donde $v_{\alpha i}$ es la i -ésima componente del autovector v_α de la matriz S , siendo v_α el α -ésimo vector unitario factorial en \mathbb{R}^n cuyo soporte es el α -ésimo eje factorial en \mathbb{R}^n

Comentario 5.4.8 En el esquema adjunto se recoge sumariamente todo el proceso de cálculo en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n que hasta aquí hemos seguido.

5.5. Relaciones entre las nubes ajustadas en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n .

En el párrafo anterior hemos ajustado a las nubes de puntos-fila y punto-columna, en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n respectivamente, los respectivos subespacios óptimos, según la teoría general del Análisis Factorial General (AFG) aplicada al tipo de tabla objeto del Análisis de Correspondencias Simple (ACS). Ahora, siguiendo con la adaptación del AFG al ACS, vamos a analizar cómo se formulan, en éste último, las relaciones entre los subespacios ajustados y las subsiguientes relaciones entre las coordenadas de los puntos-fila y puntos-columna cuando éstos se refieren al sistema de referencia dado por los ejes factoriales en ambos subespacios ajustados.

5.5.1. Relaciones generales entre los dos espacios ajustados en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n .

Cuando se analizó este tipo de relación en el AFG, se obtuvo el siguiente resultado general:

1. Las dos nubes ajustadas (perfiles-fila en \mathbb{R}^p ; perfiles-columna en \mathbb{R}^n), son definidas a partir, respectivamente, de las matrices $(X'X)_{p \times p}$ y $(XX')_{n \times n}$
2. Sean $(\lambda_\alpha, u_\alpha)$ y (μ_α, v_α) las parejas autovalores-autovectores de $X'X$ y XX' respectivamente. Recuérdese del AFG que $\lambda_\alpha = \mu_\alpha$, para todos aquellos autovalores que no son nulos.
3. Los autovectores u_α y v_α (que constituyen, respectivamente, vectores unitarios cuyos soportes son los ejes factoriales en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n) están relacionados entre sí, mediante las expresiones

$$u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X' v_\alpha \quad v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X u_\alpha \quad (5.26)$$

Se trata, pues, de ver cómo las expresiones (5.26) se particularizan al ACS. Recuérdese que en el párrafo 5.4 hemos concluido cuáles son las matrices $X'X$ y XX' sobre las que se obtienen los ejes factoriales en \mathbb{R}^p y en \mathbb{R}^n en ACS. Recuérdese que según los párrafos 5.4.2 y 5.4.3, en última instancia, por ser más simples los cálculos, se actúa sobre las matrices $X^* X^*$ y $X^* X^{*'}'$, en donde

$$X^* = (x_{ij}^*) \quad ; \quad x_{ij}^* = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j} f_{i \cdot}}}$$

En consecuencia, las relaciones (5.26) se transcriben así

$$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X^* u_\alpha \quad u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X^{*'} v_\alpha \quad (5.27)$$

5.5.2. Relaciones entre las coordenadas de los puntos sobre los ejes factoriales en ambos espacios.

Como se vio en AFG, las coordenadas de los puntos-fila (puntos-columna) en el sistema de ejes factoriales u_α (v_α), establecido en \mathbb{R}^p (\mathbb{R}^n) vienen dadas por las relaciones Xu_α ($X'v_\alpha$)

En ACS, actuando con la *formulación simplificada* proveniente de manejar X^* , estas coordenadas son, respectivamente, X^*u_α y $X^{*'}v_\alpha$.

Comentario 5.5.1 X^*u_α es un vector $n \times 1$ (X^* es $n \times p$ y u_α , vector unitario en \mathbb{R}^p , es $p \times 1$) y sus componentes dan las coordenadas de los n puntos-fila respecto del u_α que se vaya considerando. Si denotamos por $\hat{\Psi}_{\alpha i}$ a la i -ésima componente de ese vector n -dimensional, X^*u_α , $\hat{\Psi}_{\alpha i}$ indica la coordenada del i -ésimo punto-fila, respecto del eje factorial α en \mathbb{R}^p .

Análogamente, $X^{*'}v_\alpha$ es un vector $p \times 1$, resultado de multiplicar la matriz $X^{*'}$, $p \times n$, por v_α , autovector unitario según el eje factorial α -ésimo en \mathbb{R}^n es decir un vector $n \times 1$. Las p componentes, $\hat{\Phi}_{\alpha j}$, de ese vector, $X^{*'}v_\alpha$, son las coordenadas del j -ésimo punto-columna respecto del α -ésimo eje factorial ajustado en \mathbb{R}^n

Así pues, las coordenadas citadas son:

$$\hat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \right) u_{\alpha j} \quad i = 1, \dots, n \quad (5.28)$$

$$\hat{\Phi}_{\alpha j} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j} \sqrt{f_{i\cdot}}} \right) v_{\alpha i} \quad j = 1, \dots, p \quad (5.29)$$

¿Qué relación existe entre $\hat{\Psi}_{\alpha i}$ y $\hat{\Phi}_{\alpha j}$? Para encontrar esta relación el camino es obvio: las expresiones (5.28) y (5.29) dan dichas coordenadas en términos de u_α y v_α respectivamente y por otro lado las relaciones entre u_α y v_α están dadas por (5.27). Combinando ambas relaciones se concluye que la componente i -ésima de v_α , a partir de (5.27) es

$$v_{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot} f_{\cdot j}}} \right) u_{\alpha j}$$

de donde

$$v_{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sqrt{f_{i\cdot}} \hat{\Psi}_{\alpha i} \quad (5.30)$$

Análogamente se deduce que

$$u_{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sqrt{f_{\cdot j}} \hat{\Phi}_{\alpha j} \quad (5.31)$$

Por consiguiente:

$$\hat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sqrt{f_{\cdot j}} \hat{\Phi}_{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} \hat{\Phi}_{\alpha j} \quad (5.32)$$

Y análogamente

$$\hat{\Phi}_{\alpha j} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{\cdot j} \sqrt{f_{i\cdot}}} \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sqrt{f_{i\cdot}} \hat{\Psi}_{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} \hat{\Psi}_{\alpha i} \quad (5.33)$$

La conclusión es evidente: las coordenadas, por ejemplo, de los puntos-fila, $\hat{\Psi}_{\alpha i}$, se obtienen con la homotecia $\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}$, mediante una combinación baricéntrica de coeficientes $\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}$, de todas las coordenadas, respecto del eje α -ésimo, de los puntos-columna.

De manera similar, ello equivale a manejar la matriz de componentes $\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}$, que en la práctica suele expresarse en porcentajes en la forma $\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} \times 100$, de modo que si tenemos esta expresión, dividiéndola por 100, obtenemos la matriz que hay que emplear para calcular la relación (5.33).

Por otra parte, la combinación baricéntrica $\sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} \hat{\Phi}_{\alpha j}$, define el baricentro de las coordenadas $\hat{\Phi}_{\alpha j}$ de todos los puntos-columna ($j = 1, \dots, p$) respecto del eje α , con la ponderación $f_{i\cdot}$ del punto-fila i -ésimo del que se trate, lo que constituye el Principio Baricéntrico del Cálculo de las Coordenadas en ACS.

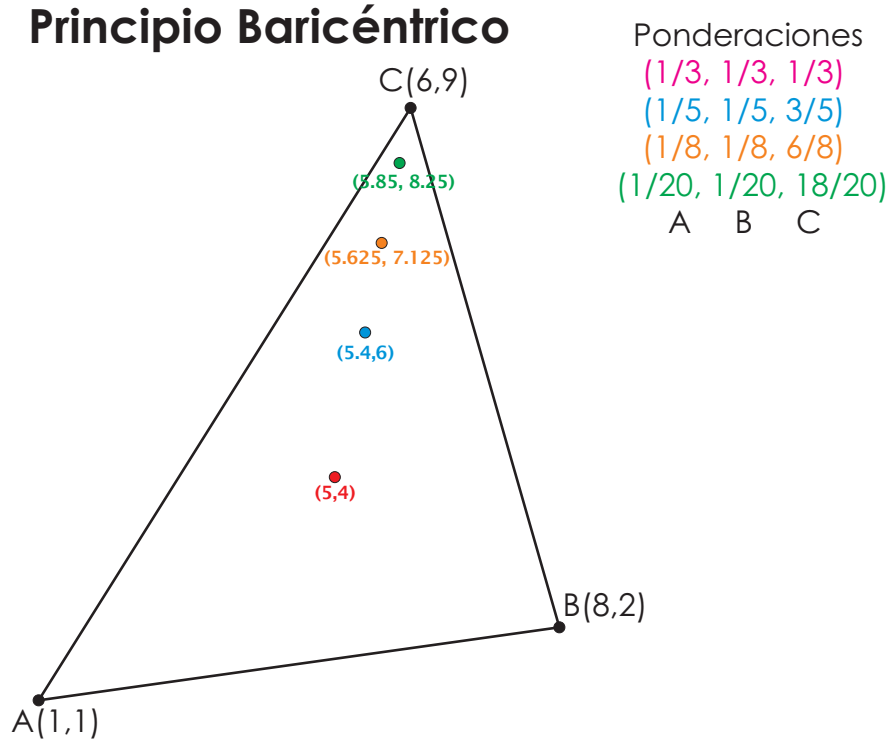


Figura 5.1: Principio baricéntrico

Análogamente, cabría razonar sobre las $\hat{\Phi}_{\alpha j}$. Se deja al lector la correspondiente versión.

Comentario 5.5.2 De las relaciones (5.27) cabe obtener la siguiente conclusión válida en ACS: Todos los autovalores λ_α son iguales o menores que la unidad. Recuérdese que el autovalor unidad, $\lambda = 1$, es autovalor de $T^* = X^{*'}X^*$ y su autovector asociado es $u_p = (\sqrt{f_{\cdot j}}; j = 1, \dots, p)$ (según vimos en el párrafo 5.4.2). Por tanto, probar lo que aquí proponemos equivale a probar que el mayor autovalor de T^* es precisamente $\lambda_1 = 1$. Dejamos la demostración al lector.

La tabla 5.1 resume esquemáticamente lo analizado en este párrafo.

Comentario 5.5.3 En ACS se tiene

$$X^* = (x_{ij}^*) \quad \text{con} \quad x_{ij}^* = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j} f_{i\cdot}}}$$

5.6. Reconstrucción de la Tabla inicial en ACS.

Como se vio en AFG, en realidad lo que pretenden las técnicas factoriales en general es resolver, con arreglo a determinados criterios, un problema de aproximación de la matriz inicial de datos X , a partir de la

Cuadro 5.1: Relación entre coordenadas sobre ejes factoriales

\mathbb{R}^p	\mathbb{R}^n	Observaciones
$u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X' v_\alpha$ $u_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X^{*'} v_\alpha$	$v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X u_\alpha$ $v_\alpha = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} X^* u_\alpha$	<p>Relaciones generales en AFG</p> <p>Particularización al ACS con X^*</p>
$X^* u_\alpha$ $\hat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} u_{\alpha j}$ $i = 1, \dots, n$ $\hat{\Psi}_{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} \hat{\Phi}_{\alpha j}$	$X^{*'} v_\alpha$ $\hat{\Phi}_{\alpha j} = \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{\cdot j} \sqrt{f_{i\cdot}}} u_{\alpha i}$ $j = 1, \dots, p$ $\hat{\Phi}_{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}} \hat{\Psi}_{\alpha i}$	<p>Coordenadas de los puntos fila y columna en ACS</p> <p>$\hat{\Psi}_{\alpha i}$ = coordenada del i-ésimo punto-fila en el eje α-ésimo en \mathbb{R}^p</p> <p>$\hat{\Phi}_{\alpha j}$ = coordenada del j-ésimo punto-columna en el α-ésimo eje en \mathbb{R}^n</p> <p>Relaciones analíticas entre las coordenadas</p>

que actúa la respectiva técnica factorial en cada caso, mediante un número menor de valores numéricos. Por ejemplo, en ACP y ACS, no es la matriz bruta inicial de datos sino ciertas matrices transformadas de ella.

En términos técnicos esta aproximación tiene lugar mediante matrices de bajo rango, en el contexto del problema general de obtener, mediante un criterio de mínimos cuadrados, la aproximación de una matriz dada. Y ello se consigue, desde un punto de vista general, mediante la descomposición de valores singulares (DVS). Este enfoque general será analizado en otro lugar de este texto.

De una manera directa, esta cuestión fue resuelta en AFG mediante los autovalores-autovectores de $X'X$ y de XX' , de tal manera que X se aproxima por X^* ,

$$X^* = \sum_{\alpha=1}^q \sqrt{\lambda_\alpha} v_\alpha u_\alpha' ; X(n \times p) ; v_\alpha(n \times 1) ; u_\alpha(p \times 1) \quad (5.34)$$

en donde $q \leq p$, indica el número de los *primeros* autovalores $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ seleccionados de entre los $\lambda_1, \dots, \lambda_p$ que en general tendrá $X'X$. Recuérdese que los que no sean nulos de esos $\lambda_1, \dots, \lambda_p$, digamos r de ellos (con $r \leq \min(p; n)$), también son autovalores de XX' .

Pero, al margen de esta aproximación de X por X^* en términos de esos $\lambda_1, \dots, \lambda_q$, se verifica que

$$X = \sum_{\alpha=1}^p \sqrt{\lambda_\alpha} v_\alpha u_\alpha' \quad (5.35)$$

lo que permite, teóricamente, la reconstrucción exacta de X a partir de los subespacios ajustados en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n

5.6.1. Fórmula de reconstrucción en ACS.

Veamos cómo la fórmula de reconstrucción dada por (5.35) de AFG se adecúa al ACS. En este caso, continuando bajo la suposición de que actuamos con la matriz simplificada X^* definida en el párrafo 5.4.2, expresión (5.21), se tendrá obviamente

$$X^* = \sum_{\alpha=1}^p \sqrt{\lambda_\alpha} v_\alpha u_\alpha' ; X^* = (x_{ij}^*) ; x_{ij}^* = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i \cdot} f_{\cdot j}}} \quad (5.36)$$

Comentario 5.6.1 Denotamos aquí por X^* a la matriz simplificada. No confundir con la denotada también X^* en el contexto de AFG, en donde así se ha denotado a la matriz aproximada de X , en la expresión (5.34).

Aquí pretendemos expresar X^* mediante las coordenadas $\hat{\Psi}_{\alpha i}$ y $\hat{\Phi}_{\alpha j}$, coordenadas de los puntos-fila, puntos-columna, respectivamente, en los sistemas factoriales ajustados en \mathbb{R}^p y \mathbb{R}^n . Para conseguirlo, sustituimos en (5.36), v_α y u_α , por las expresiones respectivas en función de las coordenadas (dadas por (5.30) y (5.31) del párrafo 5.5.2).

En efecto:

$$\begin{aligned} x_{ij}^* &= \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i \cdot} f_{\cdot j}}} = \sum_{\alpha=1}^p \sqrt{\lambda_\alpha} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sqrt{f_{i \cdot}} \hat{\Psi}_{\alpha i} \right)}_{v_{\alpha i}} \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sqrt{f_{\cdot j}} \hat{\Phi}_{\alpha j} \right)}_{u_{\alpha j}} = \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \left(\hat{\Psi}_{\alpha i} \hat{\Phi}_{\alpha j} \right) \sqrt{f_{i \cdot} f_{\cdot j}} \end{aligned}$$

de donde

$$f_{ij} = \left(\sum_{\alpha=1}^p \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \hat{\Psi}_{\alpha i} \hat{\Phi}_{\alpha j} \right) f_{i \cdot} f_{\cdot j} \quad (5.37)$$

5.6.2. Otra forma de escribir la fórmula de reconstrucción.

Se acostumbra a escribir la última expresión (5.37), simplificada, en el sentido siguiente: Como hemos visto en la sección 5.4.2, $\lambda_1 = 1$ es el mayor autovalor de X^*X^* y de $X^*X^{*'}$, lo que se puede hacer constar de manera explícita en la fórmula de reconstrucción (5.37). En tal caso, además, sabemos que $u_1 = u_p = (\sqrt{f_{\cdot j}}; j = 1, \dots, p)$ y $v_1 = (\sqrt{f_{i \cdot}}; i = 1, \dots, n)$, son los autovectores asociados a $\lambda_1 = 1 = \mu_1$ en X^*X^* y $X^*X^{*'}$ respectivamente. Por lo tanto $u_{1j} = \sqrt{f_{\cdot j}}$ y $v_{1i} = \sqrt{f_{i \cdot}}$, con lo que

$$f_{ij} = f_{i \cdot} f_{\cdot j} \left(1 + \sum_{\alpha=2}^p \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \hat{\Psi}_{\alpha i} \hat{\Phi}_{\alpha j} \right) \quad (5.38)$$

ya que, en efecto, el primer término de la suma de (5.37) es

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \hat{\Psi}_{1i} \hat{\Phi}_{1j} = \hat{\Psi}_{1i} \hat{\Phi}_{1j}$$

que en virtud de (5.30) y (5.31), párrafo 5.5.2, es igual a

$$\hat{\Psi}_{1i} \hat{\Phi}_{1j} = \left(v_{1i} \sqrt{\lambda_1} \frac{1}{\sqrt{f_{i \cdot}}} \right) \left(u_{1j} \sqrt{\lambda_1} \frac{1}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \right) = 1$$

de donde se obtiene la expresión (5.38). Finalmente, la expresión (5.38) se puede también escribir así:

$$f_{ij} = f_{i \cdot} f_{\cdot j} \left(1 + \sum_{\alpha=2}^p \sqrt{\lambda_\alpha} \Psi_{\alpha i} \Phi_{\alpha j} \right) \quad (5.39)$$

en términos de

$$\Psi_{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \hat{\Psi}_{\alpha i} \quad \Phi_{\alpha j} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \hat{\Phi}_{\alpha j}$$

$\Psi_{\alpha i}$ y $\Phi_{\alpha j}$ son los llamados *factores normalizados* de norma unidad. En efecto, consideremos el vector constituido por todos los $\hat{\Psi}_{\alpha i}$, es decir, por todas las coordenadas respecto del eje factorial soporte de u_α factor de los n puntos-fila

$$\left(\hat{\Psi}_{\alpha 1}, \dots, \hat{\Psi}_{\alpha n} \right)'$$

Sabemos que este vector columna $n \times 1$ es por otra parte X^*u_α . Por tanto, si consideramos las coordenadas dadas por

$$\left(\Psi_{\alpha 1}, \dots, \Psi_{\alpha n} \right)' = \left(\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \hat{\Psi}_{\alpha 1}, \dots, \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \hat{\Psi}_{\alpha n} \right)'$$

se tiene:

$$\left(\Psi_{\alpha 1}, \dots, \Psi_{\alpha n} \right) \left(\Psi_{\alpha 1}, \dots, \Psi_{\alpha n} \right)' = \|\Psi_\alpha\|$$

Pero

$$\begin{aligned} \left(\Psi_{\alpha 1}, \dots, \Psi_{\alpha n} \right) \left(\Psi_{\alpha 1}, \dots, \Psi_{\alpha n} \right)' &= \frac{1}{\lambda_\alpha} \left(\hat{\Psi}_{\alpha 1}, \dots, \hat{\Psi}_{\alpha n} \right) \left(\hat{\Psi}_{\alpha 1}, \dots, \hat{\Psi}_{\alpha n} \right)' = \\ &= \frac{1}{\lambda_\alpha} \left(u_\alpha' X^{*'} \right) \left(X^* u_\alpha \right) = \frac{1}{\lambda_\alpha} u_\alpha' X^{*'} X^* u_\alpha = \frac{1}{\lambda_\alpha} \lambda_\alpha u_\alpha' u_\alpha = 1 \end{aligned}$$

Es decir, $\|\Psi_\alpha\| = 1$. De ahí que en efecto los $\Psi_{\alpha i}$ son *normalizados a la unidad*. Análogamente se procedería para los $\Phi_{\alpha j}$.

5.7. Elementos suplementarios en ACS.

Cuando estudiábamos, como primer ejemplo de técnica factorial, el Análisis de Componentes Principales, vimos la necesidad de, una vez realizada la aplicación del ACP, ubicar en las nubes ajustadas de filas y columnas, posibles *nuevos* puntos-fila o puntos-columna.

En ACS el problema es análogo. Las filas o columnas suplementarias en la tabla bruta inicial conducirán a puntos-fila y puntos-columna en perfiles respectivos

$$\left\{ \frac{k_{+i,j}}{k_{+i\cdot}} \right\} \quad ; \quad k_{+i\cdot} = \sum_{j=1}^p k_{+ij}$$

$$\left\{ \frac{k_{i,j}^+}{k_{\cdot j}^+} \right\} \quad ; \quad k_{\cdot j}^+ = \sum_{i=1}^n k_{ij}^+$$

que corresponden, respectivamente a las situaciones siguientes

$i = 1$	k_{11}	\cdots	\cdots	\cdots	k_{1p}	$k_{1\cdot}$	$\left(\frac{R}{R_+} \right)$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	
$i = n$	k_{n1}	\cdots	\cdots	\cdots	k_{np}	$k_{n\cdot}$	
$i = +$	\cdots	\cdots	k_{+ij}	\cdots	k_{1p}	$k_{+i\cdot}$	\longleftarrow Puntos-fila suplementarios

						$j = +$	$\left(R R^+ \right)$
$i = 1$	k_{11}	\cdots	\cdots	\cdots	k_{1p}	\vdots	
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	k_{ij}^+	
$i = n$	k_{n1}	\cdots	\cdots	\cdots	k_{np}	\vdots	
	$k_{\cdot 1}$	\cdots	\cdots	\cdots	$k_{\cdot p}$	$k_{\cdot j}^+$	\longleftarrow Columnas suplementarias

Dados pues los perfiles-fila o perfiles-columna correspondientes a las filas o columnas suplementarias, se procede a situarlos en sus nubes correspondientes, ajustadas en base a la tabla inicial (sin las filas y/o columnas suplementarias). Y la ubicación en esas nubes se obtiene aplicando a las matrices suplementarias R_+ o R^+ , previo su paso a las correspondientes en perfiles, las expresiones ((5.32) y (5.33), párrafo 5.5.2, de modo que, por ejemplo, aplicando (5.32) que en la tabla inicial es

$$\hat{\Psi}_{\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} \hat{\Phi}_{\alpha j}$$

coordenadas del punto-fila i -ésimo, en términos de $\hat{\Phi}_{\alpha j}$, y de ahí se deduce

$$\hat{\Psi}_{+\alpha i} = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{j=1}^p \frac{k_{+ij}}{k_{+i\cdot}} \hat{\Phi}_{\alpha j}$$

para las coordenadas de las filas suplementarias.

En el caso de tener que ubicar una columna suplementaria, sus coordenadas $\hat{\Phi}_{\alpha j}^+$ se obtendrán a partir de (5.33) del párrafo 5.5.2

$$\hat{\Phi}_{\alpha j}^+ = \frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}} \sum_{i=1}^n \frac{k_{ij}^+}{k_{\cdot j}^+} \hat{\Psi}_{\alpha i}$$

5.8. Ayudas a la interpretación en ACS.

Desde los inicios del Análisis de Datos por Benzecri y colaboradores, al tratar cualquiera de sus técnicas, se incluye como etapa final, una vez terminado su desarrollo, una serie de cuestiones que se engloban bajo el título genérico de *Ayudas a la interpretación*. Estas ayudas no son más que una serie de consecuencias derivadas del propio desarrollo de la técnica correspondiente, que sirven en la práctica, en efecto, de ayuda para la interpretación de los resultados obtenidos.

En concreto, a nivel de las técnicas factoriales asociadas al Análisis Factorial General (AFG) del Análisis de Datos, las *ayudas* expresan interpretaciones, normalmente expresables también gráficamente, asociadas a ciertas propiedades de los factores deducidos en cada caso, de modo que podamos medir e interpretar la importancia de los factores y lo que ellos significan.

En ACP, como caso especial de AFG, ya vimos una medida asociada a los factores obtenidos, que mide su importancia en la estructura factorial construida. Recordemos la *tasa de inercia* general de AFG y su versión en ACP, por ejemplo normalizado, en donde

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^p \lambda_\alpha &= \text{tr}(X'X) = \text{tr}(XX') = \\ &= \text{tr}(\text{matriz de correlaciones}) = \sum_i \sum_j x_{ij}^2 = p \end{aligned}$$

de tal modo que se define la tasa de inercia asociada a los primeros q factores como:

$$\tau_q = \frac{\sum_{i=1}^q \lambda_\alpha}{\sum_{i=1}^p \lambda_\alpha}$$

A continuación vamos a desarrollar esta cuestión en ACS.

5.8.1. Medidas básicas para la interpretación en ACS.

Se manejan en la práctica del ACS dos medidas dirigidas a facilitar la interpretación de la estructura factorial que ACS asocia al espacio de puntos-fila y al de puntos-columna. Estas dos medidas son, en cierto sentido, *duales* en la interrelación punto-factor. Veámoslas a continuación.

- Dado un eje factorial cualquiera, digamos el α -ésimo, los n puntos-fila, proyectados sobre dicho eje, definen sobre él un conjunto de n valores proyectados, los $\hat{\Psi}_{\alpha i}$ obviamente, cuya dispersión vamos a medir mediante su varianza. Esta varianza, si el origen está en el centro de gravedad, vendrá dada por la expresión reducida:

$$\sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i}^2 \quad (5.40)$$

Los puntos-fila son manejados por los perfiles correspondientes, de masa $f_{i\cdot}$ y si el origen está en el centro de gravedad, entonces la media (ponderada) será:

$$\widehat{\bar{\Psi}}_{\alpha i} = \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i} = 0$$

En efecto:

$$\sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \sum_{j=1}^p \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} u_{\alpha j} = \sum_{j=1}^p \frac{u_{\alpha j}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \sum_{i=1}^n f_{ij} =$$

$$= \sum_{j=1}^p \frac{u_{\alpha j}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} f_{\cdot j} = \sum_{j=1}^p u_{\alpha j} \sqrt{f_{\cdot j}} = 0$$

La última igualdad se da en virtud de lo visto en el párrafo 5.4.2. Por tanto, la varianza considerada es la dada por (5.40). Si esta expresión se calcula explícitamente, se tendrá:

$$\sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i}^2 = \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \left(\frac{\sqrt{\lambda_{\alpha}} v_{\alpha i}}{\sqrt{f_{i\cdot}}} \right)^2 = \sum_{i=1}^n \lambda_{\alpha} v_{\alpha i}^2 = \lambda_{\alpha} \sum_{i=1}^n v_{\alpha i}^2 = \lambda_{\alpha}$$

sin más que tener en cuenta la ecuación (5.30) del párrafo 5.5.2 y el hecho de ser unitario el vector v_{α} (en la dirección del eje factorial α -ésimo).

En definitiva, en ACS, la inercia (varianza) de los puntos-fila proyectados, en el eje α -ésimo, vale el respectivo autovalor λ_{α} asociado al autovector u_{α} que define a dicho eje. Es decir:

$$\sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i}^2 = \lambda_{\alpha}$$

Comentario 5.8.1 *Compárese este resultado con el del AFG, en donde la importancia de un eje viene medida en términos de la varianza (inercia) asociada a dicho eje que, por otra parte, es igual al autovalor correspondiente. En función de ésto definíamos la tasa de inercia explicada por cada eje, o por el conjunto de los q primeros ejes factoriales τ_q .*

Lo anterior da pie a introducir una medida de la contribución de un punto-fila cualquiera, el i -ésimo, a la inercia asociada al eje factorial α -ésimo, $\text{Ca}_{\alpha}(i)$, definida como el sumando debido al punto i -ésimo en (5.40), esto es

$$\text{Ca}_{\alpha}(i) = f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i}^2 \quad (5.41)$$

que suele llamarse *Contribución absoluta del elemento i -ésimo, a la inercia (varianza) explicada por el eje α -ésimo*. A partir de ella, se define la *Contribución relativa del elemento i -ésimo, a la inercia (varianza) explicada por el eje α -ésimo*, $\text{CTR}_{\alpha}(i)$, definida como

$$\text{CTR}_{\alpha}(i) = \frac{f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i}^2}{\lambda_{\alpha}} \quad (5.42)$$

Una repetición de los cálculos anteriores, para el j -ésimo punto-columna, de masa $f_{\cdot j}$, conduce a definir la contribución de dicho punto-columna a la inercia asociada al α -ésimo eje factorial en \mathbb{R}^n . En efecto, sin más que tener en cuenta ahora la expresión (5.31) del párrafo 5.5.2, se llega a

$$\text{Ca}'_{\alpha}(j) = f_{\cdot j} \hat{\Phi}_{\alpha j}^2 \quad ; \quad \text{CTR}'_{\alpha}(j) = \frac{f_{\cdot j} \hat{\Phi}_{\alpha j}^2}{\lambda_{\alpha}} \quad (5.43)$$

Nótese que

$$\sum_{i=1}^n \text{Ca}_{\alpha}(i) = \sum_{i=1}^n \frac{f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i}^2}{\lambda_{\alpha}} = \frac{1}{\lambda_{\alpha}} \sum_{i=1}^n f_{i\cdot} \hat{\Psi}_{\alpha i}^2 = 1$$

es decir, la suma de las contribuciones relativas al eje α -ésimo de todos los puntos de la nube de puntos-fila vale la unidad. Análogo ocurre con los puntos-columna.

Las contribuciones (5.41), (5.42) y (5.43) se suelen expresar en la práctica en centésimas o porcentajes, multiplicándolas por 100, e incluso a veces en milésimas, multiplicándolas por 1000.

• Con las contribuciones absolutas medimos la importancia de una fila o de una columna, a la hora de explicar la inercia a su vez explicada por un determinado factor ². Cabe plantear la situación inversa, es decir, tratar de medir el efecto (contribución) de los factores en la posición de un punto-fila o de un punto-columna determinados. Estas medidas se realizan mediante unos coeficientes denominados *Contribuciones relativas*

²Por decirlo de otra manera, en las expresiones (5.41), (5.42) y (5.43) de las contribuciones absolutas, se fija un α y se analiza variando i o j , la contribución de los mismos a α .

del factor α -ésimo en el punto-fila i -ésimo (o punto-columna j -ésimo). Veamos cómo se construyen estas contribuciones relativas.

1. Consideremos en primer lugar la nube de puntos-fila y sea el i -ésimo punto. Se sabe que el centro de gravedad de esta nube es el punto de coordenadas $(\sqrt{f_{\cdot j}} ; j = 1, \dots, p)$ en \mathbb{R}^p . Entonces la distancia al cuadrado de dicho punto i al centro de gravedad viene dada por

$$d^2(i; cg) = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right)^2 = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} - f_{\cdot j} \right)^2 \frac{1}{f_{\cdot j}} \quad (5.44)$$

Recuérdese, párrafo 5.4.1, expresión (5.12), la distancia entre dos puntos-fila en \mathbb{R}^p y la expresión (5.13) que da el centro de gravedad de la nube de puntos-fila. Definimos entonces

$$Cr_{\alpha}(i) = \frac{\hat{\Psi}_{\alpha i}^2}{d^2(i; cg)} \quad ; \quad \mathbb{R}^p \quad (5.45)$$

que es llamada Contribución relativa del eje factorial α -ésimo al punto fila i . Se suele denotar también $COR_{\alpha}(i)$.

Gráficamente, en \mathbb{R}^p , la situación es

$$\cos^2(\theta) = \frac{\hat{\Psi}_{\alpha i}^2}{d^2(i; cg)} \quad ; \quad i = \text{fijo}$$

de modo que $Cr_{\alpha}(i)$ puede interpretarse como el coseno al cuadrado del punto i con el eje α .

Por otra parte es fácil probar que la suma de las contribuciones relativas de todos los ejes factoriales al punto i vale la unidad. En efecto:

$$\sum_{\alpha=1}^p Cr_{\alpha}(i) = \sum_{\alpha=1}^p \frac{\hat{\Psi}_{\alpha i}^2}{d^2(i; cg)} = \frac{1}{d^2(i; cg)} \sum_{\alpha=1}^p \hat{\Psi}_{\alpha i}^2$$

Calculemos $\sum_{\alpha=1}^p \hat{\Psi}_{\alpha i}^2$. Según la expresión (5.19) de 5.4.1 —la dada por (5.30) de 5.5.2 no es adecuada aquí— se tiene

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha=1}^p \hat{\Psi}_{\alpha i}^2 &= \sum_{\alpha=1}^p \left(\sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) u_{\alpha j} \right)^2 = \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \left[\sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) u_{\alpha j} \right] \left[\sum_{j'=1}^p \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) u_{\alpha j'} \right] = \\ &= \sum_{\alpha=1}^p \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right)^2 u_{\alpha j}^2 \right\} + \\ &+ \sum_{\alpha=1}^p \left\{ \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) u_{\alpha j} u_{\alpha j'} \right\} = \end{aligned}$$

$$= \left\{ \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i \cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right)^2 \right\} \sum_{\alpha=1}^p u_{\alpha j}^2 +$$

$$+ \left\{ \sum_{\substack{j, j'=1 \\ j \neq j'}}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i \cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i \cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right) \right\} \sum_{\substack{\alpha=1 \\ j \neq j'}}^p u_{\alpha j} u_{\alpha j'}$$

Pero teniendo en cuenta que, dados los autovectores u_α (unitarios en la dirección del eje factorial respectivo F_α), estos son ortogonales (son correspondientes a raíces características distintas), entonces la matriz que los contiene como columnas es ortogonal. Es decir

$$(u_1 | u_2 | \dots | u_\alpha | \dots | u_p) (u_1 | u_2 | \dots | u_\alpha | \dots | u_p)' = I_{p \times p}$$

De aquí, mediante fáciles cálculos, se comprueba que:

$$\sum_{\alpha=1}^p u_{\alpha j}^2 = 1 \quad ; \quad \sum_{\substack{\alpha=1 \\ j \neq j'}}^p u_{\alpha j} u_{\alpha j'} = 0$$

En resumen

$$\sum_{\alpha=1}^p \hat{\Psi}_{\alpha i}^2 = \sum_{j=1}^p \left(\frac{f_{ij}}{f_{i \cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right)^2 = d^2(i; cg)$$

Por tanto, en efecto:

$$\sum_{\alpha=1}^p Cr_\alpha(i) = 1$$

2. Análogamente, cabe actuar de manera paralela en \mathbb{R}^n con la nube de puntos-columna. En definitiva, se establecen las *contribuciones relativas* de los ejes factoriales α en \mathbb{R}^n a cada punto-columna ($j = 1, \dots, p$):

$$Cr'_\alpha(j) = \frac{\hat{\Phi}_{\alpha j}^2}{d^2(j; cg)} \quad ; \quad \mathbb{R}^n \quad (5.46)$$

con análogas interpretaciones a las de $Cr_\alpha(i)$. Aquí el centro de gravedad, cg, es el de la nube de puntos-columna y obviamente nos situamos en \mathbb{R}^n donde los puntos-columna son los puntos considerados.

Comentario 5.8.2 Otra interpretación de $Cr_\alpha(i)$ es como coeficiente de correlación al cuadrado entre el eje α y el punto i -ésimo fijado.

$$\cos^2 \theta = \frac{\Psi_{\alpha i}^2}{d^2(i; cg)} = \frac{\langle \vec{i} | \vec{\alpha} \rangle}{\|\vec{i}\| \cdot \|\vec{\alpha}\|} = \text{coeficiente de correlación}^2(i; \alpha)$$