Ajuste a la nube de perfiles fila en $\mathbb{R}^p$

$$\left\{\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}\right\}\left(\begin{array}{l}\text{Masa } f_{i\cdot}\\ \text{C.G } f_{\cdot j}\end{array}\right) \longrightarrow \left\{\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\right\}\left(\begin{array}{l}\text{Masa } f_{i\cdot}\\ \text{C.G } \sqrt{f_{\cdot j}}\end{array}\right) \longrightarrow \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}}\right)$$

$$t_{jj'} = \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\left[\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}}\right]\left[\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}}\right] \quad j, j' = 1, \ldots, p$$

$$\text{Max } \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\Psi_i^2 = \left(\sqrt{f_{i\cdot}}Hu\right)'\left(\sqrt{f_{i\cdot}}Hu\right) = (Xu)'(Xu)$$

$$T_{p\times p} = X'_{p\times n}X_{n\times p} \qquad x_{ij} = \sqrt{f_{i\cdot}}h_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{i\cdot}f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}}$$

$$\widehat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}}\right)u_{\alpha j}$$

Simplificación de cálculos

$$T^* = X^{*'}X^* \qquad x^*_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}} \qquad \widehat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\right)u_{\alpha j}$$

- *El vector* $u_p = \left(\sqrt{f_{\cdot 1}}, \ldots, \sqrt{f_{\cdot j}}, \ldots, \sqrt{f_{\cdot p}}\right)'$ *es un vector propio de* T, *con respecto al autovalor 0.*

$$T_{p\times p}u_{p(n\times 1)} = 0_{p\times 1} = \lambda_p u_p$$

- *Los autovectores* $u_\alpha \neq u_p$ *de* T, *lo son también de* $T^* = X^{*\prime}X^*$, *y respecto de los mismos autovalores* λ_α. *Además,* u_p *también es autovector de* T^* *pero respecto del autovalor unidad de* T^*.

Simplificación en los cálculos de las proyecciones $\widehat{\Psi}_{\alpha i}$

- *El vector* $u_p = \left(\sqrt{f_{\cdot 1}}, \ldots, \sqrt{f_{\cdot j}}, \ldots, \sqrt{f_{\cdot p}}\right)'$ *es un vector propio de* T*, con respecto al autovalor 0.* $(T_{p\times p}u_{p(p\times 1)} = \lambda_p u_p = 0_{p\times 1}) \Longrightarrow$

$$\sum_{j'=1}^{p} t_{jj'}\sqrt{f_{.j'}} = 0 \quad \text{(elemento } j\text{-ésimo del vector } Tu_p) \quad \forall (j = 1, \cdots, p)$$

$$\widehat{\Psi}_{\alpha i} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}}\right)u_{\alpha j} = \sum_{j=1}^{p}\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\right)u_{\alpha j} \;\; ; \;\; \left(\sum_{j=1}^{p}\sqrt{f_{\cdot j}}u_{\alpha j} = 0\right)$$

En efecto:

$$\sum_{j'=1}^{p} t_{jj'}\sqrt{f_{.j'}} = \sum_{j'=1}^{p}\sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\left[\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}}\right]\left[\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{.j'}}} - \sqrt{f_{.j'}}\right]\sqrt{f_{.j'}} =$$

$$= \sum_{j'=1}^{p}\left[\sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{.j'}}}\sqrt{f_{.j'}} - \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\sqrt{f_{.j'}}\sqrt{f_{.j'}} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{.j'}}}\sqrt{f_{.j'}} + \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\sqrt{f_{.j'}}\sqrt{f_{.j'}}\right] =$$

$$= \sum_{j'=1}^{p}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sum_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}}f_{.j'} - \sum_{i=1}^{n} f_{ij'}\sqrt{f_{\cdot j}} + \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}f_{.j'}\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\left(\sum_{j'=1}^{p} f_{ij'}\right) - \sum_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}}\left(\sum_{j'=1}^{p} f_{.j'}\right) -$$

$$- \sum_{i=1}^{n}\sqrt{f_{\cdot j}}\left(\sum_{j'=1}^{p} f_{ij'}\right) + \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\left(\sum_{j'=1}^{p} f_{.j'}\right) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}f_{i\cdot} - \sum_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sum_{i=1}^{n}\sqrt{f_{\cdot j}}f_{i\cdot} + \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}} = 0$$

- La matriz $T = X^{'}X$ donde $x_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{i\cdot}f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}}$ tiene de término general

$$t_{jj^{'}} = \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \left[\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right] \left[\frac{f_{ij^{'}}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j^{'}}}} - \sqrt{f_{\cdot j^{'}}} \right]$$

Si $x^*_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}}$ vamos a ver que el término general de $T^* = X^{*^{'}}X^*$ es:

$$t^*_{jj^{'}} = \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \right) \left(\frac{f_{ij^{'}}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j^{'}}}} \right)$$

En efecto:

$$t^*_{jj^{'}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j}}} \cdot \frac{f_{ij^{'}}}{\sqrt{f_{i\cdot}f_{\cdot j^{'}}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}f_{ij^{'}}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\sqrt{f_{\cdot j^{'}}}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}f_{ij^{'}}f_{i\cdot}}{f^2_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}\sqrt{f_{\cdot j^{'}}}} =$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \right) \left(\frac{f_{ij^{'}}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j^{'}}}} \right)$$

Se observa que el término $t^*_{jj^{'}}$ es análogo a $t_{jj^{'}}$ salvo que no está centrado, ($\sqrt{f_{\cdot j}}$ es el centro de gravedad de los perfiles $\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}$), por lo que podemos decir que X^* es la matriz no centrada respecto de X.

- *Los autovectores $u_\alpha \neq u_p$ de T, lo son también de $T^* = X^{*^{'}}X^*$, donde $x^*_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i.}f_{.j}}}$ y respecto de los mismos autovalores. Además, u_p también es autovector de T^* pero respecto del autovalor unidad de T^*.* En efecto, sea $u_\alpha \neq u_p$, de componentes $u_{\alpha j}$.

$$Tu_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha \qquad T^*u_\alpha = \lambda_\alpha u_\alpha \Longrightarrow Tu_\alpha = T^*u_\alpha$$

Considerando la j-ésima componente de ambos vectores, se debe cumplir:

$$\sum_{j^{'}=1}^{p} t_{jj^{'}}u_{\alpha j^{'}} = \sum_{j^{'}=1}^{p} t^*_{jj^{'}}u_{\alpha j^{'}} \text{ En efecto:}$$

$$\sum_{j'=1}^{p} t_{jj'} u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \left[\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} - \sqrt{f_{\cdot j}} \right] \left[\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} - \sqrt{f_{\cdot j'}} \right] \right\} u_{\alpha j'} =$$

$$= \sum_{j'=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \left[\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \right] \left[\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} \right] u_{\alpha j'} - \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} - \right.$$

$$\left. - \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} u_{\alpha j'} + \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} \right\} =$$

$$= \sum_{j'=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} \right) \right\} u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^{p} t^{*}_{jj'} u_{\alpha j'}$$

Ya que como $\displaystyle\sum_{j=1}^{p} u_{\alpha j} \sqrt{f_{\cdot j}} = 0$ se tiene:

1.

$$\sum_{j'=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \right\} u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \right\} u_{\alpha j'} =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \left(\sum_{j'=1}^{p} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} \right) = 0$$

2.

$$\sum_{j'=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j'}}} \right\} u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^{p} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{f_{ij'}}{\sqrt{f_{\cdot j'}}} \right\} u_{\alpha j'} =$$

$$= \sum_{j'=1}^{p} \sqrt{f_{\cdot j}} \frac{\sqrt{f_{\cdot j'}}}{f_{\cdot j'}} \left(\sum_{i=1}^{n} f_{ij'} \right) u_{\alpha j'} = \sum_{j'=1}^{p} \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} =$$

$$= \sqrt{f_{\cdot j}} \sum_{j'=1}^{p} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} = 0$$

3.

$$\sum_{j'=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \left\{ f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \sqrt{f_{\cdot j'}} \right\} u_{\alpha j'} = \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}} \left(\sum_{j'=1}^{p} \sqrt{f_{\cdot j'}} u_{\alpha j'} \right) = 0$$

Además si $u_\alpha = u_p = (\sqrt{f_{\cdot j}})$ autovector de T respecto al autovalor $\lambda_p = 0$, veamos que es autovector también de T^* pero respecto del autovalor $\lambda_p = 1$, es decir $T^* u_p = u_p$, (tomando el elemento j-ésimo del vector $T^* u_p$), se tiene que cumplir:

$$\sum_{j'=1}^{p} t^*_{jj'} u_{pj'} = \sum_{j'=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} f_{i\cdot} \left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} \right) \left(\frac{f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j'}}} \right) \sqrt{f_{\cdot j'}} =$$

$$\sum_{j'=1}^{p} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij} f_{ij'}}{f_{i\cdot} \sqrt{f_{\cdot j}}} = \frac{1}{\sqrt{f_{\cdot j}}} \sum_{i=1}^{n} \frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}} \sum_{j'=1}^{p} f_{ij'} = \frac{1}{\sqrt{f_{\cdot j}}} f_{\cdot j} = \sqrt{f_{\cdot j}}$$

Ajuste a la nube de perfiles columna en $\mathbb{R}^n$

$$\left\{\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}}\right\}\begin{pmatrix} \text{Masa } f_{\cdot j} \\ \text{C.G } f_{i\cdot} \end{pmatrix} \longrightarrow \left\{\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}}\right\}\begin{pmatrix} \text{Masa } f_{\cdot j} \\ \text{C.G } \sqrt{f_{i\cdot}} \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}} - \sqrt{f_{i\cdot}}\right)$$

$$s_{ii'} = \sum_{j=1}^{p} f_{\cdot j}\left[\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}} - \sqrt{f_{i\cdot}}\right]\left[\frac{f_{i'j}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i'\cdot}}} - \sqrt{f_{i'\cdot}}\right] \quad i, i' = 1, \ldots, n \qquad S = XX'$$

$$\text{Max } \sum_{j=1}^{p} f_{\cdot j}\Phi_j^2 = \left(\sqrt{f_{\cdot j}}H'v\right)'\left(\sqrt{f_{\cdot j}}H'v\right) = (H^{*'}v)'(H^{*'}v) = (X'v)'(X'v)$$

$$S_{n\times n} = H^*H^{*'} = X_{n\times p}X'_{p\times n} \qquad x_{ij} = \sqrt{f_{\cdot j}}h_{ij} = h^*_{ij} = \frac{f_{ij} - f_{\cdot j}f_{i\cdot}}{\sqrt{f_{\cdot j}f_{i\cdot}}}$$

$$\widehat{\Phi}_{\alpha j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}} - \sqrt{f_{i\cdot}}\right)v_{\alpha i}$$

Simplificación de cálculos

$$S^* = X^*X^{*'} \qquad x^*_{ij} = \frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{\cdot j}f_{i\cdot}}} \qquad \widehat{\Phi}_{\alpha j} = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}}\right)v_{\alpha i}$$

- *El vector* $v_p = \left(\sqrt{f_{1\cdot}}, \ldots, \sqrt{f_{i\cdot}}, \ldots, \sqrt{f_{n\cdot}}\right)'$ *es un vector propio de* S*, con respecto al autovalor 0.*

$$S_{n\times n}v_{p(n\times 1)} = 0_{n\times 1} = \mu_p v_p$$

- *Los autovectores* $v_\alpha \neq v_p$ *de* S*, lo son también de* $S^* = X^*X^{*\prime}$*, y respecto de los mismos autovalores* μ_α*. Además,* v_p *también es autovector de* S^* *pero respecto del autovalor unidad de* S^**.*

Relación entre los dos subespacios ajustados

En AFG

$\mathbb{R}^p$	$\mathbb{R}^n$
$(X'X)_{p\times p}\begin{cases}\lambda_\alpha\\ u_\alpha\end{cases}$	$(XX')_{n\times n}\begin{cases}\mu_\alpha\\ v_\alpha\end{cases}$
$\lambda_\alpha=\mu_\alpha$	
$u_\alpha=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}X'v_\alpha$	$v_\alpha=\frac{1}{\sqrt{\mu_\alpha}}Xu_\alpha$
$X=\sum\limits_{\alpha=1}^{p}\sqrt{\lambda_\alpha}v_\alpha u'_\alpha$	

En ACS

$\mathbb{R}^p$	$\mathbb{R}^n$
$(X'X)_{p\times p} \qquad x_{ij}=\frac{f_{ij}-f_{i\cdot}.f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot}.f_{\cdot j}}}$	$(XX')_{n\times n} \qquad x_{ij}=\frac{f_{ij}-f_{i\cdot}.f_{\cdot j}}{\sqrt{f_{i\cdot}.f_{\cdot j}}}$
$X^{*'}X^{*} \qquad x^{*}_{ij}=\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}.f_{\cdot j}}}$	$X^{*}X^{*'} \qquad x^{*}_{ij}=\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}.f_{\cdot j}}}$
$u_\alpha=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}X^{*'}v_\alpha$	$v_\alpha=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}X^{*}u_\alpha$
$\widehat{\Psi}_{\alpha i}=\sum\limits_{j=1}^{p}\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}-\sqrt{f_{\cdot j}}\right)u_{\alpha j}$	$\widehat{\Phi}_{\alpha j}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}}-\sqrt{f_{i\cdot}}\right)v_{\alpha i}$
$\widehat{\Psi}_{\alpha i}=\sum_{j=1}^{p}\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\right)u_{\alpha j}$	$\widehat{\Phi}_{\alpha j}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}}\right)v_{\alpha i}$
$u_{\alpha j}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}.f_{\cdot j}}}v_{\alpha i}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{\sqrt{f_{\cdot j}}f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}}v_{\alpha i}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sqrt{f_{\cdot j}}\widehat{\Phi}_{\alpha j}$ $v_{\alpha i}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{f_{ij}}{\sqrt{f_{i\cdot}.f_{\cdot j}}}u_{\alpha j}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{\sqrt{f_{i\cdot}}f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}u_{\alpha j}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sqrt{f_{i\cdot}}\widehat{\Psi}_{\alpha i}$	
$\widehat{\Psi}_{\alpha i}=\sqrt{\lambda_\alpha}\frac{1}{\sqrt{f_{i\cdot}}}v_{\alpha i}$	$\widehat{\Phi}_{\alpha j}=\sqrt{\lambda_\alpha}\frac{1}{\sqrt{f_{\cdot j}}}u_{\alpha j}$
$\widehat{\Psi}_{\alpha i}=\sum\limits_{j=1}^{p}\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\right)u_{\alpha j}=\sum\limits_{j=1}^{p}\left(\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}\sqrt{f_{\cdot j}}}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sqrt{f_{\cdot j}}\widehat{\Phi}_{\alpha j}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}\widehat{\Phi}_{\alpha j}$ $\widehat{\Phi}_{\alpha j}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}}\right)v_{\alpha i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\left(\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}\sqrt{f_{i\cdot}}}\right)\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sqrt{f_{i\cdot}}\widehat{\Psi}_{\alpha i}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}}\widehat{\Psi}_{\alpha i}$	
$\boldsymbol{\widehat{\Psi}_{\alpha i}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum\limits_{j=1}^{p}\frac{f_{ij}}{f_{i\cdot}}\widehat{\Phi}_{\alpha j}}$	$\boldsymbol{\widehat{\Phi}_{\alpha j}=\frac{1}{\sqrt{\lambda_\alpha}}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{f_{ij}}{f_{\cdot j}}\widehat{\Psi}_{\alpha i}}$