Florentino García Santos: In Memoriam
Universidad de Granada, 2011, págs. 1-8

Una nueva demostración de la clasificación de las superficies estables con curvatura media constante de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$.

Francisco Urbano • •

Resumen En [2] y [3], Barbosa, Do Carmo y Eschenburg probaron que cualquier hipersuperficie compacta con curvatura media constante y estable de $\mathbb{R}^n$ y $\mathbb{S}^n$ es totalmente umbilical. En este articulo, se da una nueva demostración de este resultado cuando $n = 3$. La ventaja de esta nueva prueba es que no solo permite redemostrar también la clasificación de las superficies con curvatura media constante estables de $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ obtenida por Souam en [6], sino que puede extenderse a otras variedades de dimensión tres como $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^1$ y las esferas de Berger (ver [7] y [8]).

1. Intoducción

El estudio de las superficies de curvatura media constante del espacio Euclídeo $\mathbb{R}^3$ es uno de los problemas más interesantes en geometría diferencial clásica. Los primeros ejemplos conocidos eran las de revolución, esto es esferas redondas, cilindros circulares rectos y las superficies de Delaunay (ver [4]). En 1951, Hopf demostró un primer resuldo de estructura en dicha familia, probando que las únicas superficies compactas de género cero con curvatura media constante de $\mathbb{R}^3$ son las esferas totalmente umbilicales (ver [5]). En 1956, Alexandrov probó otro resultado global en dicha familia de una trascendencia importantísima no sólo por el resultado en sí mismo sino por el método de su demostración. Él probó que las esferas totalmente umbilicales de $\mathbb{R}^3$ son las únicas superficies compactas de curvatura media constante que no tienen autointersecciones (ver [1]). Pero las superficies de curvatura media constante también son soluciones a un problema variacional que describimos a continuación.

Francisco Urbano
Departamento de Geometría y Topología, Universidad de Granada
furbano@ugr.es

Las superficies compactas de curvatura media constante de una variedad Riemanniana $(M^3, \langle,\rangle)$, aparecen como puntos críticos del funcional área para variaciones que preservan el volumen. Si $\Phi : \Sigma \to (M^3, \langle,\rangle)$ es una immersión de una superficie compacta Σ y N un normal unitario a la superficie, las variaciones que preservan el volumen son aquellas en las que el campo variacional fN cumple $\int_\Sigma f\, dA = 0$.

Una immersión $\Phi : \Sigma \to (M^3, \langle,\rangle)$ de curvatura media constante H se dice *estable* si es un mínimo local del área para variaciones que preservan el volumen, esto es, la segunda derivada del área es no negativa para cualquier variación que preserve el volumen. Si fN es el correspondiente campo de la variación, la estabilidad se traduce en que la forma cuadrática $Q : C^\infty(\Sigma) \to \mathbb{R}$ definida por

$$Q(f) = -\int_\Sigma \{f\Delta f + (|\sigma|^2 + Ric(N))f^2\}\, dA$$

es semidefinida positiva para variaciones que preserven el volumen, esto es

$$\Phi \text{ es estable } \Leftrightarrow \; Q(f) \geq 0, \quad \forall\, f \in C^\infty(\Sigma), \quad \int_\Sigma f\, dA = 0. \tag{1}$$

En la expresiones anteriores, Δ es el Laplaciano de la métrica inducida en Σ, σ es la segunda forma fundamental de Φ y Ric es la curvatura de Ricci de $(M^3, \langle,\rangle)$.

Si consideramos como variedad ambiente $\mathbb{R}^3$ y la esfera de radio r como superficie (que tiene curvatura media constante $1/r$), entonces la condición de estabilidad significa que

$$-\int_{\mathbb{S}^2(r)} f\Delta f\, dA = \int_{\mathbb{S}^2(r)} |\nabla f|^2\, dA \geq (2/r^2) \int_{\mathbb{S}^2(r)} f^2\, dA,$$

para cualquier f con $\int f\, dA = 0$. Pero el primer valor propio no nulo de Δ en $\mathbb{S}^2(r)$ es $2/r^2$. Por tanto la anterior desigualdad se cumple siempre, y así $\mathbb{S}^2(r)$ es una superficie estable de curvatura media constante en $\mathbb{R}^3$.

De forma similar, si consideramos como variedad ambiente la esfera $\mathbb{S}^3$ de radio uno y como superficie compacta Σ una esfera umbilical de radio r, $0 < r \leq 1$, entonces Σ tiene curvatura media constante $H = \sqrt{1-r^2}/r$ y $|\sigma|^2 = 2(1-r^2)/r^2$. La condición de estabilidad significa que

$$-\int_{\mathbb{S}^2(r)} f\Delta f\, dA = \int_{\mathbb{S}^2(r)} |\nabla f|^2\, dA \geq (2/r^2) \int_{\mathbb{S}^2(r)} f^2\, dA,$$

para cualquier f con $\int f\, dA = 0$. Pero Σ es una esfera de radio r con su métrica canónica, y así el primer valor propio no nulo de Δ es $2/r^2$. Por tanto la anterior desigualdad se cumple siempre, y Σ es una superficie estable de curvatura media constante en $\mathbb{S}^3$.

En el siguiente resultado se probará una tercera caracterización global de las esferas totalmente umbilicales, viendo que son las únicas superficies *estables* de curvatura media constante de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{S}^3$.

Teorema *Sea* $\Phi : \Sigma \to (M^3, \langle , \rangle)$ *una inmersión con curvatura media constante de una superficie compacta y orientable* Σ*, donde* $M^3 = \mathbb{R}^3$ *o* $\mathbb{S}^3$*. Si* Φ *es estable, entonces* $\Phi(\Sigma)$ *es una esfera totalmente umbilical de* $\mathbb{R}^3$ *o* $\mathbb{S}^3$*.*

Observación. Cuando la curvatura media $H \neq 0$, la hipótesis de orientabilidad no es necesaria, pues la superficie ha de ser necesariamente orientable, pero en el caso $H = 0$, hay ejemplos de superficies compactas y no orientables en $\mathbb{S}^3$.

2. Demostración del teorema

Sea g el género de la superficie Σ. Consideremos el espacio vectorial de las 1-formas armónicas sobre Σ: $\mathcal{H}(\Sigma)$, cuya dimensión es $2g$. Usando la identificación entre 1-formas y campos sobre Σ, diremos que un campo X en Σ es armónico si su 1-forma asociada es armónica. Como una 1-forma es armónica si es cerrada y cocerrada, es fácil comprobar que un campo X sobre Σ es armónico si cumple las condiciones

$$\mathrm{div}\,(X) = 0, \quad (\nabla X)(V, W) := \langle \nabla_V X, W \rangle \text{ es simétrico,}$$

siendo div el operador divergencia y ∇ la conexión en Σ.

Es interesante observar que si J es la estructura compleja de la superficie de Riemann Σ y X es un campo armónico, entonces $X^* = JX$ es también un campo armónico, que obviamente cumple $\langle X, X^* \rangle = 0$ y $|X^*|^2 = |X|^2$.

Otra propiedad interesante de los campos armónicos, que se usará mas adelante, es que si

$$\Delta^\Sigma = \nabla_{e_i}\nabla_{e_i} - \nabla_{\nabla_{e_i} e_i}, \quad \{e_1, e_2\} \text{ una referencia ortonormal en } \Sigma,$$

es el Laplaciano rudo de Σ, entonces todo campo armónico X cumple

$$\Delta^\Sigma X = KX, \quad \text{K = curvatura de Gauss de } \Sigma. \tag{2}$$

A partir de ahora consideramos $\mathbb{S}^3 \subset \mathbb{R}^4$, y así nuestra superficie estará contenida o en $\mathbb{R}^3$ o en $\mathbb{R}^4$. En cualquier caso, dado un campo armónico X sobre Σ, se tiene que para cada $a \in \mathbb{R}^3$ (o cada $a \in \mathbb{R}^4$)

$$\mathrm{div}\,(\langle \Phi, a \rangle X) = \langle X, a \rangle,$$

y usando el teorema de la divergencia, se tiene que

$$\int_\Sigma \langle X, a \rangle \, dA = 0, \quad \forall\, X \text{ campo armónico}, \ \forall a \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^4).$$

Usando estas funciones de media cero como funciones test en la definición de la estabilidad dada en (1), obtenemos que

$$Q(\langle X, a\rangle) \geq 0, \quad \forall\, X \text{ campo armónico}, \forall a \in \mathbb{R}^3(\mathbb{R}^4).$$

Ahora se calculará $\Delta\langle X, a\rangle$. Usando que $\mathbb{S}^3$ es una hipersuperficie totalmente umbilical de $\mathbb{R}^4$, y que X es armónico, se tiene que el gradiente de las funciones $\langle X, a\rangle$ viene dado por

$$\langle \nabla\langle X, a\rangle, V\rangle = \langle \nabla_V X, a\rangle + \langle \sigma(X, V), a\rangle - \epsilon\langle X, V\rangle\langle \Phi, a\rangle,$$

donde V es cualquier campo tangente a Σ y ϵ es cero o uno dependiendo de que $M^3 = \mathbb{R}^3$ o $M^3 = \mathbb{S}^3$. Ahora derivando de nuevo y teniendo en cuenta la definición de campo armónico y (2), obtenemos que

$$\Delta\langle X, a\rangle = K\langle X, a\rangle + 2\langle \sigma(e_i, \nabla_{e_i} X), a\rangle - \langle A^2 X, a\rangle - \epsilon\langle X, a\rangle,$$

donde $\{e_1, e_2\}$ es una referencia ortonormal sobre Σ y A es el endomorfismo de Weingarten asociado a N.

Si $\{a_1, \ldots, a_n\}$, con $n = 3$ o 4 dependiendo de que $M^3 = \mathbb{R}^3$ o $\mathbb{S}^3$, es una base de $\mathbb{R}^3$ o $\mathbb{R}^4$ se tiene que

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} Q(\langle X, a_i\rangle) = \int_\Sigma \{-(\epsilon + K + |\sigma|^2)|X|^2 + \langle A^2 X, X\rangle\}\, dA.$$

Ahora, usando el campo armónico $X^* = JX$ y teniendo en cuenta la ecuación de Gauss de Σ, $K = \epsilon + 2H^2 - |\sigma|^2/2$, se obtiene que

$$\begin{aligned} 0 \quad &\leq \quad \sum_{i=1}^{n}\{Q(\langle X, a_i\rangle) + Q(\langle X^*, a_i\rangle)\} = -\int_\Sigma (2\epsilon + 2K + |\sigma|^2)|X|^2\, dA \\ &= \quad -4(\epsilon + H^2)\int_\Sigma |X|^2\, dA. \end{aligned}$$

En la anterior desigualdad, $\epsilon + H^2 > 0$ ya que $\mathbb{R}^3$ no admite superficies mínimas (H=0) compactas. Así la anterior desigualdad nos dice que cualquier campo armónico en Σ ha de ser el trivial, o lo que es lo mismo, el género de la superficie es $g = 0$. El clásico resultado de Hopf ([5]) nos dice que dicha superficie ha de ser una esfera totalmente umbilical, y la demostración concluye.

Agradecimientos

Financiado por el proyecto de investigación del Ministerio de Ciencia y Tecnología MTM2007-61775 y el grupo de excelencia de la Junta de Andalucía P06-FQM-01642.

Referencias

[1] A.D. Alexandrov, Uniqueness theorems for surfaces in the large I, *Vestnik Leningrad. Univ.* **11** (1956), 5–17.

[2] J.L. Barbosa, M. do Carmo, Stability of hypersurfaces with constant mean curvature, *Math. Z.* **185** (1984), 339–353.

[3] J.L. Barbosa, M. do Carmo, J. Eschenburg, Stability of hypersurfaces of constant mean curvature in Riemannian manifolds, *Math. Z.* **197** (1988), 123–138.

[4] C. Delaunay, Sur la surface de revolution dont la courbure moyenne est constante, *J. Math. Pure et App.* **16** (1841), 309–321.

[5] H. Hopf, *Differential geometry in the large*, volumen 1000 de *Lecture Notes in Mathematics*, Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[6] R. Souam, On stable constant mean curvature surfaces in $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$ and $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$, *Trans. Amer. Math. Soc.* **362** (2010), 2845–2857.

[7] F. Torralbo, F. Urbano, Compact stable constant mean curvature surfaces in the Berger spheres, prepublicación, `arXiv:0906.1439v1[math.DG]`.

[8] F. Torralbo, *Superficies de curvatura media paralela en* $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ *y* $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{H}^2$ *y superficies de curvatura media constante en espacios homogéneos*, Tesis doctoral, Universidad de Granada, 2010.