

**CONOCIMIENTOS PROFESIONALES DEL PROFESOR EN LA ENSEÑANZA DE LA
GEOMETRÍA DE EDUCACIÓN MEDIA**

Tesis presentada para optar al título de:

Doctor en Didáctica

Presentado por:

CLAUDIA LORENA MORA PÉREZ

Director:

Dr. MAURO RIVAS OLIVO

UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA DE PEREIRA

FACULTAD DE EDUCACIÓN

DOCTORADO EN DIDÁCTICA

LÍNEA DE INVESTIGACIÓN EN DIDÁCTICA DE LAS CIENCIAS EXACTAS Y

EXPERIMENTALES

PEREIRA, COLOMBIA

2025

A mi familia.

AGRADECIMIENTOS

A las instituciones educativas de la ciudad de Pereira, Colombia que permitieron el espacio académico para contribuir en la formación de los profesores de matemáticas.

A la Universidad Tecnológica de Pereira, la Universidad de Caldas, la Universidad Los Lagos y la Universidad de Granada, y a los docentes: Oscar Tamayo, Francisco Javier Ruiz, Luis Pino Fan, Juan Diaz Godino, por sus valiosos aportes y amplia experiencia en el campo de la investigación científica y educación matemática.

A mi Director de Tesis. A Mauro Rivas O., por su amplia trayectoria en la investigación científica en educación matemática, su experiencia, constancia, apoyo y aprendizajes brindados.

CONTENIDO

1	CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	14
1.1	El problema de investigación	18
1.2	Origen y motivación de la investigación.....	22
1.3	El tema matemático de interés: Geometría en la educación media.....	23
1.4	Preguntas de investigación (PI).....	28
1.5	Objetivos	29
1.5.1	<i>Objetivo General</i>	29
1.5.2	<i>Objetivos específicos</i>	29
1.6	Pertinencia de la investigación	30
2	CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES	32
2.1	Introducción	32
2.2	Antecedentes del conocimiento del profesor de matemáticas.....	33
2.2.1	<i>La propuesta de Shulman sobre el Conocimiento del Profesor</i>	35
2.2.2	<i>Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (MKT: Mathematical Knowledge for Teaching)</i>	36
2.2.3	<i>Conocimiento Didáctico Matemático del profesor (DMK: Didactic-Mathematical Knowledge)</i>	37
2.2.4	<i>Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (MTSK: Mathematics Teachers’ Specialised Knowledge)</i>	38
2.3	Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor (CCDM)	39

2.3.1	<i>Algunos estudios sobre el Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas (CPPM) en la enseñanza de la geometría.....</i>	<i>39</i>
2.3.2	<i>Conclusiones respecto a los antecedentes sobre el CPPM.....</i>	<i>40</i>
2.4	Antecedentes en torno a la formación de profesores en cónicas.....	45
2.5	Antecedentes en torno a la enseñanza y aprendizaje de la geometría: las cónicas	48
2.5.1	<i>Faceta ecológica</i>	<i>48</i>
2.5.2	<i>Faceta mediacional-interaccional en el estudio de las cónicas</i>	<i>50</i>
2.5.3	<i>Faceta cognitiva-afectiva en el estudio de las cónicas</i>	<i>54</i>
3	CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO	57
3.1	Introducción	57
3.2	Las cónicas: epistemología y estudio como objeto de la didáctica	57
3.2.1	<i>Desde Apolonio (262 a. c.) hasta Descartes (siglo XVII)</i>	<i>57</i>
3.2.2	<i>Breve inciso en sus fundamentos matemáticos</i>	<i>64</i>
3.3	Las cónicas y el currículo.....	78
3.3.1	<i>Competencias matemáticas</i>	<i>79</i>
3.3.2	<i>Competencias científicas.....</i>	<i>79</i>
3.3.3	<i>Competencias ciudadanas.....</i>	<i>79</i>
3.3.4	<i>Objetivos curriculares.....</i>	<i>80</i>
3.3.5	<i>Contenidos en el currículo</i>	<i>81</i>
3.3.6	<i>Metodología de enseñanza</i>	<i>81</i>
3.4	Conocimiento académico y profesional del profesor de matemáticas	84
3.4.1	<i>Conocimiento académico</i>	<i>84</i>
3.4.2	<i>Conocimiento profesional</i>	<i>85</i>

3.5	El modelo de Conocimiento Didáctico Matemático (CDM)	88
3.6	El modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor (CCDM)	91
3.6.1	<i>Competencias de análisis e intervención didáctica</i>	93
3.6.2	<i>Competencia matemático-didáctica docente</i>	95
3.6.3	<i>Valoración y desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas.</i> ..	99
4	CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA	103
4.1	Introducción	103
4.2	Diseño metodológico.....	103
4.3	Enfoque de investigación	105
4.4	Unidad de análisis y unidad de trabajo.....	106
4.4.1	<i>La Unidad de análisis</i>	106
4.4.2	<i>La Unidad de trabajo</i>	108
4.5	Consideraciones éticas	109
4.6	Técnicas e instrumentos	109
4.6.1	<i>Técnicas</i>	110
4.6.2	<i>Instrumentos</i>	112
4.7	Recolección y análisis de la información.....	118
4.7.1	<i>Recolección de la información</i>	118
4.7.2	<i>Análisis de la información</i>	119
4.8	Fases de la investigación.....	120
4.8.1	<i>Fase 1: Estudio preliminar</i>	121
4.8.2	<i>Fase 2: Diseño del Taller de formación profesional (TF-CDM)</i>	125

4.8.3	<i>Fase 3: Implementación del Taller TF-CDM</i>	126
4.8.4	<i>Fase 4: Evaluación del Taller de formación profesional (TF-CDM)</i>	127
5	CAPÍTULO 5. RESULTADOS	128
5.1	Introducción	128
5.2	Resultados de la Fase 1: Estudio preliminar	129
5.2.1	<i>Resultados del Momento 1: Revisión sistemática de la literatura</i>	129
5.2.2	<i>Resultados del Momento 2: Diseño y Validación del cuestionario CCDM-GC</i>	131
5.2.3	<i>Resultados del Momento 3: Aplicación del cuestionario APDM-GC4</i>	156
5.2.4	<i>Resultados de la aplicación del cuestionario APDM-GC4 en la Sección C.</i> <i>Competencia Matemático-Geométrica de los profesores.</i>	159
5.3	Resultados de la Fase 2: Diseño del Taller de Formación Profesional (TF-CDM)	163
5.3.1	<i>Taller de Formación profesional (TF-CDM)</i>	164
5.4	Resultados de la Fase 3: Implementación del Taller de formación profesional (TF- CDM)	171
5.4.1	<i>Análisis de la práctica de resolución de problemas (Análisis Subcategoría B1.2)</i>	172
5.4.2	<i>Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica (Análisis Subcategoría B2.1)</i>	188
5.5	Resultados de la Fase 4: Evaluación de la implementación del taller TF-CDM	196
5.5.1	<i>En relación con las herramientas utilizadas</i>	197
5.5.2	<i>En relación con los resultados generales de la implementación</i>	199
6	CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS	203
6.1	Sobre el estudio de conocimientos y competencias del profesor	204
6.2	Competencia Matemática-Geométrica	204
6.2.1	<i>Subcompetencia Resolución de problemas</i>	206

6.2.2	<i>Subcompetencia Plantear problemas</i>	208
6.2.3	<i>Subcompetencia de Análisis de la práctica para la resolución de problemas</i>	209
6.3	Competencia de Análisis e Intervención Didáctica.....	211
6.3.1	<i>Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica</i>	212
6.4	Síntesis integradora del grado de cumplimiento de los objetivos	214
7	CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES	216
7.1	Introducción	216
7.2	Conclusiones	217
7.3	Limitaciones del estudio.....	221
7.4	Recomendaciones del estudio	222
7.5	Contribución a la comunidad de investigación	223
7.6	Posibles ampliaciones	224
8	ANEXOS	226
9	REFERENCIAS	230

LISTA DE TABLAS

Tabla 4.1 Técnicas, tipos de instrumentos y métodos de análisis	110
Tabla 4.2 Instrumentos y fases en las que se usan en la investigación	112
Tabla 5.1 Validez de contenido de las categorías en la Subsección B1	131
Tabla 5.2 Validez de contenido de las categorías en la Subsección B2	132
Tabla 5.3 Categorías de la parte B1.1 (Subcompetencias Resolución de Problemas) de la Subsección B1	133
Tabla 5.4 Categorías de la parte B1.2 (Subcompetencia de Plantear problemas) de la subsección B1	134
Tabla 5.5 Categorías de la parte B1.3 (Subcompetencia de Análisis de la práctica de resolución de problemas) de la subsección B1	135
Tabla 5.6 Categorías de la parte B2.1 (Subcompetencia de Análisis de la actividad matemática del proceso de estudio) de la subsección B2	137
Tabla 5.7 Categorías de la parte B2.2 (Subcompetencia de Gestión y análisis de las interacciones) de la subsección B2.....	138
Tabla 5.8 Categorías de la parte B2.3 (Subcompetencia de Uso y manejo de recursos) de la subsección B2.....	140
Tabla 5.9 Categorías de la parte B2.4 (Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica) de la subsección B2	141
Tabla 5.10 Categorías evaluadas para la Tarea 1	144
Tabla 5.11 Categorías evaluadas para la Tarea 2	144
Tabla 5.12 Categorías evaluadas para la Tarea 3	145

Tabla 5.13 Valoración de subcompetencias de la Competencia Matemático-geométrica	148
Tabla 5.14 Valoración de subcompetencias de Análisis e Intervención Didáctica	149
Tabla 5.15 Valoración de las subcompetencias de la Competencia Matemática-Geométrica	157
Tabla 5.16 Valoración de la Subcompetencia de Análisis e Intervención Didáctica	158
Tabla 5.17. Frecuencia de Elementos lingüísticos identificados.....	173
Tabla 5.18. Frecuencia de Conceptos-definiciones identificados	176
Tabla 5.19. Frecuencia de los Procedimientos identificados	178
Tabla 5.20 Frecuencia de las Propiedades/proposiciones identificadas	179
Tabla 5.21 Frecuencia de los Argumentos identificados	181
Tabla 5.22 Variedad y profundidad: Conceptos y definiciones	183
Tabla 5.23 Coherencia y eficacia: Procedimientos	185
Tabla 5.24 Consistencia y relevancia: Propiedades	186
Tabla 5.25 Claridad y fundamentación: Argumentos	187
Tabla 5.26 Valoración de las facetas en las planeaciones de los profesores.....	189
Tabla 5.27 Valores esperados de la valoración de las facetas.....	190
Tabla 5.28 Facetas de la idoneidad didáctica: reflexiones de los profesores	192
Tabla 5.29 Valoración de facetas en las planeaciones de los cinco profesores.....	193
Tabla 5.30 Análisis de los componentes de la Idoneidad Didáctica según las reflexiones de la investigadora	194
Tabla 5.31 Evaluación del Taller TF-CDM	200

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 Esquema organizacional de investigación	18
Figura 1.2 Histórico de puntajes promedio dominio de matemáticas – PISA	19
Figura 2.1 Algunos modelos del conocimiento del profesor de matemática.	34
Figura 2.2 Modelo del MKT (Mathematical Knowledge for Teaching).	36
Figura 2.3 Dimensiones y componentes del CDM y sus relaciones con otros modelos.....	38
Figura 2.4 Modelo MTSK: Mathematics Teachers’ Specialised Knowledge.....	39
Figura 3.1 Método de Descartes para resolver una ecuación de segundo grado.....	61
Figura 3.2 Interpretación de los parámetros de la elipse, la parábola y la hipérbola	62
Figura 3.3 Proposición I.1 de Apolonio.	66
Figura 3.4 Proposición I.4 de Apolonio.	66
Figura 3.5 Proposición I.11 de Apolonio.	67
Figura 3.6 Proposición I.12, I.13 de Apolonio.....	68
Figura 3.7 Secciones cónicas en el espacio E^2	68
Figura 3.8 Parábola, Elipse e Hipérbola.....	70
Figura 3.9 Elementos de la circunferencia.	72
Figura 3.10 Elementos de la parábola.	72
Figura 3.11 Elementos de la elipse.	74
Figura 3.12 Deducción del cálculo de b^2	75
Figura 3.13 Elementos de la hipérbola.....	76
Figura 3.14 Facetas y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático.....	89
Figura 3.15 Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica.	93

Figura 3.16 Competencias Matemáticas y de Análisis e Intervención Didáctica.	97
Figura 3.17 Competencias y sub competencias que se valoran por medio del APDM-GC4.....	100
Figura 3.18 Competencias y sub competencias que orientan el Taller TF-CDM.	101
Figura 4.1 Marco metodológico general de la investigación	105
Figura 4.2 Relación de componentes de la sección B del Instrumento CCDM-GC	114
Figura 4.3 Fases de investigación y plan de análisis. Primer ciclo de una investigación de Diseño Educativo.....	122
Figura 5.1 Problema planteado en la Tarea 2: Profesor 1	151
Figura 5.2 Problema planteado en la Tarea 2: Profesor 3	153
Figura 5.3 Problema planteado en la Tarea 3: Profesor 1	154
Figura 5.4 Respuesta de PA7 al Problema planteado en la Tarea 1	160
Figura 5.5 Problema planteado en la Tarea 2: Profesores PA1 y PA2	161
Figura 5.6 Elementos lingüísticos identificados en la resolución del problema de la elipse.	174
Figura 5.7 Conceptos-definiciones presentados por los profesores P2 y P5 en el problema de la elipse.....	177
Figura 5.8 Procedimiento presentado por el profesor P5 para resolver el problema de la elipse.	178
Figura 5.9 Proposiciones usados por el profesor P5 en el problema de la elipse.	180
Figura 5.10 Argumentos en la solución del problema de la elipse por el profesor P1.....	182

RESUMEN

La presente investigación tuvo como objetivo central estudiar los conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas, en torno a la enseñanza de las cónicas en los grados de la educación media, por medio de la aplicación de un cuestionario y su participación en un taller de formación basado en el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor. A partir de diferentes fundamentos teóricos, la tesis defiende la necesidad de desarrollar conocimiento didáctico-matemático del profesor en el ámbito de la enseñanza aprendizaje de la geometría, específicamente de las cónicas.

El método empleado durante la investigación fue la investigación de diseño, el cual se encuentra vinculado en cada una de las fases de desarrollo (estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación). Dentro del marco general de la investigación de diseño, se desarrolla un enfoque metodológico mixto, el cual comprende técnicas cualitativas y cuantitativas para la recolección, análisis e interpretación de los datos. Las técnicas e instrumentos estuvieron asociados al cuestionario desarrollado con profesores en servicio y el taller de formación profesional desde su doble propósito: la recolección y análisis de los datos y la valoración de los conocimientos didácticos y matemáticos del profesor. Este proceso investigativo tuvo como propósito contribuir al campo de la didáctica de las matemáticas mediante el diseño de instrumentos, orientados al desarrollo profesional del profesor. Asimismo, buscó favorecer la identificación, comprensión y análisis de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor en servicio, además de aportar a la producción textual y conceptual en torno al desarrollo del Enfoque Ontosemiótico para la enseñanza de las matemáticas.

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

Algunos de los desafíos actuales de investigación en Educación Matemática, a nivel mundial, se relacionan con la formación del profesorado y el desarrollo del conocimiento profesional de este colectivo (Díaz y Poblete, 2016; Aparicio et al., 2021; Burgos y Godino 2021), por lo que abordarlo, además del interés y necesidad de profundizar en su estudio, puede aportar al logro de una educación de calidad (Aparicio et al., 2021). En este orden de ideas, en este trabajo se aborda el desarrollo del conocimiento del profesor como problema de investigación. Específicamente se analiza el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas en la educación media, a través de la determinación de conocimientos que requieren los profesores en servicio para la enseñanza idónea de las *cónicas*, identificando sus fortalezas y aspectos de mejora.

El ejercicio investigativo consideró aspectos de la teoría de la didáctica de las matemáticas, con énfasis en el desarrollo de conocimiento profesional, el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos del profesor (CCDM) (Godino et al. 2017) y la macro-herramienta propuesta por Pino-Fan et al. (2023), como eje para el análisis de conocimiento del profesor. Con lo cual, fue posible diseñar una propuesta de planeación que permitiera el diálogo y la reflexión del profesor acerca de los elementos planteados por el EOS y la pauta de idoneidad didáctica (Godino, 2013).

Sobre el modelo CCDM se han realizado diversos estudios con aportes en diferentes niveles, población participante y áreas de conocimiento. Sin embargo, son pocas las investigaciones en el campo de la didáctica de las matemáticas, sobre conocimiento del profesor de matemáticas en servicio, en el área de geometría y en los niveles de la educación media.

Razón por la cual se decidió profundizar en el desarrollo de conocimientos didáctico-matemáticos del profesor y su relevancia en la enseñanza de la geometría de las cónicas en estos niveles educativos.

El informe de investigación está conformado por seis capítulos. En el primero, *Introducción*, se presenta el problema de investigación, el origen y motivación de la investigación, el tema matemático de interés, la pregunta de investigación y los objetivos – general y específicos –.

En el segundo capítulo, *Antecedentes*, se abordan los aspectos más relevantes de varios trabajos de investigación realizados sobre dos categorías fundamentales: (1) el conocimiento del profesor de matemáticas y (2) la enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación media. Estos trabajos nos presentan una visión del estado del arte en el tema de esta tesis: el conocimiento y la competencia profesional del profesor para enseñar geometría en educación media. En relación con la primera categoría, el conocimiento del profesor de matemáticas, se mostrará una síntesis teórica de los modelos de conocimiento del profesor. En relación con la segunda categoría, se comenzará con una revisión de su faceta ecológica que se refiere, en parte, a las políticas educativas nacionales colombianas, que respaldan la inclusión y la importancia de la enseñanza y aprendizaje de las cónicas. Luego, se dará paso al estudio de las investigaciones realizadas en torno a la enseñanza y aprendizaje de las cónicas.

En el tercer capítulo, *Marco teórico*, se presenta la teoría relacionada con nuestra investigación, esto es, la epistemología de las cónicas y su estudio como objeto de la didáctica desde los aportes de Apolonio hasta la geometría de Descartes, la estructura curricular presentada por el sistema educativo colombiano y sus objetivos curriculares, la metodología de enseñanza y evaluación que se desarrolla en todos los niveles educativos, el desarrollo conceptual del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticos (CCDM) (Godino et al. 2017) del

profesor y lo propuesto por Pino-Fan et al. (2023) a través de lo que se ha denominado una macro herramienta de análisis didáctico-matemático basada en las herramientas teóricas del EOS (Godino et al. 2007), y finalmente el estudio del conocimiento académico y profesional del profesor.

En el capítulo cuatro, *Metodología*, se presenta el diseño metodológico para dar respuesta a la pregunta de investigación, el cumplimiento de los objetivos, el análisis de la información y la comprobación del supuesto del que parte la presente tesis. El método de investigación que se escogió fue la investigación de diseño, pues en esta se configura la reflexión del quehacer del docente de matemáticas y su práctica. Dentro del marco general de la investigación de diseño, se desarrolla un enfoque metodológico mixto, el cual comprende técnicas cualitativas y cuantitativas para la recolección, análisis e interpretación de los datos.

La estructura del quinto capítulo, *Resultados de la investigación*, integra las cuatro fases de investigación: estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación. En la primera se presentan los resultados de una revisión de literatura concerniente a la investigación sobre desarrollo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor en la enseñanza de las matemáticas y en particular de la geometría en la educación media. Además, muestra los resultados de la validación por jueces del Cuestionario CCDM-GC así como los resultados de la aplicación del cuestionario CCDM-GC y el cuestionario validado APDM-GC4, permitiendo reconocer algunos de los conocimientos didácticos y matemáticos del profesor y sus características distintivas de cada una de las competencias exploradas, la competencia matemática-geométrica y la competencia de análisis e intervención didáctica.

En la segunda fase, la fase de diseño, se evidencia una aproximación conceptual a la categoría de estudio *conocimientos y competencias didáctico-matemáticas*, mediante el diseño de un taller de formación, el diseño de una planeación sobre cónicas y la valoración de los procesos

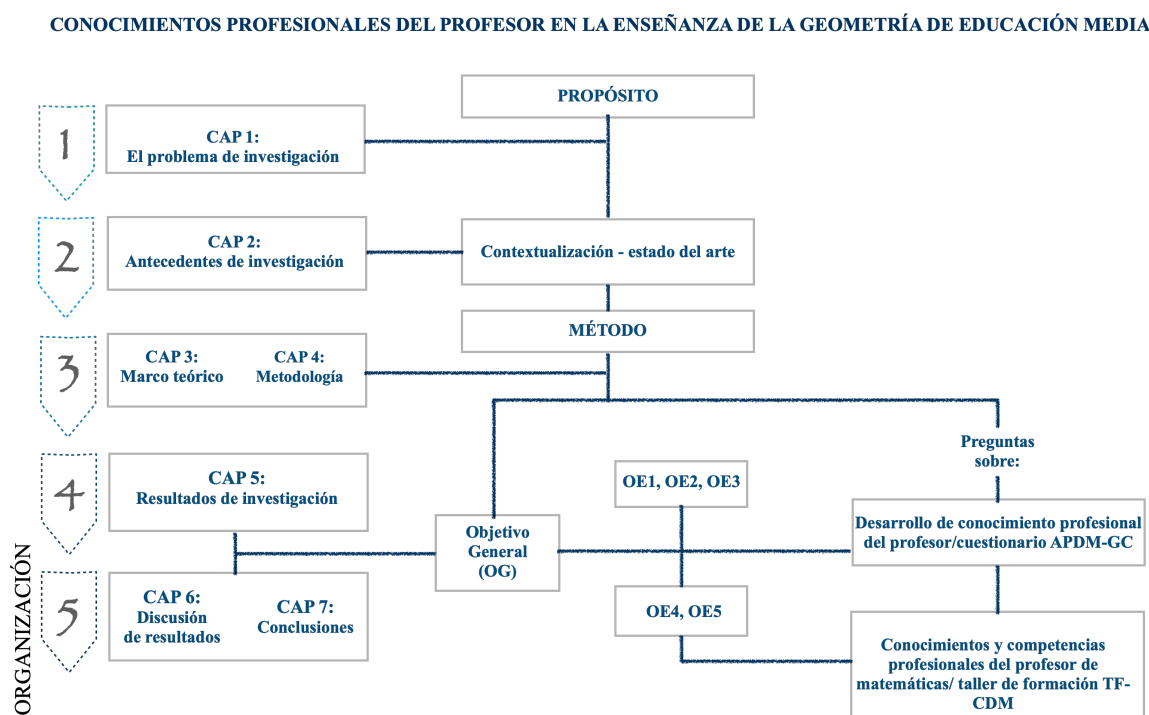
de enseñanza aprendizaje emitida por los profesores participantes. En la fase de implementación se muestran los resultados de dos análisis, correspondientes a los momentos que estructuran el taller de formación: el estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas y la valoración de procesos de enseñanza aprendizaje por parte del profesor y del investigador, en el diseño de sus planeaciones. Para la fase de evaluación se presenta una aproximación a los conocimientos y competencias didáctico-geométricas desarrollados por los profesores participantes al taller de formación profesional, a partir de las estructuras explicativas que emiten los profesores en la valoración de procesos de enseñanza aprendizaje sobre la planeación planteada por la investigadora. Para finalizar este capítulo, en el apartado de *Síntesis de los resultados*, se presenta la relación de los resultados con el modelo CCDM, el conocimiento profesional del profesor y las herramientas de la idoneidad didáctica.

El capítulo seis, *Conclusiones*, da cuenta de la comprensión lograda a partir de la articulación entre el supuesto de investigación, la teoría desarrollada, la metodología y el análisis de resultados. El desarrollo de conocimientos y competencias didácticas y matemáticas del profesor en la didáctica de las matemáticas tiene un mayor alcance si se estudia a partir del modelo CCDM y las herramientas propuestas por el EOS, para el caso de esta investigación, con profesores que enseñan en educación media. El diseño y aplicación de un taller de formación como proceso de intervención en el estudio y análisis del conocimiento del profesor, favorece e influye en su proceso de formación, toda vez que parte del reconocimiento de los conocimientos matemáticos y didácticos del profesor, en especial de la geometría y su enseñanza en los grados de la educación media.

Finalmente, se hacen recomendaciones para la investigación en didáctica de las matemáticas ante la limitación al estudio que se mencionó en el capítulo de antecedentes, relacionada con la baja producción documental e investigativa que hay al respecto. La Figura 1.1.

muestra un resumen de la relación entre el problema de investigación, los capítulos, las preguntas y los objetivos. Este esquema busca orientar, pero su desarrollo explícito se encuentra en el cuerpo del trabajo.

Figura 1.1 *Esquema organizacional de investigación*



Fuente: elaboración propia.

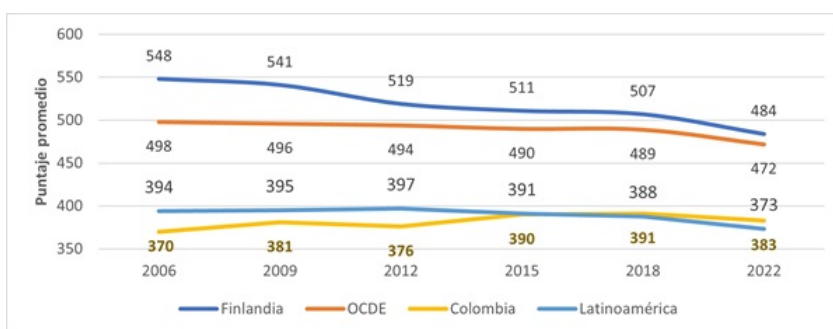
1.1 El problema de investigación

En este capítulo se presenta el problema de investigación, detallando su origen y motivación. Se aborda la temática de interés, formulando las preguntas y objetivos de investigación que guiarán el estudio y contribuirán a la solución de la problemática identificada. Finalmente, se cierra con una reflexión sobre la pertinencia de este estudio.

Diversos informes de investigación muestran que son varios los factores involucrados en la dificultad que tienen los estudiantes para aprender matemáticas, muchos de ellos, relacionadas con deficiencias en la práctica del docente y diseño de situaciones didácticas mal formuladas (Etchepare et al., 2017; Villamizar et al., 2012).

Los resultados de las Pruebas Saber (MEN, 2020) y las pruebas PISA (OECD, 2023; Schleicher, 2019), aplicadas a estudiantes de grado undécimo (15 a 18 años), revelan significativas diferencias en los niveles de desempeño, tanto a nivel nacional, al compararse con los resultados obtenidos en años anteriores, como a nivel internacional, en comparación con estudiantes de otros países. Según análisis realizado por el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2023) sobre los resultados de las Pruebas PISA 2022 en Colombia, se observa que hubo una disminución de 8 puntos en el puntaje promedio de matemáticas en comparación con los resultados obtenidos en 2018. Esta variación negativa refleja una disminución en el rendimiento matemático de los estudiantes colombianos en los grados de educación básica y media. La Figura 1.2 muestra una gráfica con el histórico de los puntajes promedio en matemáticas en las diferentes ediciones de las Pruebas PISA, lo que permite visualizar la tendencia a lo largo del tiempo, incluyendo esta disminución reciente.

Figura 1.2 *Histórico de puntajes promedio dominio de matemáticas – PISA*



Fuente: Pruebas PISA 2022, (MEN, 2023)

Este descenso en los puntajes tanto en la prueba internacional como en la prueba nacional, debe ser motivo de reflexión y revisión, y, al mismo tiempo, ser asumido como uno de los desafíos más importantes para la enseñanza y aprendizaje de matemáticas en el sistema educativo colombiano.

En correspondencia con lo anterior, en la literatura especializada se reconoce que la mejora de la calidad de la enseñanza y aprendizaje de la matemática está en relación con el conocimiento y competencia profesional del profesor (Aparicio et al., 2021; Hill et al., 2005; Padilla y Acevedo, 2022). Este hecho, ampliamente reconocido, ha implicado el desarrollo de un considerable número de investigaciones dirigidas al estudio del conocimiento del profesor de matemáticas (Montes et al., 2022; Tefera et al., 2021; Zakaryan et al., 2018).

Hill et al. (2005), por ejemplo, encontraron en su estudio que el conocimiento matemático de los docentes está significativamente relacionado con los avances en el rendimiento de los estudiantes de educación básica primaria. Su investigación se centró en las habilidades matemáticas especializadas utilizadas por los profesores en la enseñanza de esta materia. En sus conclusiones, señalan que los docentes deberían poseer, al menos, un entendimiento específico del contenido matemático y de las estrategias pedagógicas empleadas en la enseñanza. Por lo tanto, sugieren implementar programas de desarrollo profesional para mejorar la competencia matemática-geométrica de los profesores.

Asimismo, Aparicio et al. (2021) exploran cómo la conversación reflexiva entre futuros docentes de matemáticas contribuye al desarrollo de su conocimiento profesional, especialmente en el ámbito de la generalización matemática. Mencionan que los profesores de matemáticas necesitan conocimientos que van más allá de la pedagogía general, como un entendimiento profundo de los conceptos a enseñar. El estudio destaca la importancia de crear espacios para la reflexión y el diálogo entre los futuros docentes, ya que esto les permite integrar diferentes representaciones matemáticas y desarrollar habilidades críticas para su futura práctica docente. Enfatiza que la generalización es fundamental en el aprendizaje de las matemáticas y que su enseñanza debe ser abordada desde enfoques como el aritmético, el algebraico y el geométrico. Concluye el estudio, que la conversación reflexiva no solo apoya el desarrollo del conocimiento

profesional de los futuros docentes, sino que también les ayuda a reconocer la importancia de la generalización en la enseñanza de las matemáticas.

En relación con la enseñanza de la geometría, Segal et al. (2021) realizan un estudio sobre las percepciones de los futuros docentes de matemáticas en formación respecto al uso de software de geometría dinámica (DGS: Dinamic Geometry Software), para mejorar su conocimiento del contenido especializado y la enseñanza de la geometría. El principal problema abordado, es la necesidad de mejorar el conocimiento pedagógico y matemático de los futuros docentes de matemáticas en un contexto educativo que cada vez más incorpora tecnologías digitales. Los autores argumentan que la formación docente debe incluir herramientas tecnológicas, para promover un aprendizaje más significativo y dinámico en la enseñanza de la geometría. El estudio destaca la importancia de que los docentes en formación adquieran competencias en el uso de estas tecnologías para facilitar la enseñanza y el aprendizaje de conceptos matemáticos complejos.

Asimismo, investigaciones sobre la enseñanza de las cónicas en los grados de educación media destacan la importancia de estudiar este tema, no solo por su relevancia cultural y social, sino también por el papel fundamental que desempeñan en el desarrollo de las matemáticas (Almouloud et al., 2014). Sin embargo, se ha observado que la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas, un tema incluido en el currículo, presenta dificultades en dos aspectos: (1) cognitivo, al momento de estudiar sus propiedades y características dentro del marco de la geometría euclidiana; y (2) ecológico, sobre el uso de sentido que se le puede dar a nivel social y cultural.

Desde lo cognitivo, estas dificultades se manifiestan tanto en el ámbito conceptual (el saber qué y el saber por qué) como en el procedimental (el saber cómo) (MEN, 2006, p. 50), dejando al descubierto, una desconexión entre la construcción geométrica de las cónicas y su análisis matemático, dando prioridad al uso de técnicas de análisis, lo que implica que los

estudiantes deben identificar y comprender el concepto de la circunferencia, la elipse, la hipérbola y la parábola a partir de sus ecuaciones cartesianas (MEN, 2006, p. 61).

En este sentido, los estudiantes presentan dificultades para lograr conectar el estudio de las cónicas con situaciones reales o aplicaciones prácticas que les permitan comprender su relevancia en contextos sociales y culturales. Esta falta de conexión les limita la posibilidad de que perciban las cónicas como herramientas útiles para interpretar fenómenos cotidianos, artísticos o científicos, lo cual podría enriquecer su aprendizaje y motivación, rara vez se exploran estos vínculos en el aula de clase. Fomentar un enfoque ecológico en la enseñanza de las cónicas no solo facilitaría una comprensión más profunda y duradera, sino que también permitiría a los estudiantes valorar su utilidad en la vida real.

En línea con lo expuesto, el desarrollo de conocimiento profesional del profesor de matemáticas, podría abordar esta problemática de manera integral, tanto en el aspecto cognitivo como en el experiencial, a través de estrategias que fortalezcan su capacidad para enseñar las cónicas de manera significativa y contextualizada. La formación de profesores de matemáticas por lo tanto, debe profundizar tanto en conocimiento matemático como en conocimiento didáctico-matemático, aspectos que no solo mejorarían la enseñanza de la geometría y en particular de las cónicas, sino que también permitiría a los profesores diseñar experiencias de aprendizaje que conecten esta definición matemática y geométrica con el contexto, fomentando un aprendizaje profundo, significativo y de motivación para los estudiantes.

1.2 Origen y motivación de la investigación

Una de las inquietudes que forma parte del gremio profesoral es precisamente cómo se puede mejorar la actividad de enseñanza que realiza (Conde et al., 2021; Pincheira y Vásquez, 2018). Sobre la base de esta inquietud, se plantea la posibilidad de desarrollar una investigación en la búsqueda de esa mejora. De acuerdo con lo expuesto en el apartado anterior esa mejora está

en relación con los conocimientos y competencias didácticas y matemáticas con que éste cuenta, emplea y desarrolla en su actividad de enseñanza, por lo que se considera necesario una formación disciplinar y didáctica sólida y funcional para el logro de tal mejora, tanto desde la formación inicial como la formación continua del profesorado (Badillo et al., 2019; Rojas, 2014).

En líneas más generales, de acuerdo con las ideas planteadas en la teoría del Triángulo Didáctico (Chevallard y Johsua, 1982), en la que se sitúa y analiza la naturaleza de las múltiples relaciones que se establecen entre saber-estudiante-profesor, se reconoce que el papel del docente, como vértice de ese triángulo, representa una parte fundamental para la posible superación del problema de la enseñanza y el aprendizaje. Es decir, desde la perspectiva científico-académica se considera ese papel o la actuación del profesor como esencial para el logro de esa mejora, la cual, como se ha dicho, forma parte de sus propias inquietudes profesionales. De manera que, tanto las motivaciones e inquietudes profesionales y personales del profesor, como las interpretaciones científico-académicas otorgadas y esperadas del desempeño de su papel profesional, convergen hacia el logro de una actividad docente de calidad, lo cual, como se viene exponiendo, está en relación con el conocimiento y competencias profesionales del profesor de matemáticas. El reconocimiento de esta convergencia constituye el inicio y motivación del trabajo que ahora se presenta.

1.3 El tema matemático de interés: Geometría en la educación media

Para el logro de una mejora de la actuación del profesorado de matemática, como es referido en la literatura especializada (Castro, 2011; Giménez y Vanegas, 2020; Smith et al., 2020), es necesario fomentar una formación que le permita al profesorado, desempeñar una mejor labor de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en particular de la geometría. Una formación inicial y continua de los docentes y un desarrollo metodológico y didáctico son factores esenciales para lograr mejores prácticas de enseñanza de esta disciplina (Guacaneme et

al., 2013; Planchar et al., 2005), con lo cual sea posible diseñar y desarrollar estrategias innovadoras de enseñanza, que pueda generar cambios importantes en el aprendizaje de la geometría. Para ello, es necesario que el profesor reciba una sólida formación del conocimiento matemático, en este caso, de dominio disciplinar en geometría. Se debe garantizar que el profesor de matemáticas conozca la materia que va a enseñar, es decir, la geometría y su naturaleza. Pero, además, una educación en geometría al servicio de las necesidades reales de su enseñanza y aprendizaje; con niveles de especialización que perfilen al docente en habilidades para comunicar y contribuir significativamente en la construcción de habilidades matemáticas para la vida, favoreciendo así, un aprendizaje acorde con las nuevas tendencias de la educación en matemática escolar (Herbst et al., 2018; Zhang y Houghton, 2022).

Así, en el marco de la formación didáctica, tal como lo plantea la Transposición Didáctica (Chevallard y Johsua, 1985) y la Ingeniería Didáctica (Artigue y Perrin-Glorian, 1991), es necesario que el profesor encuentre la forma para que el estudiante aprenda el saber enseñado, provocando en él una situación a-didáctica, que le permita la construcción del conocimiento matemático (Brousseau, 1986); de ahí que sea necesaria la formación del profesorado, no solamente desde el punto de vista de su disciplina, sino además desde el punto de vista del conocimiento didáctico-matemático, pues ambas forman parte del entramado fundamental en el proceso de enseñanza aprendizaje (Castro, 2011; Konic, 2011).

Trabajos como el de Giménez y Vanegas (2020), plantean una propuesta de enseñanza de la geometría en la básica primaria, en la cual buscan movilizar el conocimiento matemático de los profesores en esta área y avanzar en la construcción de conocimiento didáctico, reconociendo además la importancia de enseñar geometría como modelo de diversas situaciones y problemas del mundo real. Vargas et al. (2021), partiendo de tareas conducentes a las ideas iniciales en matemáticas y didáctica de profesores en formación, específicamente en el área de geometría,

rediseñan tareas que van en mejora de las propuestas de formación docente, buscando promover el desarrollo de competencias docentes en estos dos campos. Para Vargas y colaboradores, la formación de maestros es un tema de interés relevante en la investigación en educación matemática, porque considera que el conocimiento necesario para su enseñanza implica el conocimiento de la matemática y su didáctica, lo que es reconocido por algunos miembros de la comunidad de investigadores y profesores como un conocimiento didáctico-matemático, puesto que el conocimiento meramente de los objetos matemáticos no es suficiente para una práctica docente con sentido (Pino-Fan et al., 2015).

En el ICME-13 realizado en Hamburgo en el año 2016 (Horsman, 2019), se analizaron más de dos mil trabajos de investigación sobre enseñanza y aprendizaje de la geometría en secundaria, resumidos por el Grupo de Estudio del Tema 13 bajo el nombre: Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en las Escuelas Secundarias (*Teaching and learning of geometry – secondary level*). Reconocen allí, la influencia de los maestros en los resultados de aprendizaje que pueden adquirir sus estudiantes. Dentro de las áreas de estudio de este grupo, se encuentra el desarrollo del conocimiento del maestro tanto en el contenido como en lo didáctico y en este se menciona la adopción uniforme de las teorías sobre el conocimiento del profesor, tanto la del Conocimiento Pedagógico del Contenido (*Pedagogical Content Knowledge – PCK*) presentado por Shulman (1986; 1987), como el desarrollo posterior del llamado “conocimiento para la enseñanza de la matemática” (*Mathematical Knowledge for Teaching – MKT*) propuesto por Ball y colaboradores (Ball et al., 2001; Ball et al., 2008). Se reconoce y se hace énfasis en que los profesores deben desarrollar conocimientos matemáticos y didácticos, mientras que en el ámbito de la investigación se requiere de modelos con los que caracterizar dichos conocimientos (Hill et al., 2008; Rowland et al., 2005; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Shulman, 1986).

Asimismo, en el Grupo de Estudio del Tema 46 del ICME-14 (2021): Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría en las Escuelas Secundarias (*Teaching and learning of geometry at secondary level*), fueron estudiados temas centrales sobre conocimiento del profesor en el área de geometría, con el fin de promover la discusión de preguntas y problemas significativos que dieron mérito para ser atendidos por diferentes investigadores, matemáticos, formadores de docentes y profesores de matemáticas. Los temas fueron: (a) temas curriculares en geometría escolar, incluyendo iniciativas de reforma en geometría escolar y nuevas formas y aplicaciones de la geometría; (b) desarrollos en la enseñanza, incluyendo modelado geométrico y resolución de problemas fuera de la escuela; (c) conexiones entre la educación en geometría y las prácticas y procesos matemáticos tales como argumentación y prueba, visualización, figuración e instrumentación; (e) formación docente y conocimiento docente de geometría en el nivel secundario.

En este sentido, se pone de manifiesto la variedad de factores que deben ser considerados para llevar a cabo una enseñanza efectiva de la geometría en el nivel de secundaria. Sin embargo, los contenidos curriculares y la aplicación contextual de los conocimientos geométricos son solo algunos de los elementos que intervienen en el desarrollo del conocimiento docente necesario para una instrucción adecuada en geometría.

En el contexto de la enseñanza de la geometría en la educación media, y de acuerdo a lo encontrado en la literatura reciente, se puede inferir que son escasas las investigaciones desarrolladas a nivel nacional centradas en la enseñanza de las cónicas (Bonilla et al., 2014; Garzón, 2020) y más aún, sobre el conocimiento profesional del profesor de matemáticas para enseñar las cónicas. Este contexto, lo fundamentan los lineamientos curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional para este nivel educativo (MEN, 1998, p. 40) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006, p. 88) y poco se ha prestado

atención a su investigación, en los términos de su enseñanza (Sánchez et al., 2024). Estas investigaciones (Bonilla et al., 2014; Garzón, 2020), muestran la brecha que hay entre la teoría matemática y su aplicación en campos como la física, la ingeniería, la astronomía, entre otras; lo que ocasiona en los estudiantes poco interés en lo que están aprendiendo. Su enseñanza a través de la geometría analítica y sus respectivas ecuaciones cartesianas por parte del profesor, pueden llevar al estudiante, a una comprensión superficial y procedimental que los aleja de la interpretación y significado más profundo como lugar geométrico y por ende, a la solución de problemas que se relacionan.

En función de lo expuesto hasta ahora, se reconoce que el conocimiento del profesor en esta área es esencial pero complejo. Este abarca no solo el desarrollo del conocimiento matemático (en nuestro caso, geométrico), sino también la comprensión de cómo los estudiantes aprenden sobre las cónicas, los errores y dificultades que enfrentan, y el uso de los medios y recursos más adecuados. Además, incluye la capacidad de desarrollar clases participativas que fomenten la construcción del conocimiento, el conocimiento del currículo, y la formulación de situaciones problema auténticas y contextualizadas que resulten de interés para los estudiantes.

Con base en lo anterior, consideramos que, para enseñar geometría a partir de estos propósitos, es necesario el desarrollo del conocimiento profesional del profesor desde sus prácticas de aula, su conocimiento matemático y el uso de recursos, con una mirada progresiva hacia el aprendizaje con significado, creada a partir de una selección de criterios o normas de actuación preferente sobre qué matemáticas se deberían enseñar y cómo, según los contextos, circunstancias y personas implicadas (Godino et al., 2021).

1.4 Preguntas de investigación (PI)

Desde una perspectiva general, en relación con la problemática de qué matemáticas enseñar y cómo hacerlo de manera apropiada, Godino y colaboradores proponen que es necesario responder a la siguiente pregunta (Godino et al., 2019):

¿Qué conocimientos y competencias deberían tener los profesores para optimizar el aprendizaje en los procesos de instrucción en matemáticas?

Así, con base en la problemática expuesta sobre la necesidad de desarrollar el conocimiento didáctico-matemático del profesor, en el ámbito de la enseñanza y aprendizaje de la geometría, en función de la interrogante antes formulada, nuestra pregunta de investigación se enuncia de la siguiente manera:

PI1: ¿Cómo desarrollar el conocimiento y competencias profesionales del profesor, con el fin de contribuir a la mejora de los procesos de instrucción en torno a las cónicas, en la educación media?

Para responder a esta pregunta será necesario dar respuesta a estas otras:

PI2: ¿Cuál es el conocimiento y competencias profesionales del profesor de matemáticas que, teniendo en cuenta el estado actual de las investigaciones en didáctica de la geometría, deberían tener los profesores para una gestión idónea de los aprendizajes de sus estudiantes de las nociones en torno a las cónicas?

PI3: ¿Cómo explorar el conocimiento y las competencias profesionales del profesor de matemáticas, dirigido a gestionar de manera idónea los aprendizajes de sus estudiantes en torno a las cónicas?

Las acciones a realizar, para responder a estas preguntas, van en orden inverso a como se han formulado. Comenzaremos por realizar una búsqueda sistemática de información en fuentes y bases bibliográficas que nos permita aproximarnos, desde una perspectiva teórica, a cuál es ese

conocimiento y con qué herramientas se cuenta para su estudio y posible desarrollo. La información que se recabe se utilizará como referente para la realización de dos acciones principales: (a) Diseño, validación y aplicación de un instrumento que permita determinar conocimientos y competencias profesionales de profesores de matemáticas en servicio y (b) Diseño y aplicación de un programa de formación de profesores en servicio con el fin de desarrollar esos conocimientos y competencias. En este orden de ideas, el trabajo a realizar pretende el logro de los objetivos que se formulan a continuación.

1.5 Objetivos

1.5.1 Objetivo General

OG: Desarrollar conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas, en torno a la enseñanza de las cónicas en los grados de la educación media, por medio de su participación en un taller de formación para el desarrollo del conocimiento profesional, basado en el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor.

1.5.2 Objetivos específicos

Para lograr el objetivo general propuesto, y dar respuesta a las preguntas de investigación antes referidas, se plantean los siguientes objetivos específicos (OE).

OE1. Determinar tendencias y posibles avances en la investigación sobre el desarrollo del conocimiento profesional del profesor de geometría en los niveles de educación media.

OE2. Identificar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos del profesor, en torno a geometría y específicamente a las cónicas, en el contexto del diseño y validación de un instrumento dirigido a la valoración de esos conocimientos y competencias.

OE3. Determinar posibles carencias de conocimientos y competencias didáctico-matemático de profesores de matemáticas en servicio, relativos a las cónicas, por medio de la aplicación del instrumento referido en el objetivo OE2.

OE4. Incrementar conocimientos y competencias del profesor por medio de su participación en un taller de formación profesional sobre la enseñanza y aprendizaje de las cónicas en los grados de la educación media.

OE5. Identificar los efectos del desarrollo de un taller de formación profesional sobre el conocimiento y las competencias del profesor en el área de geometría en los grados de la educación media.

1.6 Pertinencia de la investigación

La investigación de la cual se informa en este documento tiene como intención principal, estudiar el desarrollo del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, el cual, desde la perspectiva teórica del enfoque ontosemiótico de la instrucción y de los conocimientos matemáticos (EOS), se refiere al desarrollo de conocimientos y competencias profesionales del profesor de matemáticas. En el caso particular de este trabajo, ese conocimiento y competencia se circunscribe a la enseñanza de la geometría en la educación media.

En este estudio se intentará analizar las relaciones que hay entre los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos iniciales de un grupo de profesores y los provocados por medio del desarrollo de un taller de formación de profesores, teniendo como sustrato la geometría escolar.

El alcance real de este trabajo se sitúa en los profesores de matemáticas en servicio del municipio de Pereira, quienes recibirán a través de la implementación del taller, un conjunto de herramientas que puedan enriquecer su práctica docente. De manera potencial, los hallazgos

podrán extenderse a programas de formación inicial y de posgrado, favoreciendo la construcción de cursos y/o talleres basados en la evidencia que esta investigación pueda aportar.

La relevancia académica se encuentra en la generación de conocimiento nuevo sobre la articulación de saberes didáctico-matemáticos en la formación docente, aportando evidencia para el diseño de nuevos programas de formación más integrados en lo didáctico y matemático. A nivel social, al identificar, analizar y reflexionar sobre esas relaciones didáctico-matemáticas, permitirá fundamentar propuestas para una enseñanza pertinente de la geometría en los grados de la educación media, logrando con ello un posible avance en la mejora de la actividad docente y en el fortalecimiento de conocimientos y competencias matemáticas sustentadas en la literatura especializada.

Este trabajo aporta al campo de la investigación en la formación de profesores al mostrar cómo se puede diagnosticar, analizar, diseñar y evaluar experiencias formativas que atiendan al desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de los docentes. Con lo cual, se abren posibilidades para la producción y aplicación de propuestas didácticas replicables y transferibles tanto en el contexto nacional como en escenarios internacionales de formación docente. Asimismo, la posibilidad de aportar un instrumento validado para realizar tales diagnósticos se considera una aportación importante al ámbito de la investigación en Educación Matemática.

CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES

2.1 Introducción

En esta tesis doctoral se abordan dos categorías conceptuales fundamentales: (1) el conocimiento del profesor de matemáticas y (2) la enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación media. Se busca lograr un estado (de condiciones epistémicas) para diseñar e implementar procedimientos de formación que desarrollen el conocimiento y la competencia profesional de los docentes en la enseñanza de la geometría, enfocado específicamente en las cónicas.

En este capítulo se describen los aspectos más relevantes de varios trabajos de investigación realizados sobre estas dos categorías fundamentales. Estos trabajos nos presentan una visión del estado del arte en el tema de esta tesis: el conocimiento y la competencia profesional del profesor para enseñar geometría en educación media.

En relación con la primera categoría, el conocimiento del profesor de matemáticas, se mostrará una síntesis teórica de los modelos de conocimiento del profesor. A continuación, se expondrán algunos estudios que han realizado aportaciones sobre el Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas (CPPM) en la enseñanza de la geometría. Finalmente, se concluirá con algunas reflexiones derivadas del análisis de estos estudios.

En relación con la segunda categoría, la enseñanza y aprendizaje de la geometría en educación media, se comenzará con una revisión de su faceta ecológica que se refiere, en parte, a las políticas educativas nacionales colombianas, que respaldan la inclusión y la importancia de la enseñanza y aprendizaje de las cónicas en los últimos grados de la educación secundaria (décimo y undécimo). Posteriormente, se centrará la atención en las investigaciones realizadas en torno a

la enseñanza y aprendizaje de las cónicas (elipse, hipérbola, parábola, circunferencia), atendiendo a las facetas cognitivo-afectiva y mediacional-interaccional. Primero, se examinarán los estudios realizados sobre el aprendizaje del estudiantado (lo cognitivo-afectivo) y, luego, se analizarán los resultados de trabajos desarrollados con profesores como enseñantes de las cónicas (lo mediacional-interaccional), tanto a nivel nacional como internacional.

La revisión de la literatura desarrollada en este capítulo, que constituye el estudio de los antecedentes básicos en torno a las categorías conceptuales antes referidas, se realiza tomando en cuenta los trabajos de investigación publicados básicamente en cuatro sistemas de información que: (a) indizan las revistas de impacto en el ámbito científico-académico (Scopus, Web of Science) (Zhu y Liu, 2020), (b) dedicada exclusivamente al campo de la educación (ERIC: Education Resources Information Center) (Robbins, 2001) y (c) de amplia difusión (Google Scholar) (Martín-Martín et al., 2018). Estos sistemas de información fueron utilizados para acceder a los artículos que han tratado la temática antes referida. Es necesario referir, en este caso, que algunos de los resultados mostrados en este capítulo han sido propuestos para su publicación en el artículo titulado: “Tendencias sobre el conocimiento profesional de los profesores de geometría, en la educación básica y media: Una revisión sistemática de la literatura”, de Mora y Rivas (en prensa), donde la autora de este informe de investigación es la autora principal de este artículo.

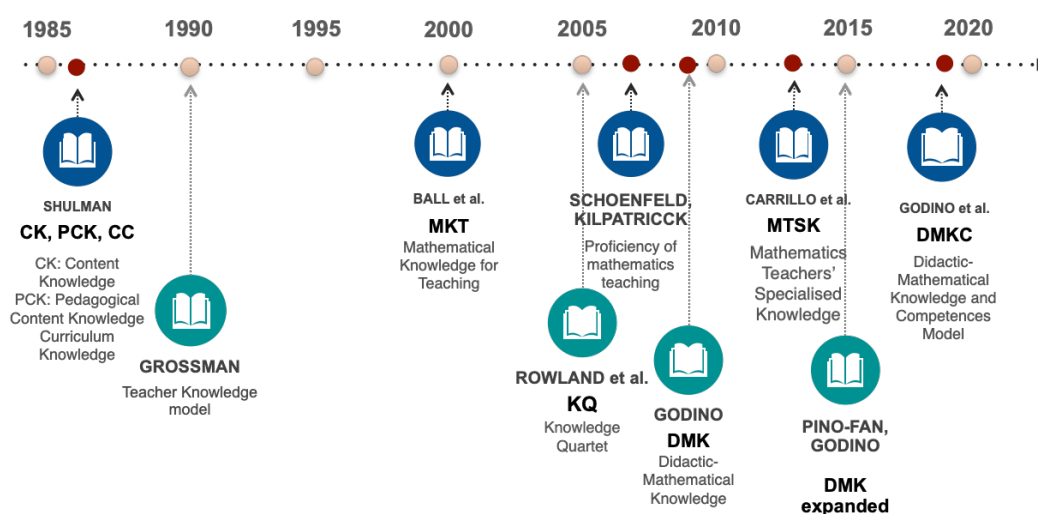
2.2 Antecedentes del conocimiento del profesor de matemáticas

Para el estudio de los antecedentes de lo que hoy se conoce como "conocimiento del profesor de matemáticas", es necesario realizar una revisión bibliográfica en torno a la literatura científico-académica que se ha producido sobre este tema. Para ofrecer una visión breve y general sobre el tema, es relevante mencionar los "modelos del conocimiento del profesor". Según la literatura especializada, estos modelos se originan en el estudio de cómo los docentes

comprenden y organizan el conocimiento para la enseñanza. (Ball et al., 2008; Carmona y Climent, 2012; Ribeiro y Carrillo, 2011; Rivas y Godino, 2010; Sosa y Carrillo, 2010), en la propuesta de Shulman (1986) y su contribución desde la propuesta de las tres categorías del conocimiento del profesor: Conocimiento del Contenido (CK: Content Knowledge), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK: Pedagogical Content Knowledge) y Conocimiento Curricular (Curriculum Knowledge).

Los estudios sobre el conocimiento del profesor estarán centrados en los "modelos del conocimiento del profesor". En la Figura 2.1 se muestra de manera esquemática y cronológica algunos de los más utilizados en el ámbito de la investigación en educación matemática. La consulta al respecto puede hacerse en la bibliografía referida en la Figura 2.1. Se han incluido en el apartado referencias las siguientes: Ball (2000); Ball et al. (2001); Carrillo et al. (2013); Godino (2009); Godino et al. (2017); Hill et al. (2008); Pino-Fan y Godino (2015); Pino-Fan et al. (2022); Rowland et al (2005); Schoenfeld y Kilpatrick (2008); Shulman (1986; 1987); como las principales en la producción de estos modelos.

Figura 2.1 *Algunos modelos del conocimiento del profesor de matemática.*



Fuente: Mora y Rivas (en prensa). p. 8

2.2.1 *La propuesta de Shulman sobre el Conocimiento del Profesor*

La principal contribución de Shulman (1986) al conocimiento del profesor, como ha sido antes referido, es su propuesta sobre las categorías de conocimiento. Inicialmente tres: Conocimiento del Contenido (CK: Content Knowledge), Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK: Pedagogical Content Knowledge) y Conocimiento Curricular (Curriculum Knowledge), siendo la del PCK la más novedosa y avanzada, en la que propone la existencia de una forma de conocimiento que consiste en una simbiosis del conocimiento pedagógico y el conocimiento del contenido, en nuestro caso del matemático. Shulman (1987) amplía su propuesta a siete categorías llamadas “categorías del conocimiento base”, considerando como fuentes principales la formación académica, los materiales y contexto, los fenómenos socio culturales y el saber de la disciplina. Luego, la propuesta de Shulman se constituye en el fundamento de todos los modelos de conocimiento del profesor que se han producido hasta la actualidad.

Posterior al trabajo de Shulman (1987), y teniendo en cuenta su modelo, Grossman (1990) propone el “modelo del conocimiento del profesor” a partir de cuatro componentes principales tomados de las categorías propuestas por Shulman: (1) Conocimiento de la comprensión de los estudiantes, (2) Conocimiento de los materiales curriculares y medios de enseñanza, (3) Estrategias didácticas y procesos instructivos, (4) Conocimiento de los propósitos o fines de la enseñanza de la disciplina. Así como el modelo de Grossman (1990) se basa en las categorías del conocimiento del profesor propuestas por Shulman (1987), los demás modelos que se han generado hasta la actualidad han partido de la propuesta de este autor.

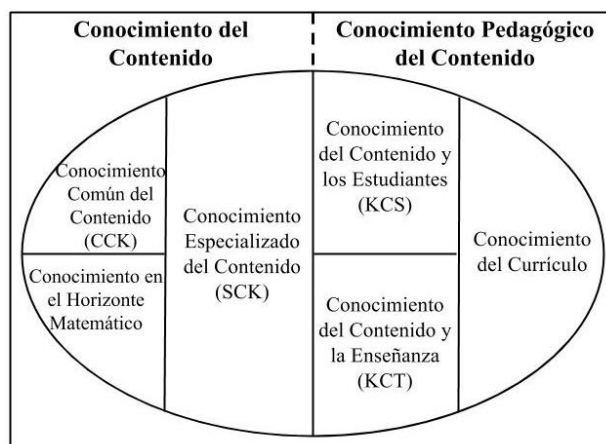
2.2.2 *Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (MKT: Mathematical Knowledge for Teaching)*

Después del “modelo de conocimiento del profesor”, se desarrolla uno de los modelos más influyentes en este campo bajo la dirección de Deborah Ball (Ball, 2000; Ball et al., 2001; Ball et al., 2005; Ball, Thames y Phelps, 2008; Hill et al., 2004; Hill et al., 2008), esto es el “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (MKT: Mathematical Knowledge for Teaching), sus componentes se pueden observar en la Figura 2.2.

Paralelamente a los trabajos de Ball y colaboradores, se destacan la propuesta de Rowland, Huckstep y Thwaites (2005) sobre el “Cuarteto del Conocimiento” (KQ: Knowledge Quartet) y los desarrollados por Schoenfeld y Kilpatrick (2008) sobre la “Proficiencia en la Enseñanza de las Matemáticas” (Proficiency in Teaching Mathematics).

En el ámbito hispano, existen al menos dos modelos muy difundidos sobre el carácter especializado del conocimiento del profesor de matemáticas, estos modelos son “Conocimiento Didáctico Matemático del profesor” (DMK: Didactic-Mathematical Knowledge), (Godino, 2009) y el “Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (MTSK: Mathematics Teachers’ Specialised Knowledge), (Carrillo et al. 2018).

Figura 2.2 *Modelo del MKT (Mathematical Knowledge for Teaching).*



Fuente: adaptado de lo propuesto por Hill et al. (2008).

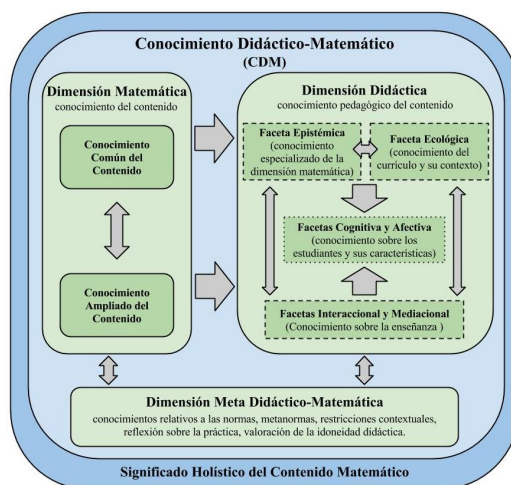
El MKT se ha definido como “el conocimiento matemático que utiliza el profesor en el aula para producir instrucción y crecimiento en el alumno” (Hill et al., 2008, p. 374).

Conformado por dos categorías, las cuales cada una de ellas, se subdivide en otras categorías: 1) conocimiento del contenido, formado por el conocimiento común, conocimiento especializado y conocimiento en el horizonte matemático, y 2) conocimiento pedagógico del contenido, formado por el conocimiento del contenido y los estudiantes, conocimiento del contenido y la enseñanza y conocimiento del currículo. En el capítulo anterior, se describió con más detalle este modelo.

2.2.3 Conocimiento Didáctico Matemático del profesor (DMK: Didactic-Mathematical Knowledge)

Godino (2009, p. 19) señala la utilidad de disponer de modelos que permitan realizar análisis más detallados de cada uno de los tipos de conocimiento y la integración de ellos, esto es los propuestos por Ball et al. (2008), Hill et al. (2008), Schoenfeld y Kilpatrick (2008), Shulman (1986, 1987), entre otros. De esta forma, el modelo propuesto por Godino (2009), articula los modelos desarrollados hasta ese momento y propone el modelo llamado Conocimiento Didáctico-Matemático del Profesor (CDM). En un trabajo posterior, Pino-Fan y Godino (2015), presentan un avance sobre esa articulación del CDM con otros modelos. Un esquema en el que se puede observar esa articulación, de las dimensiones y componentes del CDM con otros modelos, propuesta por Godino y colaboradores, se presenta en la Figura 2.3.

Figura 2.3 Dimensiones y componentes del CDM y sus relaciones con otros modelos.



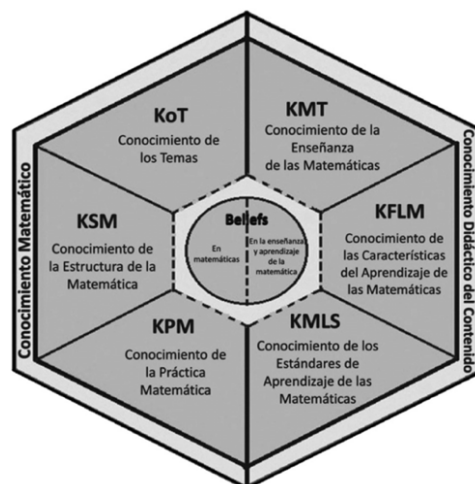
Fuente: Pino-Fan y Godino (2015, p. 98)

2.2.4 *Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas” (MTSK: Mathematics Teachers’ Specialised Knowledge)*

Por su parte, Carrillo et al. (2013), presentan un modelo enfocado en el “conocimiento especializado del profesor de matemáticas” (MTSK: Mathematics Teachers’ Specialised Knowledge), desde otra perspectiva, esto es, para tomar distancia de la idea de conocimiento matemático para la enseñanza y pensando mejor en un conocimiento del profesor, el cual tenga sentido para él, definiendo “especializado” a todo el conocimiento que se debe considerar de una disciplina. El MTSK se diferencia de los conocimientos pedagógicos generales, los conocimientos especializados de los profesores de otras disciplinas y de los conocimientos especializados de otros profesionales de las matemáticas. En otras palabras, está específicamente enfocado en la enseñanza de las matemáticas. Una representación en la que se puede observar la organización del modelo propuesto por Carrillo y colaboradores se presenta en la Figura 2.4. Posteriormente, a partir del análisis de prácticas realizadas por profesores en servicio y en formación, surge el Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del Profesor (CCDM) (DMKC: Didactic-Mathematical Knowledge and Competences Model) (Font

et al., 2018; Godino et al., 2018; Pino-Fan et al., 2022). Este modelo se utilizará como base teórica para el desarrollo de las acciones en nuestra investigación.

Figura 2.4 *Modelo MTSK: Mathematics Teachers' Specialised Knowledge.*



Fuente: adaptado de lo propuesto por Carrillo et al. (2018, p. 6).

2.3 Modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor (CCDM)

Si bien el modelo MTSK provee de una estructura sobre el conocimiento especializado del profesor, en el que se reconocen diferentes tipos de conocimiento asociados al quehacer docente, la propuesta de Godino y colaboradores sobre el conocimiento del profesor parece más apropiada, en función de las herramientas propuestas, las cuales integran las aportaciones realizadas en este ámbito y permiten el desarrollo de un trabajo real, práctico y concreto en este ámbito del conocimiento científico y académico. De acuerdo con estas condiciones se considera apropiada la selección del modelo CCDM para el desarrollo del estudio que aquí se propone.

2.3.1 Algunos estudios sobre el Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas (CPPM) en la enseñanza de la geometría.

Desde la perspectiva adoptada en este trabajo, el CPPM en la enseñanza de la geometría, se interpreta como la idea común que surge al considerar diferentes planteamientos que tienen

como objeto su estudio (pedagógico del contenido o necesario para enseñar matemática o didáctico-matemático o especializado...), siendo el contenido matemático el referido a la geometría (Mora y Rivas, en prensa). Se entiende el conocimiento como la amplia red de conceptos, procedimientos, representaciones, propiedades, argumentaciones y habilidades inteligentes que posee el ser humano o que forma parte del patrimonio histórico-cultural de una sociedad, el cual puede ser adquirido por medio de la práctica individual o en interacción con otros, en diversos contextos.

En la revisión de la literatura, desarrollada en torno al CPPM, se analizaron detalladamente 40 artículos de investigación sobre el conocimiento del profesor de matemáticas para la enseñanza de la geometría en los niveles de educación básica y media. Estos estudios fueron identificados en las bases de datos ERIC, Google Scholar, Scopus y Web of Science, como se refirió antes, cubriendo un periodo de diez años. Los análisis realizados permitieron la caracterización de estas investigaciones, refinando la selección a un conjunto de 9 artículos científicos, los cuales se realizaron con profesores en formación inicial o en servicio (Mora y Rivas, en prensa).

2.3.2 Conclusiones respecto a los antecedentes sobre el CPPM

Entre algunas de las conclusiones generales a partir del análisis de los 40 artículos referidos en el apartado anterior y reportados en Mora y Rivas (en prensa), se encuentran las siguientes:

(a) Existe una tendencia de investigaciones centradas en profesores en formación inicial en comparación con aquellos que ya están ejerciendo la docencia. Esta disparidad posiblemente se deba a que la finalidad de estos estudios es proponer mejoras en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas durante la preparación para la docencia. (b) La mayoría de las

investigaciones se basan en el uso de algún modelo de conocimiento reciente, aunque también se identifican estudios que no hacen referencia a ninguno de ellos para el estudio del conocimiento del profesor de matemáticas.

Este panorama sugiere que los diversos modelos presentes en la literatura actual sobre el conocimiento profesional del profesor permiten el desarrollo de diversas investigaciones y el fortalecimiento de programas de formación continua. En cuanto a la diversidad de modelos de conocimiento del profesor identificados, resaltan la propuesta de Godino y Colaboradores (Godino, 2009; Godino et al., 2017; Pino-Fan y Godino, 2015), los cuales sugieren la articulación de modelos existentes y de esta forma la creación de modelos más completos.

En relación con las tendencias y posibles avances presentados en los resultados de las investigaciones sobre el desarrollo del conocimiento profesional del profesor de geometría, se encontró la necesidad de la creación de programas de formación tanto para los profesores en formación, como para los que están en el ejercicio docente, fomentando, además, del desarrollo de competencias propias de la disciplina, recursos para su enseñanza y, por ende, la posibilidad de generar una construcción de conocimiento por parte de los estudiantes. En relación con las bases de conocimiento matemático y geométrico, destacan los estudios que, a partir de su análisis, concluyen que los profesores presentan una formación limitada, lo cual genera inseguridad en sus prácticas de enseñanza (Ng, 2012; Sunzuma y Maharaj, 2019). Fernandes-Maia-Pereira y Keyber (2022), por ejemplo, proponen la utilización de herramientas de análisis específicas, respaldadas por marcos teórico-metodológicos que permitan evaluar el conocimiento y las competencias de los profesores de matemáticas.

A continuación, se presentan las síntesis de los nueve estudios encontrados, producto del análisis realizado.

Esendemir y Bindak (2019) y Ng (2012) presentaron los resultados relativos a la validez y fiabilidad de un instrumento para medir el Conocimiento Matemático necesario para Enseñar Geometría (MKT-Geometry), traducido del inglés al indonesio y el turco para ser aplicados en estos dos contextos respectivamente. En ambos artículos se discutió en torno a aspectos culturales, lingüísticos y matemáticos que se manifestaron en el proceso de producción de los instrumentos adaptados. Los resultados de los análisis psicométricos realizados a estas dos versiones del instrumento permitieron concluir a los autores, sobre los elevados niveles de validez y fiabilidad de estas, por lo que recomendaron su uso en los contextos referidos, respectivamente.

Stupel y Ben-Chaim (2017) realizan un estudio con Profesores en Formación Inicial de secundaria, en adelante, (PFI) y Profesores en Servicio de primaria, en adelante (PS), con el fin de determinar los efectos de la resolución de problemas con múltiples soluciones. Los resultados indican que los PFI y los PS reconocieron que resolver problemas que tengan múltiples soluciones es muy valioso para desarrollar la capacidad de pensamiento, razonamiento y creatividad no solo en sus (futuros) estudiantes, sino además en ellos mismos. En consecuencia, se propone incluir el uso de problemas con múltiples soluciones en la formación de profesores. Sunzuma y Maharaj (2019) realizan un estudio en el que indagan sobre cómo fue realizada la capacitación en geometría de 40 PS, durante su formación inicial. Los resultados obtenidos no son concluyentes. Casi la mitad (52,5%) afirman haber recibido una formación adecuada en cuanto al contenido geométrico, los métodos de enseñanza utilizados y los recursos puestos en juego. Mientras la otra parte (47,5%) señalan no haber recibido una formación adecuada en estos aspectos. En tal sentido, se llama la atención sobre la necesidad de mejorar los procesos de formación inicial de profesores en geometría en lo relativo al contenido, la metodología docente y los recursos utilizados.

Kurt-Birela et al. (2020) realizaron un estudio con el fin de determinar el conocimiento geométrico y pedagógico del contenido de PS de educación básica-primaria, por medio de la realización de un taller de formación y la aplicación de una prueba. Observaron conocimiento geométrico débil y más débil aún el conocimiento pedagógico del contenido de los PS. Concluyen que los programas de formación de profesores deberían incluir sesiones adicionales con el fin de mejorar ambos tipos de conocimiento.

Sunzuma et al. (2020) realizan un estudio con 91 profesores en servicio, de diferentes institutos de educación secundaria, a quienes aplicaron un cuestionario y una entrevista (a cinco de los 91, intencionalmente seleccionados), sobre sus opiniones en torno a la utilidad que tiene el uso de diagramas (representaciones gráficas) en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Las opiniones emitidas por los docentes en torno al uso de diagramas son predominantemente positivas, alertando sobre algunos aspectos negativos que se pueden manifestar con el uso inadecuado de los diagramas en la enseñanza y aprendizaje de la geometría.

Leton et al. (2020) presentan un estudio exploratorio con el fin de describir el desempeño de docentes de educación primaria en la comprensión de los conceptos de triángulo y cuadrado. Aplicaron entrevistas a 33 PS y observaron que los participantes mostraron falta de comprensión de algunos conceptos de objetos bidimensionales y de las habilidades aritméticas necesarias. No obstante, mostraron diversas percepciones sobre estos conceptos basados en su experiencia docente en matemáticas. En consecuencia, recomiendan la participación de los maestros en programas de actualización sobre el contenido matemático (geométrico) y los medios didácticos apropiados para su enseñanza.

Gambini y Lénart (2021), elaboran una propuesta dirigida a PFI y PS, se ilustra mediante un artefacto específico, las esferas de Lénart. Estas esferas sirven como herramienta para la discusión y reflexión sobre la práctica de enseñanza de objetos geométricos, así como para

establecer vínculos entre el Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK) y el Conocimiento del Contenido Matemático (MCK). En sus conclusiones, resaltan la importancia del formador de profesores en facilitar la transición desde el dominio del contenido hasta la adquisición del conocimiento pedagógico esencial para la enseñanza.

Fernandes-Maia-Pereira y Kaiber (2022), presentan los resultados de la aplicación de una secuencia de 24 actividades, dirigidas a la adquisición y desarrollo de conocimiento geométrico de estudiantes de primaria, en cuya elaboración participaron seis PS. La aplicación la hacen 48 PFI y se valora su puesta en práctica por medio de la herramienta de “Idoneidad Didáctica”. El análisis realizado permite observar una alta adecuación de las facetas epistémica, cognitiva-afectiva, interaccional-mediacional y ecológica de las secuencias implementadas. Sobre la base de estos resultados, concluyen sobre la necesidad de desarrollar la formación de PFI y PS, haciendo uso de herramientas teórico-metodológicas como el estudio de la idoneidad didáctica de procesos instruccionales, que les permitan avanzar en el desarrollo de su conocimiento y competencias didáctico-matemático.

Sobre la base de los resultados de estos estudios, se concluye sobre: (a) es esencial continuar investigando sobre el conocimiento profesional de los profesores de matemáticas y la mejora de la calidad de la enseñanza de la geometría en los niveles de educación básica y media; (b) la necesidad de mejorar los procesos de formación inicial de los profesores en relación con el contenido geométrico, la metodología de enseñanza, los recursos utilizados, las representaciones y el uso de problemas con múltiples soluciones; (c) es necesario fortalecer tanto el conocimiento del contenido como el conocimiento pedagógico del contenido; (d) se reconoce la necesidad de implementar programas de actualización para profesores en servicio o, en su defecto, sesiones adicionales durante su formación inicial, encaminados al desarrollo de estos conocimientos; y (e)

se recomienda que en tal formación se empleen herramientas teórico-metodológicas que permitan a los profesores, evaluar su propio progreso en el desarrollo de su conocimiento profesional.

Estas conclusiones han servido de soporte para el desarrollo del presente informe de investigación, en la que cada una de ellas ha motivado la realización de acciones encaminadas a la mejora del CPPM atendiendo a las necesidades, reconocimientos y recomendaciones emanadas del estudio realizado de las investigaciones antes referidas.

2.4 Antecedentes en torno a la formación de profesores en cónicas

A partir de una revisión bibliográfica en algunos de los sistemas de información como Scopus, Web of Science y Google Scholar y usando las palabras clave: profesor en formación cónicas, teacher education conics, se logró obtener información sobre algunos estudios realizados en formación de profesores, donde el objeto de estudio son las cónicas. A continuación, se presentan los resultados de estos estudios.

Sobre las investigaciones desarrolladas en función del estudio de la enseñanza de las cónicas a nivel nacional y con profesores en formación, se encuentra la realizada en Colombia por Valbuena-Duarte et al. (2021) quienes diseñaron una intervención didáctica tecnológica para el estudio de secciones cónicas. Su principal objetivo fue identificar, analizar y caracterizar registros semióticos (Duval, 1998) de secciones cónicas por parte de los profesores. El recurso sirvió como mediador para el estudio de las cónicas y la adquisición de nuevos conocimientos, permitiendo la movilización de conocimientos matemáticos desde diferentes perspectivas. La investigación mostró la importancia de incorporar la tecnología en la educación y la necesidad de que los docentes estén bien capacitados en el uso de recursos digitales para una enseñanza eficaz.

Los resultados de esta investigación destacan la importancia de una formación integral para los futuros profesores de matemáticas a fin de equiparlos mejor para enseñar en un entorno educativo moderno impulsado por la tecnología.

Desde la investigación a nivel internacional, Benito (2019) desarrolló su investigación en la formación inicial de profesores de matemáticas (Universidad Federal de Sergipe, Brasil) enfocándose en la enseñanza de las cónicas. El objetivo de su estudio fue investigar cómo el dispositivo “Recorrido de Estudio e Investigación para la Formación de profesores” podía ayudar a este grupo de profesores a cuestionar, analizar, diseñar y experimentar procesos de enseñanza relacionado con las cónicas. La planificación de una propuesta didáctica y su intervención, logró contribuir de manera positiva en la formación de los futuros profesores, ayudando de esta manera a la planificación de las actividades de los profesores en su formación inicial y una reformulación del modelo utilizado.

Cruz y Gamboa (2020), estudian la importancia de los medios de enseñanza en el proceso de aprendizaje de la geometría, en especial de las secciones cónicas y superficies cuadráticas, en la formación de profesores de matemática. En su investigación, evaluaron el tratamiento de los medios de enseñanza utilizando como indicadores, la contribución al cumplimiento de objetivos, su relación con los conceptos estudiados, lo actualizado de los medios y la importancia que se le da a la interacción entre estudiantes y profesores. En sus resultados iniciales encontraron que los medios tradicionales eran protagonistas y no fomentaban la participación de los estudiantes.

En su tesis doctoral, Bravo (2023) se planteó como primer objetivo, investigar y documentar las concepciones y conocimientos de los profesores de bachillerato que imparten Geometría Analítica respecto a la excentricidad de las cónicas. Como segundo objetivo, se planteó fortalecer e incrementar el conocimiento matemático de los profesores sobre este objeto matemático y a partir del uso del software GeoGebra. Sus resultados muestran que la enseñanza de las cónicas por parte de los profesores participantes se reduce a la manipulación de expresiones algebraicas carentes de análisis. Menciona, además, la falta de programas de capacitación docente que permitan al profesor el desarrollo de conocimiento especializado de

contenido matemático. Sugiere el desarrollo de trabajos de investigación que analicen el contenido de los programas de estudio de geometría analítica y donde se presenten nuevas propuestas metodológicas de enseñanza en donde se privilegie el contexto geométrico significativo.

Por su parte, la investigación realizada por Yarihuaman (2023), examinó las principales características de investigación realizadas en estudios de maestría en enseñanza de las matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú en un periodo de seis años a partir del 2014, lo anterior, sobre la enseñanza y aprendizaje de las secciones cónicas. Dentro de los resultados, encontró que hay diversidad de estudios desarrollados en la línea de investigación: Tecnología y visualización en educación matemática, específicamente en el uso del software GeoGebra como herramienta de visualización más popular. Destaca el hecho de que ninguno de estos estudios, reconoce la sección cónica desde la perspectiva del corte de un cono con un plano y/o usa medios manipulativos o concretos como propuesta para la enseñanza de las secciones cónicas.

De lo anterior, se puede inferir que la investigación en formación de profesores en el que el objeto matemático de estudio son las cónicas y su enseñanza en la educación media, es un tema que requiere mayor atención en la investigación científica en educación matemática en Colombia. Además, se requiere de una mejor formación del profesorado (Benito (2019), Bravo (2023)) puesto que los futuros docentes de matemáticas deben estar dotados con las herramientas necesarias para un entorno educativo pleno, lo cual implica la capacidad de integrar nuevos métodos de enseñanza en la formación de profesores, el uso de herramientas, tecnología y enfoques pedagógicos y didácticos innovadores y el conocimiento disciplinar profundo de los profesores de matemáticas en la enseñanza de las cónicas (Yarihuaman, 2023).

2.5 Antecedentes en torno a la enseñanza y aprendizaje de la geometría: las cónicas

De manera similar a como se procedió en el apartado anterior, se realizó una revisión bibliográfica en algunos de los sistemas de información en relación con la enseñanza y aprendizaje de las cónicas en la educación media (grados 10° y 11° en Colombia). A continuación, se presentan los resultados de esta revisión.

Para la presentación de este apartado se ha considerado conveniente organizarlo atendiendo a una adaptación de las facetas propuestas desde el EOS (Godino, 2013) para el estudio de un proceso de formación, reduciéndolas a tres, a saber: faceta ecológica, faceta mediacional-interaccional y faceta cognitiva-afectiva. Se comienza con la faceta ecológica, en la cual se estará refiriendo a los aspectos curriculares en torno a la enseñanza y aprendizaje de las cónicas. En el subapartado siguiente se presenta lo relativo a las facetas mediacional-interaccional o lo relacionado con la enseñanza como acción del profesor con sus estudiantes y, en el subsiguiente lo relativo a las facetas cognitiva-afectiva o al aprendizaje de los estudiantes.

2.5.1 *Faceta ecológica*

El sistema educativo nacional colombiano, está conformado entre otros, por el nivel de educación media el cual se compone de dos grados, el décimo (10) y el undécimo (11), los cuáles según el art. 27 de la ley 115 de 1994, tiene como fin, la comprensión de las ideas y valores universales y la preparación para el ingreso del educando a la educación superior y al trabajo. Dentro de las áreas fundamentales y obligatorias contenida en el plan de estudios está la matemática, la cual, según los estándares básicos de competencias en matemáticas, el conocimiento matemático contempla el conocimiento conceptual y el conocimiento procedimental. El primero, se caracteriza por ser un conocimiento teórico, que surge de la actividad cognitiva y relaciona otros conocimientos; se asocia al saber qué y el saber por qué. En

cuanto al procedimental, se relaciona con las técnicas y estrategias para representar los conceptos y transformarlos; ayuda a la construcción y refinamiento del conocimiento conceptual, por lo que está asociado al saber cómo. En general, la educación matemática en Colombia se aproxima a una interpretación de lo que es ser matemáticamente competente, a partir de estos dos tipos de conocimiento y su relación con el saber qué, saber qué hacer y saber cómo, cuándo y por qué hacerlo (MEN, 2006, p. 50). Esta definición se concreta en cinco procesos generales de la actividad matemática (MEN, 2006, pp. 51-55), los cuales se desarrollan en el discernimiento de cinco tipos de pensamiento derivados del pensamiento lógico y matemático. Según los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (MEN, 1998), estos se subdividen en: pensamiento numérico, pensamiento espacial, pensamiento métrico, pensamiento aleatorio y pensamiento variacional.

De este modo, considerando los procesos generales, los conceptos y procedimientos matemáticos, así como los contextos (inmediato, escolar y sociocultural), y analizando el pensamiento matemático que es materia de interés para esta investigación, se puede decir que el estudio de las propiedades geométricas de las figuras cónicas, constituyen lo que es para el sistema educativo, el desarrollo del pensamiento espacial y los sistemas geométricos en los grados de la educación media (10° y 11°), teniendo en cuenta para ello, el proceso de su enseñanza-aprendizaje y la resolución y formulación de problemas que se relacionan con otras ciencias. Las consideraciones curriculares centran su interés en tres estándares del pensamiento espacial y los sistemas geométricos (MEN, 2006, p. 58):

1. Identifico en forma visual, gráfica y algebraica algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

2. Identifico características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
3. Resuelvo problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.

Estos estándares determinan una ruta a transitar, una ecología en la que se deben realizar acciones encaminadas al logro de estos.

En este orden de ideas, la reflexión, en función de la consecución de lo curricularmente propuesto, se dirige hacia la pregunta: ¿qué acciones están haciendo o han hecho las instituciones y los agentes involucrados en logro de estos estándares? Más específicamente, y de acuerdo con las posibilidades de acceso a la información al respecto, se tendría que preguntar ¿qué aportes se han realizado por la comunidad académica y de investigación científica en educación, sobre el logro de estos estándares? Más aun, para tener una panorámica general sobre tales posibles aportaciones, se tratará en el resto de este capítulo de presentar los resultados de una búsqueda de información referida a las contribuciones realizadas sobre la enseñanza y el aprendizaje de las cónicas, en estos niveles, en estudios recientes. Se hará referencia a las investigaciones realizadas sobre las cónicas, separadas en dos grupos: primero las que han tenido como objeto de estudio principal las acciones de enseñanza y segundo, las que han tenido como objeto principal de estudio el aprendizaje.

2.5.2 Faceta mediacional-interaccional en el estudio de las cónicas

El trabajo realizado en Colombia por Pérez (2012) fue un estudio con estudiantes que cursaban grado décimo (10º). Su investigación se centró en la elaboración y aplicación de una planeación en torno al estudio de las secciones cónicas. Este estudio permitió a los investigadores

concluir que los profesores tuvieron la oportunidad de explorar nuevos recursos para el aprendizaje, entre ellos, los recursos tecnológicos para la modelación de la geometría.

Por su parte, Santa y Jaramillo (2014) centran su estudio en el concepto de elipse como lugar geométrico mediante el uso del plegado de papel. La investigación consistió en la realización de entrevistas socráticas a estudiantes de una institución pública de Medellín (Colombia), para analizar su nivel de razonamiento y comprensión. El estudio muestra que el método de entrevista socrática le ayudó a los estudiantes, a avanzar en sus niveles de razonamiento y comprensión de conceptos geométricos.

Mesa (2013), enfatiza en los antecedentes históricos de las secciones cónicas y su relevancia en diversos campos, mostrando la importancia de los conceptos geométricos en la educación. A través del estudio de la hipérbola, encontró que se pueden introducir elementos metodológicos que permitan construir una mejor enseñanza-aprendizaje de las cónicas y sugiere que el tema de las secciones cónicas sea más interesante para los estudiantes utilizando tecnología y priorizando sus motivaciones e intereses.

Beltrán (2019), presenta un estudio enfocado en proponer actividades para la enseñanza de secciones cónicas en el contexto de la resolución de problemas. Su objetivo era contribuir al desarrollo de estrategias de enseñanza efectivas que integren enfoques de resolución de problemas y utilicen una variedad de herramientas para mejorar la comprensión de los estudiantes sobre las secciones cónicas. Esta investigación enfatiza sobre la importancia de comprender las secciones cónicas no solo algebraicamente sino también geométricamente, destacando la necesidad de un enfoque integral en la enseñanza de estos conceptos matemáticos desde las perspectivas geométrica y algebraica al enseñar secciones cónicas.

A nivel internacional, Chen (2013) analiza el diseño creativo en la enseñanza de secciones cónicas en geometría y la aplicación del modelo de Aprendizaje Basado en Problemas (ABP). El

objetivo de su investigación era mejorar la enseñanza de la geometría en los estudiantes. Destaca los desafíos que enfrentan los profesores de matemáticas para involucrar a los estudiantes con conceptos matemáticos complejos, como las secciones cónicas y resalta la importancia de brindar experiencias de aprendizaje interactivo. El estudio analiza las propiedades de reflexión de las secciones cónicas, como elipses, parábolas e hipérbolas y cómo estas propiedades pueden integrarse en proyectos de diseño. Hace énfasis en el papel de los profesores a la hora de facilitar el pensamiento creativo.

Por otro lado, en Chile, Bonilla et al. (2014) llevaron a cabo una investigación con enfoque cognitivo basada en una propuesta didáctica diseñada para la comprensión de las cónicas en estudiantes de 16 a 18 años, equivalente a la educación media en los grados décimo y undécimo. Partiendo del problema de que los estudiantes interpretan las ecuaciones cartesianas, pero no las identifican como un lugar geométrico, los investigadores se plantearon como objetivo, el diseño de una propuesta didáctica que promoviera no solo desde las figuras que las representan o como pares ordenados que satisfacen una ecuación sino, además, como un lugar geométrico.

Asimismo, la investigación de Florio (2022) en Italia, analiza la relación entre las cónicas como lugares geométricos de puntos en un plano y como secciones de un cono, centrándose en la parábola. Florio propone un enfoque didáctico que utiliza elementos históricos para ayudar a los estudiantes a comprender desde la geometría y el álgebra, la transición de una parábola en un plano a una parábola en un cono. Haciendo uso del software de geometría dinámica GeoGebra, ilustra estos conceptos visualmente y ayuda a los estudiantes a entender las relaciones entre las cónicas y sus propiedades geométricas. Usa la teoría de la representación semiótica de Duval (2004) para mejorar la experiencia de aprendizaje de estudiantes y profesores. El artículo concluye con experimentos educativos realizados en la Universidad de Calabria (Italia), que

sugieren que la visión dual (geometría y álgebra) de la parábola mejora la comprensión de los estudiantes en contextos no solo teóricos sino además prácticos.

Li (2022), así como Beltrán (2014) y Chen (2013), analiza estrategias de enseñanza basadas en la resolución de problemas para mejorar la comprensión de operaciones matemáticas, centrándose en la enseñanza de las secciones cónicas en los grados de la educación básica secundaria. El estudio de Li (2022) describe la conexión entre las operaciones matemáticas y la resolución de problemas de secciones cónicas, destacando la necesidad de usar diversos métodos de enseñanza que integren ambos, incluido el análisis de preguntas básicas, el uso de reglas matemáticas y el uso de múltiples formas de resolución.

Por su parte, Dávila et al. (2013) hacen un estudio sobre el diseño y análisis de secuencias didácticas haciendo uso de la Teoría de Representación Semiótica (Duval, 1998, 2006), para identificar las dificultades que presentan los estudiantes al estudiar las cónicas desde la representación algebraica, gráfica y verbal de las cónicas. Resaltan la carencia de una comprensión profunda por parte de los estudiantes, lo cual deriva en dificultades para conectar este concepto con aplicaciones reales. Concluyen que es necesario involucrar actividades que permitan identificar deficiencias en conocimientos fundamentales y fomentar la participación de los estudiantes.

Se puede decir entonces, que las investigaciones sobre la enseñanza de las secciones cónicas revelan la efectividad de diversos enfoques metodológicos, desde la modelación y el uso de tecnología hasta la resolución de problemas y métodos para su resolución. Se destaca la importancia de integrar aplicaciones prácticas y contextos reales para aumentar el interés y la comprensión de los estudiantes y un enfoque integral que combine perspectivas algebraicas, geométricas y contextuales.

Las investigaciones sobre la enseñanza de las secciones cónicas y el papel del profesor de matemáticas resaltan varios aspectos clave para mejorar la educación en matemáticas. En primer lugar, la necesidad de la incorporación de tecnología. Tales son los casos de Valbuena-Duarte et al (2021) y Florio (2022), quienes destacan la importancia de utilizar herramientas digitales como recursos educativos abiertos y software de geometría dinámica (GeoGebra), para facilitar la comprensión de las cónicas, lo cual llama la atención sobre la necesidad de que los docentes estén bien capacitados en el uso de tecnologías educativas.

En segundo lugar, es muy relevante implementar enfoques didácticos innovadores para superar las dificultades en la enseñanza de las cónicas. Valbuena-Duarte et al. (2021) y Dávila et al. (2014), aplican la teoría semiótica de los registros de representación y Florio (2022) utiliza elementos históricos y una visión dual de las parábolas para mejorar la comprensión de los estudiantes.

En resumen, las investigaciones referidas sugieren que, para mejorar la enseñanza de las secciones cónicas, se debe incorporar tecnología, adoptar enfoques pedagógicos diferentes e innovadores, y asegurar una formación docente sólida que aborde tanto las habilidades tecnológicas como las habilidades pedagógicas. Estos aspectos servirán de referencia en la elaboración de una propuesta para la formación de profesores en servicio, lo cual es parte fundamental de este informe de investigación.

2.5.3 Faceta cognitiva-afectiva en el estudio de las cónicas

La investigación realizada por Almouloud (2014), analiza el aprendizaje de las cónicas en el sistema educativo de Mali, la cual hace uso de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (Chevallard, 1985), desde un enfoque histórico, epistemológico y didáctico, relacionados con las cónicas. El estudio muestra que hay una tendencia a priorizar los aspectos analíticos sobre los

geométricos, lo que puede reducir la comprensión de los estudiantes. Concluye que, a pesar de que los objetivos del plan curricular están diseñados para abordar las cónicas de manera significativa, en la práctica, está más direccionada a atender aspectos algebraicos. Sugieren el uso de herramientas geométricas efectivas, que permitan la comprensión del concepto y su aplicación en la solución de problemas.

El trabajo realizado por Garzón (2020), presenta los resultados de una investigación interesada en analizar el aprendizaje de las cónicas a través de las situaciones didácticas (Brousseau, 1986), utilizando el concepto de métrica. El problema que plantea Garzón radica en el lenguaje simbólico y su uso desmedido en el estudio de las cónicas, lo cual ha llevado a perjudicar la comprensión del pensamiento espacial de los estudiantes, en particular del tratamiento algebraico que se le da, por encima del tratamiento geométrico que debería tener también. Por lo que propone un trabajo que, dentro de sus objetivos, busca rescatar el valor de lo empírico y lo intuitivo en el aprendizaje de las cónicas, identificando obstáculos no solo epistemológicos, sino también cognitivos.

Se debe reconocer que algunos de los estudios antes referidos (Santa y Jaramillo, 2014; Bonilla et al., 2014; Florio, 2022) abordan ambas facetas: mediacional-interaccional y cognitiva-afectiva. Para efectos de análisis, y en función del énfasis que se hacía en una u otra faceta fueron estudiados separadamente.

La revisión de antecedentes presentada en este capítulo muestra que, de acuerdo con la literatura consultada, las investigaciones sobre cónicas se han centrado principalmente en su enseñanza, más que en su aprendizaje, una tendencia que se observa tanto a nivel nacional como internacional. Para el segundo, las investigaciones no son tan diversas, lo que llama la atención puesto que muchas de ellas se enfocan en responder a preguntas sobre cómo y a través de qué herramientas y métodos enseñar las cónicas para lograr resultados de aprendizaje en los

estudiantes. Investigaciones a nivel nacional como la de Pérez (2012), Santa y Jaramillo (2014), Mesa (2013), se centran en los estudiantes y la enseñanza aprendizaje de las cónicas. Asimismo, a nivel internacional las investigaciones de Chen (2013), Beltrán (2019), Bonilla et al. (2014), Florio (2022), Li (2022), Dávila et al. (2013), Almouloud (2014), Benito (2019), Garzón (2020) también estudian la enseñanza y aprendizaje de las cónicas en estudiantes.

CAPÍTULO 3. MARCO TEÓRICO

3.1 Introducción

El presente capítulo está organizado en cuatro apartados. En el primero de ellos presentamos la teoría relacionada con la epistemología de las cónicas y su estudio como objeto de la didáctica. En el segundo apartado, se define la estructura curricular presentada por el sistema educativo en Colombia para la enseñanza de las cónicas. El tercer apartado, está dedicado al estudio del conocimiento académico y profesional del profesor de matemáticas. Finalmente, en el cuarto apartado, se describe el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor.

3.2 Las cónicas: epistemología y estudio como objeto de la didáctica

Lo expuesto en los apartados 3.2.1 y 3.2.2, tienen como sustento las aportaciones al estudio de la historia y la epistemología en torno a las cónicas de Fried y Unguri (2001) y Berger (2010).

3.2.1 Desde Apolonio (262 a. c.) hasta Descartes (siglo XVII)

“Conica” es una obra de Apolonio publicada aproximadamente en el año 200 a.c. Se dedica a sistematizar el estudio de las secciones del cono: circunferencia, elipse, parábola e hipérbola. A partir de la intersección de un cono con un plano, Apolonio dedujo las curvas que han contribuido por muchos años al desarrollo de diferentes áreas de conocimiento como la matemática, la física, la astronomía (Toomer, 1990), entre otras.

De los ocho libros publicados por Apolonio, los cuatro primeros constituyen una introducción elemental al estudio de las cónicas. El primero contiene los métodos de generación

de las cónicas y sus propiedades básicas. El segundo contiene las propiedades de los diámetros, asíntotas y ejes de las secciones de un cono, explora cómo los diámetros están relacionados con las tangentes y cómo se pueden utilizar para definir las cónicas correspondientes de manera más precisa. El tercer libro contiene los teoremas útiles para el estudio de algunos sólidos, investiga las condiciones bajo las cuales una línea es tangente a una cónica y desarrolla métodos para determinar estas tangentes. El cuarto, trata de cuántas veces las secciones de un cono pueden intersectarse entre sí y las condiciones bajo las cuales estas intersecciones ocurren. Estudia además las configuraciones y posiciones relativas de las cónicas, como los casos en que dos cónicas son tangentes o se cortan en puntos específicos. Los libros restantes tratan de temas más particulares: El libro V trata sobre la máxima y mínima distancia de las cónicas respecto a un punto dado, el libro VI de las propiedades de las secciones cónicas en relación con la igualdad y la similitud, el libro VII de los teoremas relativos a la determinación de cónicas que satisfacen ciertas condiciones específicas, el libro VIII por su parte, trata sobre problemas avanzados relacionados con las cónicas, extendiendo los temas tratados en los libros anteriores e introduciendo nuevas aplicaciones.

3.2.1.1 En la antigüedad (500 d.c).

Pappus de Alejandría, matemático del siglo IV escribió su obra más representativa “Colección matemática” en la cual además de otras obras matemáticas antiguas, incluye “Conica” de Apolonio. Preservó y transmitió el conocimiento de Apolonio, en particular de los libros que se han perdido, permitiendo entender y reconstruir parte del trabajo original de Apolonio.

3.2.1.2 En el mundo islámico.

Los estudios realizados por Apolonio fueron preservados y usados en la educación matemática en el mundo islámico y en el desarrollo de las matemáticas árabes, en especial en la obra del matemático al-Haytham (965-1041 d.c.), en donde hace uso del libro VII de Apolonio y su ingenio, para resolver problemas más complejos que los propuestos en ese libro.

3.2.1.3 En el oeste medieval.

El principal logro de los griegos bizantinos sobre las cónicas, fue conservar la edición de Eutocio de Ascalón, matemático bizantino del siglo VI, quien hizo comentarios sobre los libros de Apolonio, proporcionando explicaciones y claridad sobre los textos originales, ayudando a preservar y transmitir el conocimiento matemático de la antigüedad. El matemático de occidente de la Edad Media que ayudó a transmitir este conocimiento fue Witelo (siglo XIII), con su obra “Perspectiva” (Fried y Unguri, 2001, p. 8). Su estudio de la óptica se basó en gran parte en los tratados de al-Haytham, en el cual incluyó el uso de conceptos geométricos que se apoyan en el conocimiento de las cónicas desde la reflexión y la refracción de la luz en las elipses y las hipérbolas.

3.2.1.4 En el renacimiento.

En el siglo XV, se adquirieron y copiaron manuscritos del texto griego de Apolonio. La importancia de su obra fue reconocida por Johannes Müller von Königsberg, mejor conocido como Regiomontanus, matemático y astrónomo alemán del siglo XV, quien adquirió una copia de “Conica” en Italia. En 1566 en Bolonia apareció la traducción hecha por Federico Commandino, matemático y traductor italiano del siglo XVI, el cual proporcionó una traducción latina y, en ella, un profundo conocimiento del texto que se revela en las numerosas correcciones que introdujo. Tuvo una alta influencia en el estudio de la matemática en los siguientes 150 años,

con trabajos como el de Kepler (matemático alemán del siglo XVI) y la demostración de la órbita de marte en forma de elipse en su obra “Astronomia Nova” de 1609.

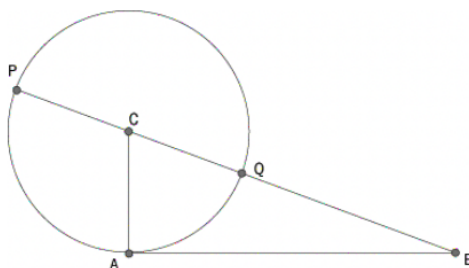
3.2.1.5 En la época moderna.

La edición al latín (*editio princeps*) de Edmund Halley (astrónomo, matemático y físico inglés del siglo XVII y XVIII) del libro “Conicas de Apolonio” fue publicado en Oxford en 1710. Esta edición incluyó los primeros cuatro libros traducidos en idioma griego y los tres siguientes traducidos en idioma árabe. Contribuyó en la difusión y preservación del estudio de las cónicas entre los matemáticos europeos de la época.

Se observa que, hasta antes de la obra de Descartes, lo relativo a las Cónicas estuvo en torno a los estudios de Apolonio, a su interpretación geométrica como las secciones de un cono y a la perspectiva sintética para la organización de las nociones correspondientes. Luego, a partir del siglo XVII, las aportaciones al estudio de las cónicas, aunque basadas en las de Apolonio, se dirigieron hacia sus caracterizaciones analíticas y algebraicas apoyadas en la geometría analítica iniciada por Descartes.

En el libro I de *La Géométrie* de Descartes, se exponen diferentes métodos geométricos para resolver ecuaciones cuadráticas, siguiendo los modelos griegos. En este sentido, para resolver una ecuación de la forma $x^2 = ax + b^2$, Descartes traza un segmento AB de longitud igual a b , y sobre A hace una línea BC , perpendicular al segmento anterior, cuya longitud es $\frac{a}{2}$. luego, con centro en C dibuja la circunferencia con radio igual a la medida anterior, trazando la recta BC que cortará a circunferencia en dos puntos P y Q . La raíz buscada corresponde al segmento PB . En sus cálculos desprecia la solución QB , por ser negativa. La Figura 3.1 representa el método de Descartes para resolver una ecuación de segundo grado (de Albornoz y de León, 2020).

Figura 3.1 Método de Descartes para resolver una ecuación de segundo grado.



Fuente: de Albornoz y de León, (2020. p. 79)

En el libro II de *La Géométrie* es donde Descartes se acerca a la concepción actual de la geometría analítica. Propone una clasificación para las curvas y las divide en dos grupos: el primero formado por las curvas geométricas como la recta, la circunferencia y las cónicas, las cuales se pueden describir según Descartes de manera exacta, y el segundo grupo, formado por las curvas mecánicas como la cuadratriz o la espiral logarítmica, consideras curvas definidas de forma inexacta. A partir de esta clasificación es que Descartes resuelve diferentes problemas, entre los que se encuentra el problema de Pappus (340 d.c.), importante en el desarrollo de la geometría proyectiva de Desargues en 1639 y la geometría algebraica. Este problema permitió generar cónicas como lugares geométricos sin referencia al cono, relacionando la geometría sintética con la analítica, obteniendo como resultado para la solución, una ecuación de la forma:

$$y^2 = ay - bxy + cx - dx^2$$

y la cual, representa una cónica que pasa por el origen de coordenadas. La resolución la completa estableciendo las condiciones de los coeficientes para que la cónica sea una recta, una parábola, una elipse o una hipérbola. Este se consideró el planteamiento más general logrado hasta ese momento, sobre las cónicas. Los métodos para este tipo de ecuaciones y los símbolos matemáticos utilizados, son los que se emplean en la actualidad, por lo que para su enseñanza, sigue siendo un referente importante en el desarrollo epistémico del concepto de cónica, a través de la geometría analítica.

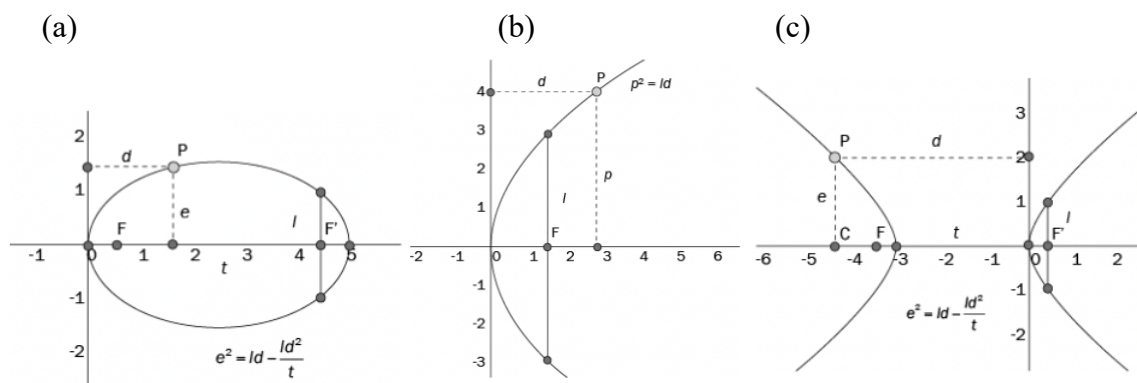
John Wallis por su parte (matemático precursor del cálculo infinitesimal), hizo una traducción de las condiciones geométricas establecidas por Apolonio para las cónicas a sus correspondientes expresiones algebraicas, definidas por Wallis, como las curvas que se obtienen a partir de las ecuaciones de segundo grado en x e y , mostrando que las distintas formas que podían tomar estas ecuaciones, correspondían con las diferentes cónicas. (de Albornoz y de León, 2020).

A partir de las expresiones:

$$e^2 = ld - \frac{ld^2}{t}; \quad p^2 = ld; \quad h^2 = ld + \frac{ld^2}{t}$$

En las que e , p y h son, respectivamente la ordenada de la elipse, de la parábola y de la hipérbola, correspondientes a la abscisa de medida d , tomada a partir del vértice, donde l es el lado recto (definido en relación con su foco y eje principal) y t es el eje, pudo definir las distintas cónicas sin referencia al cono. Las figuras 3.2(a), 3.2(b) y 3.2(c) permiten observar la interpretación de los parámetros en la elipse, la parábola y la hipérbola, respectivamente, según Wallis.

Figura 3.2 Interpretación de los parámetros de la elipse, la parábola y la hipérbola



Fuente: (de Albornoz y de León, 2020)

Asimismo, en su libro *El método de fluxiones y series infinitas*, Newton construye nuevas curvas a partir de sus ecuaciones, empleando nuevas coordenadas entre ellas el sistema de coordenadas bipolares, en el cual define a x e y como distancias de un punto variable a dos puntos fijos, llamados *polos*. A través de este sistema, la elipse se expresaría en la forma $x + y = a$ y la hipérbola en la forma $x - y = a$.

Lo expuesto hasta el momento, en relación con el estudio de las secciones cónicas, en los diferentes momentos históricos referidos, indica que el desarrollo epistemológico nace de la necesidad de resolver problemas relacionados con contextos reales (de Albornoz y de León, 2020). Lo anterior muestra que el estudio de las cónicas, incorporada en la geometría, no son un concepto aislado de las matemáticas, por el contrario, es un estudio que por muchos años, ha permitido resolver diferentes problemas a partir del razonamiento geométrico, la modelación matemática y su representación en el álgebra. Su desarrollo histórico demuestra que para entender las cónicas, es necesario aprender desde su significado en contextos reales (Bonilla, 2012; de Albornoz y de León, 2020; Valdivia y Parraguez, 2012), sus avances teóricos desde lo intuitivo a lo formal de la matemática y su inmersión en diferentes áreas del conocimiento como la astronomía, la física y la ingeniería (órbitas planetarias, puentes parabólicos, entre otros).

En el ámbito educativo, la enseñanza y aprendizaje de las cónicas desde su interpretación como un objeto matemático que resuelve problemas de la realidad está contemplado tanto en las competencias definidas en los estándares a nivel nacional (MEN, 2006) como en los objetivos propuestos en los lineamientos curriculares (MEN, 1998), tal y como se muestra más adelante en el apartado 3.3. Sin embargo, en Colombia, y teniendo como referentes los textos guía para la enseñanza de las cónicas (MEN, 2017), su enseñanza se propone desde la perspectiva analítica-algebraica y a partir de aplicaciones memorísticas-mecánicas, en cuanto a que se explican desde

la perspectiva de las secciones de un cono y como curvas en un plano cartesiano (analítica-algebraica), dejando de lado, su interpretación como la relación de puntos en el plano, sin coordenadas, lo que puede vincular de manera natural lo relativo a secciones de un cono con la representación analítica de las cónicas.

En este sentido, nuestra propuesta dirige su atención al estudio de los conocimientos didáctico-matemáticos del profesor para la enseñanza de las cónicas en la educación media, en sintonía con los objetivos que plantea el sistema educativo nacional colombiano a través de los estándares básicos de competencias (pensamiento espacial, pensamiento variacional) (MEN, 2006) y en el cual se reconoce el desarrollo epistemológico de las cónicas como eje articulador para su enseñanza en los grados de la educación media, tratando de integrar las diferentes interpretaciones: lo geométrico, lo sintético, lo analítico y su uso en la resolución de problemas reales, donde son relevantes los conocimientos matemáticos y geométricos adquiridos por el profesor en su formación inicial (MEN, 1998) y la posibilidad de transformar el saber disciplinar en un conocimiento enseñable (conocimiento didáctico) (Godino et al., 2017; Pino-Fan et al., 2023).

3.2.2 Breve inciso en sus fundamentos matemáticos

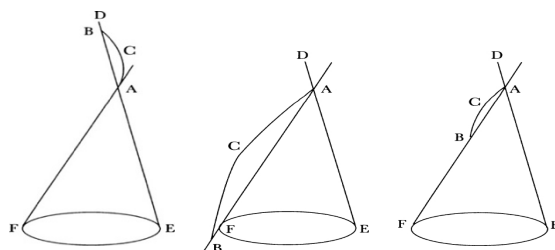
3.2.2.1 Enfoque geométrico (cortes de un cono).

El desarrollo geométrico de las cónicas explicada a través de los cortes de un cono y definidas como lugares geométricos, fue introducido por Apolonio de Perga en su libro “Conica”. El libro I, primer libro del curso de los elementos de Apolonio, comienza con diecinueve definiciones, en las cuales se incluyen la definición de superficie cónica, cono, diámetro de una curva plana, líneas trazadas en el sentido de las agujas del reloj con respecto al diámetro, diámetro transversal, diámetro vertical, diámetros conjugados, y ejes. Todas estas

definiciones se refieren a objetos geométricos simples – puntos, líneas, planos– y con una excepción a relaciones geométricas simples – intersección, bisección, paralelos–. Las definiciones, por ejemplo, del diámetro de una línea curva, del vértice de una línea curva y de las líneas trazadas en el sentido de las agujas del reloj respecto al diámetro son las siguientes: “De cualquier línea curva que esté en un plano, llámese diámetro a la línea recta que, trazada desde la línea curva, biseca todas las líneas rectas trazadas a esta línea curva paralelas a alguna línea recta; y llámese vértice de la línea curva al extremo de esa línea recta (el diámetro) situado en la línea curva, cada una de estas paralelas se traza en el sentido de las agujas del reloj con respecto al diámetro”. (Fried y Unguru, 2001, p. 62).

Apolonio menciona la superficie cónica explícitamente en solo cuatro proposiciones del primer libro: I.1, I.2, I.4, e I.14. Sin embargo, estas no incluyen las definiciones de la parábola, elipse y la hipérbola. Esto sugiere que Apolonio prefería trabajar con el cono limitado, más visualmente claro, en lugar de la superficie cónica ilimitada. Las proposiciones mencionadas abordan cómo las líneas y planos interactúan con la superficie cónica, destacando su naturaleza doble e ilimitada, y establecen conexiones entre la superficie cónica y el cono. En la proposición I.1, Apolonio demuestra que una línea recta desde el vértice a cualquier punto de la superficie cónica con el vértice está en la superficie. La demostración implica que el punto puede estar en varias posiciones relativas al vértice. La demostración es: Sea A el vértice de la superficie cónica y B un punto de la superficie (ver Figura 3.3). Supongamos que AB no está en la superficie. Sea DE la recta que genera la superficie y EF la circunferencia a lo largo de la cual se desplaza DE . Entonces, al desplazarse DE a lo largo de EF , en cierto punto pasará por B . Pero DE también pasa por el punto fijo A . Por tanto, si ACB no está en la superficie, tenemos dos rectas diferentes que pasan por A y B , lo cual es absurdo.

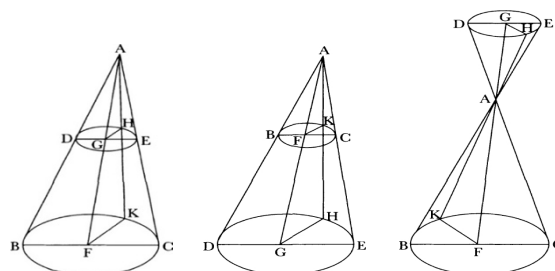
Figura 3.3 *Proposición I.1 de Apolonio.*



Fuente: Fried y Unguru (2001, p. 110)

En la proposición I.4, afirma que si una superficie cónica es cortada por un plano paralelo al círculo generador, la sección resultante es un círculo con su centro en el eje. Esta sección circular actúa como la base de un cono, estableciendo un puente conceptual entre la superficie cónica y el cono (Figura 3.4).

Figura 3.4 *Proposición I.4 de Apolonio.*



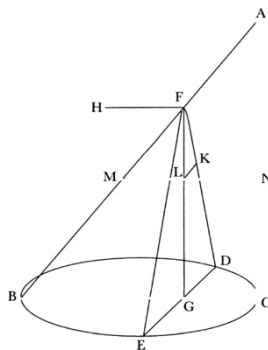
Fuente: Fried y Unguru (2001, p. 110)

Por su parte, las proposiciones I.11, I.12, I.13 de Apolonio en "Conica" describen las propiedades fundamentales de las demás secciones cónicas: la parábola, la elipse y la hipérbola.

En el enunciado de la proposición I.11 Apolonio describe una situación en la que un cono es cortado por un plano a través de su eje y por otro plano que corta la base del cono en una línea perpendicular al triángulo axial. Si el diámetro de la sección es paralelo a un lado del triángulo axial, entonces cualquier línea recta trazada desde la sección del cono hasta su diámetro, paralela a la intersección común del plano cortante y la base del cono, tendrá una propiedad específica. Esta línea será igual, al rectángulo formado por una línea recta sobre el diámetro desde el vértice

de la sección y otra línea que tiene una razón relacionada con el triángulo axial. Esto es lo que Apolonio define como una *Parábola* (Figura 3.5).

Figura 3.5 *Proposición I.11 de Apolonio.*

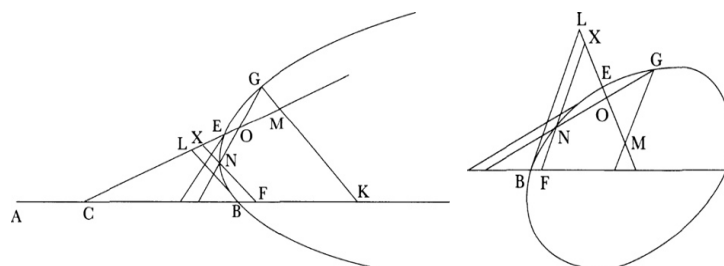


Fuente: Fried y Unguru (2001, p. 113)

La proposición I.12 de Apolonio se centra en la descripción de las propiedades de la elipse como una sección cónica. Cuando un cono es cortado por un plano oblicuo que no pasa por su vértice, la intersección es una *Elipse*. Apolonio examina cómo los ejes de la elipse están relacionados con el corte realizado y cómo se definen a partir de las dimensiones del cono y el ángulo del corte.

La proposición I.13 de Apolonio explica que una *Hipérbola* se forma cuando un plano corta ambas mitades de un cono de manera que el plano no pasa por el vértice del cono. Describe las propiedades geométricas de la hipérbola, por ejemplo, las relaciones entre sus ejes y otras características derivadas del corte. Explica cómo las distancias y las proporciones dentro de la figura cumplen con ciertas propiedades específicas que diferencian a la hipérbola de la elipse y la parábola. (Figura 3.6)

Figura 3.6 *Proposición I.12, I.13 de Apolonio.*



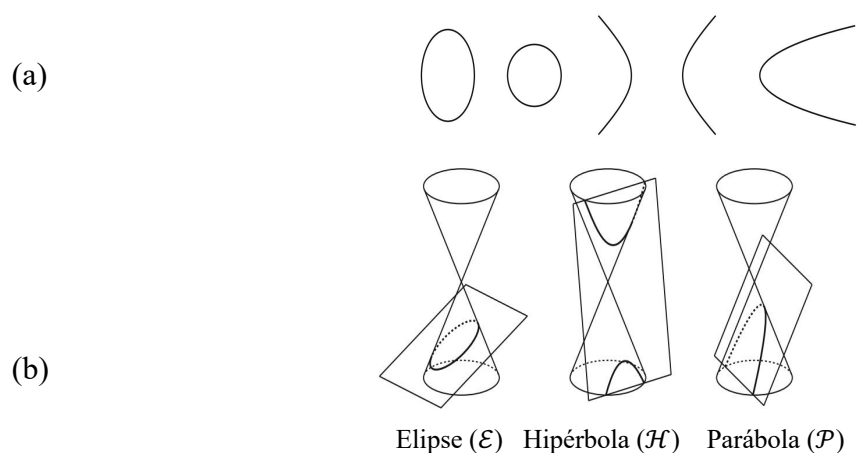
Fuente: Fried y Unguru (2001, p. 116)

3.2.2.2 Enfoque algebraico desde la geometría analítica.

En su desarrollo histórico, las cónicas fueron la base para resolver problemas clásicos, definidas a partir del cono como secciones de intersección con un plano, luego se independizaron del cono para ser explicadas como lugares geométricos, y más adelante como resultado de ecuaciones explicadas a través de la geometría analítica (de Albornoz y de León, 2020).

Con el desarrollo de la geometría analítica por Descartes, las cónicas pasaron a definirse como ecuaciones de segundo grado (Berger, 2010). A manera de ilustración, la Figura 3.7(a), muestra todas las figuras planas que pueden obtenerse como secciones del cono en el espacio euclidiano (E^2): circunferencia ($\mathcal{C}$), elipse ($\mathcal{E}$), parábola ($\mathcal{P}$), hipérbola ($\mathcal{H}$).

Figura 3.7 *Secciones cónicas en el espacio E^2 .*



Fuente: Berger (2010, pp. 183, 184)

Según Berger (2010), los griegos tenían la idea de que la unión de estas cuatro secciones cónicas, eran exactamente todas las secciones por planos que no pasan por los vértices de los conos de revolución en el espacio como se muestra en la Figura 3.7(b). Se define $\mathcal{K}$ como la unión de estos conjuntos. Esto es,

$$\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{H} \quad (1)$$

Los métodos con los cuales Berger describe los elementos de $\mathcal{K}$ son como sigue:

- i. En E^2 , sea un punto f y una línea D que no contiene a f . La curva $\mathcal{P} = \{m \in E^2: d(m, f) = d(m, D)\}$ formado por puntos a igual distancia de D y f , es una *parábola* y reciprocamente, cada parábola se puede obtener de esta manera. Donde f es el foco de $\mathcal{P}$ y D su directriz.
- ii. Dado el mismo D y f que en i., pero además un real $e \in]0,1[$. La curva $\mathcal{E} = \{m \in E^2: d(m, f) = e \cdot d(m, D)\}$ es una *elipse* en E^2 y reciprocamente cada elipse se puede obtener de esta manera. Donde f es el foco de $\mathcal{E}$ y D es la directriz asociada a f .
- iii. Los mismos datos que en ii., pero aquí $e > 1$, entonces se obtienen todas las *hipérbolas* $\mathcal{H}$, con las mismas definiciones de foco y directriz.
- iv. Sea f y f' dos puntos distintos de E^2 y a un real diferente de cero tal que $2a > d(f, f')$. El conjunto $\mathcal{E} = \{m \in E^2: d(m, f) + d(m, f') = 2a\}$ es una *elipse* cuyos focos son f y f' . Así, cualquier elipse puede obtenerse de esta manera.
- v. Los mismos datos que en iv., pero aquí $2a < d(f, f')$. Luego, $\mathcal{H} = \{m \in E^2: |d(m, f) - d(m, f')| = 2a\}$ es una *semi hipérbola*.

La Figura 3.8(a), 3.8(b), 3.8(c) muestra una representación de las cónicas descritas por Berger (2010).

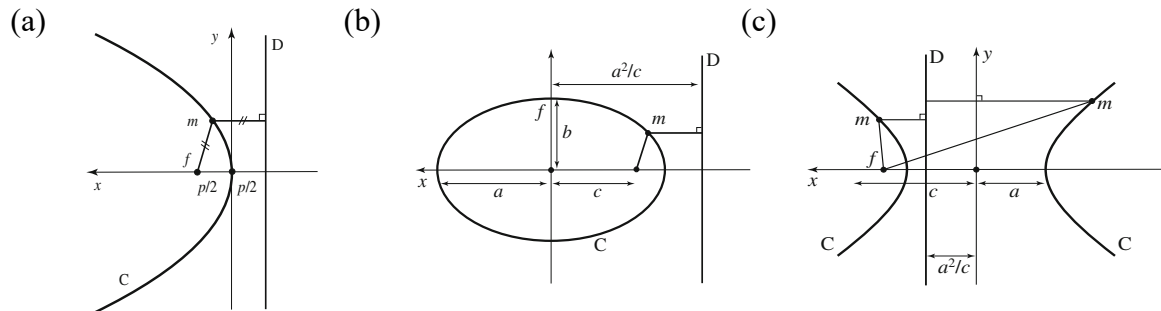
Para Descartes, la idea básica era que lo común a los elementos de $\mathcal{K} = \mathcal{C} \cup \mathcal{E} \cup \mathcal{P} \cup \mathcal{H}$, se podían definir por una ecuación de segundo grado: $\frac{x^2}{a^2} \pm \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ ó $y^2 = 2px$. Una ecuación de segundo grado en x, y se describe como,

$$ax^2 + 2b''xy + a'y^2 + 2b'x + 2by + a'' = 0 \quad (2)$$

Con a, b'', a' no todos cero. Descartes demostró que cada ecuación de tipo (2) puede, en un sistema apropiado de coordenadas ortogonales para E^2 , escribirse como sigue,

$$ax^2 + a'y^2 + a'' = 0 \text{ ó } ax^2 + 2by = 0 \quad (3)$$

Figura 3.8 *Parábola, Elipse e Hipérbola.*



Fuente: Berger (2010, pp. 185, 186)

Este es el teorema del álgebra lineal que permite la diagonalización de formas cuadráticas reales con respecto a una forma cuadrática definida positiva, la cual define la estructura euclidiana y traslaciones de ejes. Por lo tanto, cada ecuación (2) representa un elemento de $\mathcal{K}$ o bien, cada uno de los casos que siguen, interpretados para las dos formas reducidas:

- El conjunto vacío, si a, a', a'' son todos diferentes de cero y del mismo signo.
- Un solo punto, si a, a' son diferentes de cero y del mismo signo, y $a'' = 0$.
- Dos líneas distintas, si a, a' son de signos diferentes y $a'' = 0$
- Una sola línea (llamada línea doble o líneas fusionadas) si a es diferente de cero y a' es cero.

A continuación, se definen cada una de las cónicas y sus respectivas ecuaciones canónicas y generales, basadas en una interpretación de Uribe (2004) acerca de las ideas desarrolladas por la geometría de Descartes.

Circunferencia

Dado lo anterior, en un sistema de coordenadas cartesianas, la definición de circunferencia según lo expuesto por Descartes, sería:

La distancia del centro C a un punto cualquiera de la curva P es igual al radio R, entonces, la distancia entre dos puntos de la circunferencia está dada por

$$|\overline{CP}| = R = \sqrt{(x - h)^2 + (y - k)^2} \quad (4)$$

hallando el cuadrado se obtiene,

$$R^2 = (x - h)^2 + (y - k)^2 \quad (5)$$

Es la que se conoce como *ecuación canónica de la circunferencia*. En particular, si el centro es en el origen, entonces

$$R^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = x^2 + y^2 \quad (6)$$

Ahora, al desarrollar la ecuación (5) obtenemos la *ecuación general de la circunferencia*. Primero, se desarrollan los binomios y luego se ordenan los términos:

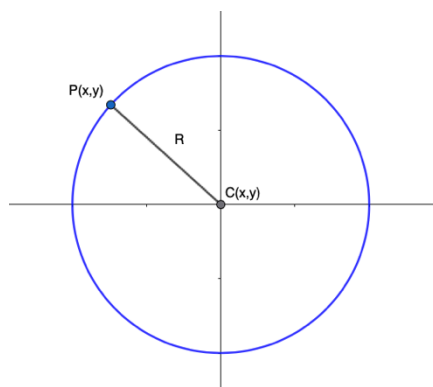
$$R^2 = x^2 - 2xh + h^2 + y^2 - 2yk + k^2$$

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (7)$$

Siendo $D = -2h$, $E = -2K$ y $F = h^2 + k^2 - R^2$

Teniendo en cuenta la Figura 3.9, esto es,

Figura 3.9 Elementos de la circunferencia.



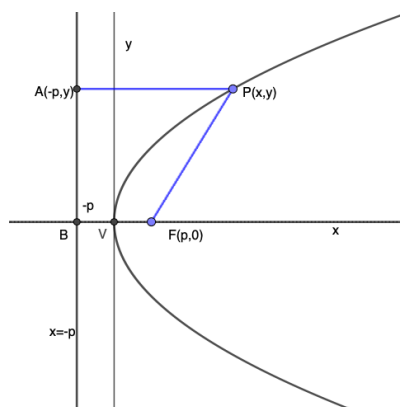
Fuente: Elaboración propia en GeoGebra

Parábola

La parábola se define como un lugar geométrico de un punto P que se mueve en un plano de tal manera que su distancia a una recta fija situada en el plano, es siempre igual a su distancia de un punto fijo F del plano y que no pertenece a la recta. Teniendo en cuenta la Figura 3.10, esto es,

$$|\overline{PF}| = |\overline{PA}| \quad (8)$$

Figura 3.10 Elementos de la parábola.



Fuente: Elaboración propia en GeoGebra

La distancia de P a la directriz es igual a la distancia de P al foco.

$$|\overline{PF}| = \sqrt{(x - p)^2 + (y - 0)^2} \quad (9)$$

$$|\overline{PA}| = \sqrt{(x + p)^2 + (y - y)^2} \quad (10)$$

Al igualar las expresiones (9) y (10) se obtiene,

$$\sqrt{(x-p)^2 + y^2} = \sqrt{(x+p)^2}$$

$$x^2 - 2px + p^2 + y^2 = x^2 + 2px + p^2$$

Resolviendo para y ,

$$y^2 = 4px \quad (11)$$

la cual corresponde a la ecuación de la parábola con vértice en el origen y eje focal coincidiendo con el eje x .

Ahora, si la parábola tiene el vértice en el punto (h, k) su eje focal paralelo al eje x , y distancia focal p , la ecuación es

$$(y - k)^2 = 4p(x - h) \quad (12)$$

Para el caso en que el eje focal es paralelo al eje y , la ecuación es

$$(x - h)^2 = 4p(y - k) \quad (13)$$

convirtiéndose en las *ecuaciones canónicas de la parábola*.

Al desarrollar (12) y (13), tal y como se hizo con la circunferencia, se obtiene la *ecuación general de la parábola*.

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (14)$$

siendo $D = -2k$, $E = -4p$ y $F = k^2 + 4ph$

Lo anterior, cumpliendo las siguientes condiciones,

Si $A = 0$, $C \neq 0$ y $D \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje x o coincide con el. Si, además, $D = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje x , dos rectas que coinciden paralelas al eje x o ningún lugar geométrico, según sean las raíces de $Cy^2 + Ey + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o complejas.

Si $A \neq 0, C = 0$ y $E \neq 0$, la ecuación representa una parábola cuyo eje focal es paralelo al eje y o coincide con él. Si, además, $E = 0$, la ecuación representa dos rectas diferentes paralelas al eje y , dos rectas que coinciden paralelas al eje y o ningún lugar geométrico, según sean las raíces de $Ax^2 + Dx + F = 0$ sean reales y distintas, reales e iguales o complejas.

Elipse

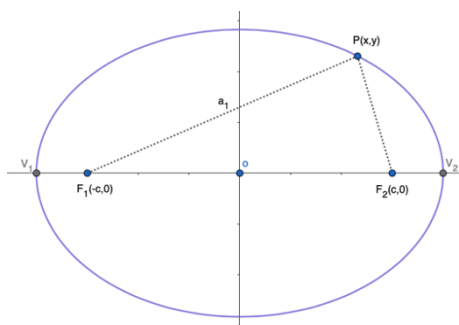
La elipse es el lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos F_1, F_2 de ese plano es siempre igual a una constante $2a$ y mayor que la distancia entre los dos puntos. Ver Figura 3.11.

esto es,

$$|\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a, \quad (15)$$

con a una constante positiva mayor que c .

Figura 3.11 Elementos de la elipse.



Fuente: Elaboración propia en GeoGebra

Sabiendo que,

$$|\overline{PF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2} \quad (16)$$

$$|\overline{PF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \quad (17)$$

reemplazando y haciendo los respectivos cálculos se obtiene,

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$(x + c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x - c)^2 + y^2} + (x - c)^2 + y^2$$

resolviendo los cuadrados y reduciendo la expresión, se obtiene,

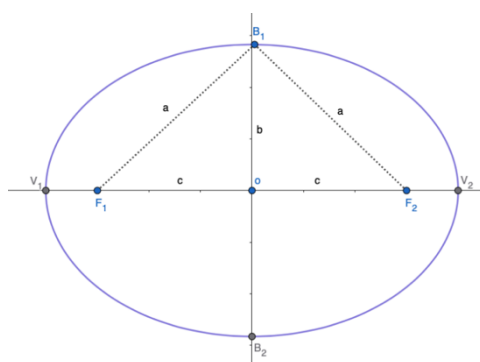
$$a^2(a^2 - c)^2 = x^2(a^2 - c)^2 + a^2y^2 \quad (18)$$

dividiendo toda la ecuación entre $a^2(a^2 - c)^2$

$$1 = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} \quad (19)$$

Lo anterior, ya que $a^2 - c^2 = b^2$, como se puede deducir de la Figura 3.12.

Figura 3.12 Deducción del cálculo de b^2 .



Fuente: Elaboración propia en GeoGebra

Resulta,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (20)$$

la cual corresponde a la ecuación de la elipse con centro en el origen.

Ahora, si el eje focal es paralelo al eje x , entonces la ecuación resultante es

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (21)$$

asimismo, si el eje focal es paralelo al eje y , la ecuación resultante es

$$\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1 \quad (22)$$

Ambas ecuaciones representan las ecuaciones canónicas de la elipse con centro en (h, k) .

Ahora, al desarrollar la ecuación (22), se obtiene,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (23)$$

siendo $A = b^2$, $C = a^2$, $D = -2b^2h$, $E = -2a^2k$, $F = b^2h^2 + a^2k^2 - a^2b^2$.

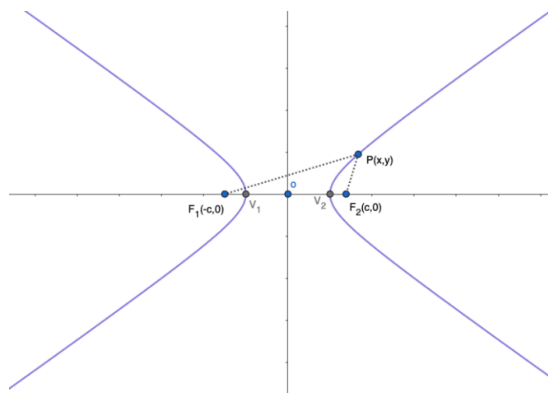
Un análisis similar se desarrolla para la expresión (24).

Hipérbola

Una hipérbola, es un lugar geométrico de un punto que se mueve en un plano de tal manera que el valor absoluto de la diferencia de sus distancias a dos puntos fijos del plano, llamados focos, es siempre igual a una constante positiva, menor que la distancia entre los focos y la cual se representa por $2a$. Los elementos de la hipérbola se observan en la Figura 3.13. Esto es,

$$||\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}|| = 2a, \text{ con } a > 0 \text{ y } a < c \quad (24)$$

Figura 3.13 Elementos de la hipérbola.



Fuente: Elaboración propia en GeoGebra

lo cual, por definición de valor absoluto, se puede escribir como,

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = 2a \quad (25)$$

$$|\overline{PF_1}| - |\overline{PF_2}| = -2a \quad (26)$$

La primera ecuación es verdadera cuando P está sobre la rama derecha de la hipérbola, y la segunda ecuación es verdadera cuando P está sobre la rama izquierda de la hipérbola.

Sabiendo que

$$|\overline{PF_1}| = \sqrt{(x+c)^2 + (y-0)^2} \quad (27)$$

$$|\overline{PF_2}| = \sqrt{(x-c)^2 + (y-0)^2} \quad (28)$$

y haciendo los respectivos reemplazos en cada ecuación, se obtiene la ecuación con focos $f_1(-c, 0)$ y $f_2(-c, 0)$.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (29)$$

siendo b un número positivo tal que $b^2 = a^2 - c^2$.

De manera similar,

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (30)$$

con focos $f_1(0, -c)$ y $f_2(0, c)$, con centro en el origen y eje focal el eje y .

Ahora, la ecuación de una hipérbola con centro en (h, k) y eje focal horizontal es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1 \quad (31)$$

y la ecuación de una hipérbola con centro en (h, k) y eje focal vertical es:

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1 \quad (32)$$

Ambas ecuaciones representan las ecuaciones canónicas de la hipérbola.

Así como se hizo en las ecuaciones generales de la circunferencia, la parábola y la elipse, también la ecuación de la hipérbola se obtiene desarrollando las ecuaciones canónicas, obteniendo la ecuación general de la hipérbola,

$$Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0 \quad (33)$$

siendo $A = b^2$; $C = -a^2$; $D = -2b^2h$; $E = 2a^2k$; $F = b^2h^2 - a^2k^2 - a^2b^2$

Desde el punto de vista de la didáctica, las formas de representación de las cónicas vistas anteriormente (ecuación canónica, ecuación general), derivadas de un mismo objeto matemático, es lo que Duval (1995) denomina registros semióticos. Asimismo, desde el EOS, el uso de

diferentes representaciones da lugar a diferentes sistemas de prácticas, las cuales constituyen significados parciales del objeto matemático estudiado, las cónicas. La posibilidad de construir un significado global requiere de la articulación de estos significados parciales, permitiendo a los estudiantes entender los significados de las cónicas como secciones del cono y desde su explicación algebraica y analítica. En este sentido, se puede observar que el estudio histórico y epistemológico de las cónicas, contribuye ampliamente al desarrollo de conocimiento matemático y conocimiento didáctico de los profesores y permite abordar su complejidad a través de diferentes herramientas tanto teóricas como didácticas en el proceso de aprendizaje de los estudiantes.

3.3 Las cónicas y el currículo

Según los lineamientos curriculares establecidos por el Ministerio de Educación Nacional colombiano, y los Estándares Básicos de Competencias, las cónicas son un concepto que se estudia en el área de matemáticas, específicamente en los niveles de educación media (grados décimo y undécimo). El marco normativo y curricular se encuentra en la Ley General de Educación (ley 115 de 1994), la cual determina los fines de la educación y los lineamientos curriculares para la enseñanza de las matemáticas. Luego se encuentra el documento de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, integrado en el documento base, Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006), los cuales definen lo que el estudiante debe saber y saber hacer en cada nivel educativo y en cada área de conocimiento. Finalmente se encuentran los Lineamientos Curriculares en matemáticas (MEN, 1998), los cuales dan las orientaciones pedagógicas para la enseñanza de las matemáticas por competencias, incluyendo competencias matemáticas, competencias científicas y competencias ciudadanas.

3.3.1 Competencias matemáticas

Los estudiantes deben estar en la capacidad de reconocer y aplicar los conceptos de *circunferencia, elipse, parábola e hipérbola* en la solución de problemas y en situaciones de la vida real, lo cual implica, desarrollar competencias comunicativas y competencias de razonamiento. La primera, referida a que los estudiantes deben estar en la capacidad de comunicar sus ideas matemáticas sobre los conceptos estudiados. La segunda, referida a que los estudiantes puedan desarrollar habilidades para analizar, deducir y justificar propiedades geométricas y algebraicas de las cónicas.

3.3.2 Competencias científicas

Los estudiantes deben estar en la capacidad de comprender y aplicar el conocimiento científico, en la resolución de problemas y en la relación que tienen en contextos sociales y naturales. Así, para el estudio de las cónicas, las competencias científicas se desarrollan a través de pensamiento científico, aplicación del conocimiento científico y comunicación científica. Desde el pensamiento científico, se desarrolla a través la observación y el análisis de las propiedades de las cónicas, la formulación de hipótesis y la experimentación. Desde la aplicación del conocimiento científico, se desarrolla a través de la resolución de problemas, en donde se aplican las propiedades y ecuaciones de las cónicas y la conexión con otras áreas de estudio como la ingeniería y la física. Desde la comunicación científica, a través de la comunicación de ideas y la argumentación sobre propiedades y aplicaciones de las cónicas utilizando evidencia matemática.

3.3.3 Competencias ciudadanas

Referidas a que los estudiantes deben estar en la capacidad de participar de manera activa en la sociedad. En el estudio de las cónicas, se manifiestan a través del desarrollo de pensamiento

crítico y reflexivo, la participación y la convivencia. Desde el pensamiento crítico, a través del análisis de las cónicas y su participación y contribución al desarrollo social y tecnológico. Desde la participación, a través del trabajo colaborativo y la toma de decisiones en el diseño y aplicación de proyectos prácticos que involucren las propiedades de las cónicas. Y desde la convivencia, a través del respeto y el diálogo.

3.3.4 *Objetivos curriculares*

En el marco de los estándares básicos de competencias en matemáticas (MEN, 2006), los objetivos de la enseñanza de las cónicas en los grados de la educación media (10º, 11º) dentro del área de geometría analítica, van dirigidos a:

- Comprender las definiciones y propiedades fundamentales de las cónicas.
- Aplicar las ecuaciones y representaciones gráficas de las cónicas en la resolución de problemas algebraicos y geométricos.
- Relacionar las cónicas con fenómenos reales y otras disciplinas.
- Desarrollar habilidades de pensamiento crítico y creativo al explorar las propiedades y aplicaciones de las cónicas.

Asimismo, las competencias a tener en cuenta, son las contempladas en el documento de Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para los grados décimo - undécimo. Estos son:

- Identificación en forma visual, gráfica y algebraica de algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cilindro y en un cono.

- Identificación de características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricos y esféricos) y en particular de las curvas y figuras cónicas.
- Solución de problemas en los que se usen las propiedades geométricas de figuras cónicas por medio de transformaciones de las representaciones algebraicas de esas figuras.
- Uso de argumentos geométricos para resolver y formular problemas en contextos matemáticos y en otras ciencias.

3.3.5 *Contenidos en el currículo*

Los contenidos a desarrollar según el MEN (2006), y diferentes textos educativos para el grado décimo y undécimo (MEN, 2017; Uribe, 2006), van dirigidos a la enseñanza de tres temas específicos: Definiciones y propiedades de las cónicas, ecuaciones de las cónicas, aplicaciones de las cónicas. Es decir:

- Circunferencia: definición, ecuación canónica de la circunferencia, ecuación general de la circunferencia, aplicaciones de la circunferencia.
- Parábola: definición, ecuación canónica de la circunferencia, ecuación general de la parábola, aplicaciones de la parábola.
- Elipse: definición, ecuación canónica de la elipse, ecuación general de la elipse, aplicaciones de la elipse.
- Hipérbola: definición, ecuación canónica de la hipérbola, ecuación general de la hipérbola, aplicaciones de la hipérbola.

3.3.6 *Metodología de enseñanza*

La metodología de enseñanza que actualmente se desarrolla en el sistema de educación colombiano, se rige por los enfoques constructivista y por competencias (MEN, 1998), donde el

estudiante es el protagonista de un aprendizaje significativo y comprensivo de las matemáticas (MEN, 1998, 2006). Esto es, Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) donde los estudiantes resuelven problemas reales o teóricos que involucren las propiedades de las cónicas, uso de herramientas tecnológicas y concretas que le permita al estudiante visualizar y manipular las propiedades de las cónicas y trabajo colaborativo donde el estudiante pueda desarrollar con otros trabajo investigativo.

Asimismo, el aprendizaje significativo dirige su atención a los comportamientos, procedimientos y respuestas de los estudiantes, a la actitud, dedicación, interés, participación, capacidad de diferenciación, la habilidad para asimilar y comprender información y procedimientos, así como su refinamiento progresivo en los métodos para conocer, analizar, crear y resolver problemas y su creatividad para inventar o buscar nuevos métodos o respuestas (MEN, 1998).

Evaluación

La evaluación de los aprendizajes está descrita en los estándares básicos de aprendizaje (MEN, 2006) y en los lineamientos curriculares de matemáticas (MEN, 1998), desde una evaluación formativa y sumativa, dándole énfasis, a la valoración permanente de las distintas formas de participación del estudiante cuando se interpretan y tratan conceptos y aplicaciones matemáticas en la formulación y solución de problemas. La evaluación formativa exige a los estudiantes colombianos estar en la capacidad para proponer, explicar, argumentar y justificar procedimientos seguidos a la solución de los problemas (Wiske, 2003). Como valoración permanente, involucra la observación atenta como herramienta para la obtención de información sobre la interacción entre estudiantes, evidenciadas en la producción oral, gestual, escrita, y pictórica. La evaluación sumativa por su parte, involucra las pruebas escritas, los proyectos

prácticos y las presentaciones orales y escritas que informan sobre el aprendizaje significativo logrado por el estudiante y de manera progresiva en la evaluación formativa.

Lo expuesto en este apartado, muestra la organización curricular definida por el sistema educativo colombiano para la enseñanza de las cónicas en la educación media, a través de sus lineamientos curriculares (MEN, 1998). Según esta normativa se reconoce la necesidad de planificar y desarrollar procesos de enseñanza estructurados a partir del planteamiento de objetivos conducentes al desarrollo de conocimiento geométrico de los estudiantes y a su relación, aplicación e interpretación en contextos reales y con otras áreas de conocimiento, con un desarrollo de conocimiento didáctico.

Según lo expuesto por el MEN (1998, 2006), se considera fundamental que los profesores desarrollen una práctica desde la reflexión articulada con la evaluación crítica de su quehacer docente, a partir del estudio de las configuraciones epistémicas y cognitivas de cada objeto matemático que enseña, y del análisis que hace de los procesos didácticos considerados en el diseño de su planeación para su posterior implementación. Estos lineamientos coinciden con la literatura consultada, la cual señala que para lograr el desarrollo de conocimiento matemático en los estudiantes, se requiere del dominio conceptual y el conocimiento profundo que el profesor posee de las matemáticas (Fernandes-Maia-Pereira; Kaiber, 2022; Mora y Rivas, en prensa; Valbuena-Duarte et al., 2021). Así, la propuesta de Godino et al. (2016; 2017) y Pino-Fan et al. (2023) permiten integrar estas formas de conocimiento a partir de lo planteado en el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico Matemáticos del profesor (CCDM) y sus herramientas para la enseñanza aprendizaje de las matemáticas, los cuales referiremos en el apartado 3.5.

3.4 Conocimiento académico y profesional del profesor de matemáticas

En función de lo anterior y reconociendo la importancia de estudiar el conocimiento matemático del profesor como base para una enseñanza efectiva y contextualizada de la geometría, se presenta a continuación dos interpretaciones de este conocimiento, a saber: conocimiento académico, el cual se adquiere principalmente en entornos formativos o de enseñanza; y conocimiento profesional, el cual se desarrolla a partir de la práctica docente. Esta distinción, nos permite entender que no solo se requiere del dominio de contenido matemático sino que además se requiere de la capacidad de transformarlo en conocimiento accesible y con significado para el estudiante, su integración es esencial en la formación de docentes competentes y capaces de reflexionar sobre su práctica pedagógica.

3.4.1 Conocimiento académico

De acuerdo a los planteamientos de Ponte (1994), el conocimiento académico se refiere al estudio del conocimiento matemático que tienen los profesores para la enseñanza, esto es, el constructo del conocimiento del profesor en torno a las matemáticas y su complejidad adquirido durante su formación inicial. Ponte reconoce la importancia de comprender cómo enseñar matemáticas, gestionar el ambiente en el aula y atender a las necesidades de los estudiantes, más que a sólo tener dominio en el saber matemático.

En este orden de ideas, con respecto al conocimiento matemático, señala que debe ser un conocimiento profundo, es decir, tener dominio de los conceptos, las estructuras y relaciones entre los conceptos. En cuanto al conocimiento pedagógico, dirige su atención en cómo el profesor puede transformar el conocimiento matemático en algo comprensible para los estudiantes. Es decir, los profesores deben conocer además de los objetivos de aprendizaje

propuestos en el currículo de matemáticas (en la actualidad competencias matemáticas), los estilos de aprendizaje de los estudiantes y el entorno en el que se desarrollará la enseñanza.

De acuerdo con la literatura referida, el profesor de matemáticas debería conocer las matemáticas escolares del nivel educativo en el cual enseña y con niveles posteriores a este, esto es lo que se conoce como el “conocimiento del contenido matemático *per-se*” (Scheiner, 2015, p. 3250). Según Scheiner, el conocimiento *per-se* no solo tiene en cuenta el conocimiento básico de las matemáticas, sino además, el conocimiento conceptual de los principios que estructuran y organizan la matemática como disciplina, descrito en términos de la competencia matemática propuesta por Kilpatrick et al. (2006), la cual involucra la comprensión conceptual, la fluidez procedimental, la competencia estratégica, el razonamiento adaptativo y el conocimiento de estructuras y convenciones.

3.4.2 *Conocimiento profesional*

El conocimiento profesional tiene lugar en el desarrollo de una competencia profesional, que involucra la enseñanza del saber matemático y su construcción en contextos de enseñanza y aprendizaje, es decir, el desarrollado en la práctica (Azcárate, 1998; Ponte, 1994). El conocimiento profesional implica no solo conocimientos teóricos sino que además, su integración con la práctica y el contexto, facilita el desarrollo de habilidades pedagógicas en el profesor y el desarrollo de competencias docentes como, por ejemplo, organizar el contenido matemático para la enseñanza, analizar el potencial matemático que tienen los problemas, interpretar las producciones de los estudiantes o gestionar el discurso matemático en el aula. La forma en que se crea este conocimiento es la que permite desarrollar en el profesor, destrezas para aprender desde la propia práctica, el conocimiento que necesita para enseñar matemáticas. Así pues, por ejemplo, el profesor desarrolla conocimiento profesional al saber cómo estén

diseñados los entornos de aprendizaje, cómo influye en la interacción de sus participantes, y, por lo tanto, cómo intervienen en el proceso de construcción de conocimiento.

Asimismo, Azcárate (1998), plantea que el conocimiento profesional gira en torno a la selección y organización de los conocimientos, en función de las destrezas los procedimientos, las capacidades y las actitudes que debe desarrollar un profesor de matemáticas. Por lo que se requiere que el profesor tenga conocimientos matemáticos desde una perspectiva epistemológica y desde una perspectiva de quien aprende, considerando para ello, los intereses y el medio donde se desenvuelve. Menciona además, que es necesario que se replantee el cómo de su enseñanza, con estrategias que afecten tanto a estudiantes como al mismo profesor dentro de su práctica, favoreciendo la creatividad y la autonomía del estudiante desde lo afectivo y a través de la tolerancia, la colaboración y el respeto al medio. Lo anterior sugiere, un conocimiento profundo del profesor de los estudiantes, como sujetos en desarrollo e inmersos en un entorno, las particularidades del aprendizaje de los diferentes conceptos matemáticos y los posibles errores y dificultades que pueden encontrarse en el desarrollo de un conocimiento matemático. Según Azcárate, este conocimiento profundo permite al profesor hacer un análisis didáctico de los contenidos matemáticos a enseñar y diseñar su clase, a partir de finalidades determinadas, y de esta forma decidir sobre los recursos y procedimientos metodológicos a desarrollar, favoreciendo el aprendizaje de sus estudiantes.

Por su parte, Climent (2002) define el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, como un proceso dinámico y continuo que sugiere cambios en las concepciones del profesor, su conocimiento profesional y su práctica. Lo cual, implica hacer una reflexión de la práctica e interactuar con otros profesores a través de la participación en proyectos de investigación. Según Climent, la reflexión de la práctica permite al profesor aprender de su experiencia y adaptar su

enseñanza a las necesidades de los estudiantes, esto contribuye en los proyectos de investigación colaborativa dedicadas a compartir experiencias, reflexionar conjuntamente sobre su práctica y aprender desde otras experiencias, modelos y herramientas, como por ejemplo, la herramienta de idoneidad didáctica descrita en el apartado 3.6 de este capítulo.

Se interpreta de lo expuesto, que la práctica docente se considera como un aspecto esencial para el desarrollo del conocimiento profesional del profesor. Por lo que es necesario que el profesor se encuentre en servicio para su desarrollo. No obstante, la literatura hace referencia al desarrollo de esta forma de conocimiento desde la formación inicial del profesor (Llinares, 2012; Pino-Fan y Godino, 2015; Ponte y Chapman, 2006). En este sentido, Llinares propone lo que se conoce como “una mirada profesional”, lo cual se interpreta como la construcción del conocimiento profesional sobre la enseñanza de las matemáticas, desde la formación inicial del profesorado. Su idea se centra en que se debe preparar a los profesores en formación, para que aprendan desde la práctica. Lo cual requiere para su análisis en diferentes momentos de la enseñanza (tareas matemáticas, la interacción con las tareas y el discurso matemático en el aula), comprender la manera en que el profesor usa el conocimiento matemático (Ball et al., 2008) cuando realiza diferentes tareas profesionales.

Sobre la base de lo expuesto y observando que la interpretación común que se hace sobre el desarrollo de conocimiento profesional del profesor está vinculado con la práctica de la enseñanza, resulta pertinente centrar su estudio con profesores en servicio. Es decir, en el contexto de esta investigación se asume que es en la práctica donde se articula y transforma el conocimiento profesional del profesor. Tal como señala Climent (2002), este conocimiento “...consiste en la conjunción de todos los saberes y experiencias que un profesor posee y de los que hace uso en el desarrollo de su labor docente...” (pp. 52-53). Desde esta perspectiva, el

conocimiento profesional no se limita a solo teorías aprendidas, involucra también la interacción entre el saber y la experiencia. Al estudiar y acompañar procesos de desarrollo profesional con profesores en servicio, se puede observar cómo se transforman sus conocimientos y prácticas para la enseñanza de la geometría, lo cual implica necesariamente la integración de ideas relacionadas con el pensamiento visual, espacial y abstracto y sus competencias en conocimiento matemático y conocimiento didáctico en la enseñanza de la geometría y su relación con los procesos de interacción profesor-estudiante en el desarrollo de su práctica.

En este contexto, resulta pertinente referirse al modelo de Conocimiento Didáctico Matemático (CDM) que explica con mayor precisión el conocimiento matemático y didáctico del profesor, el cual fue propuesto por Godino (2009) quien menciona que este tipo de conocimiento puede organizarse o desarrollarse desde tres dimensiones: matemática, didáctica y metadidáctico-matemática. El modelo CDM es visto desde diferentes estudios (Pino-Fan y Godino, 2015; Scheiner et al., 2019) como una macro herramienta teórica y metodológica para la caracterización y desarrollo de competencias en la práctica del profesor, entendidas como el conjunto de conocimientos que permiten el desempeño del profesor dentro de contextos profesionales (Pino-Fan et al., 2017).

3.5 El modelo de Conocimiento Didáctico Matemático (CDM)

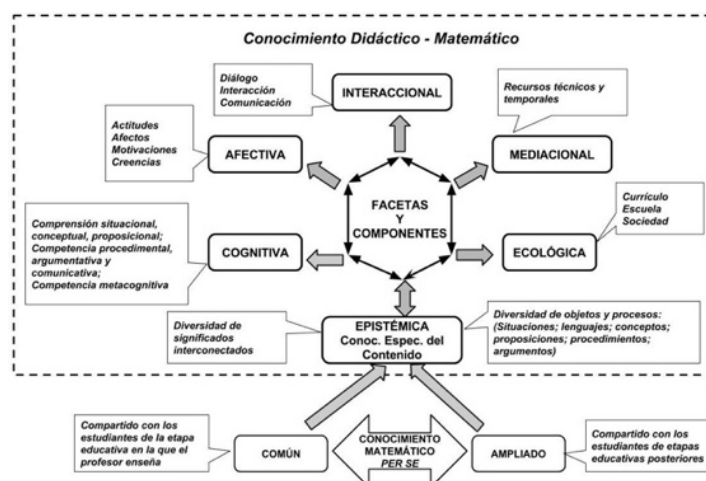
El modelo CDM considera que si se considera para la enseñanza algún contenido u objeto matemático, el profesor debe tener un conocimiento didáctico-matemático especializado de las facetas que afectan el proceso educativo y además, el conocimiento matemático *per-sé* desde sus dos dimensiones, el conocimiento común y el conocimiento ampliado, referidos en el apartado 3.4. En el contexto de este trabajo, el conocimiento matemático común relaciona las definiciones formales de circunferencia, parábola, elipse e hipérbola, sus propiedades fundamentales, las

ecuaciones canónicas y el cálculo de elementos característicos como centro, focos, directriz y ejes. Por otro lado, el conocimiento matemático ampliado, que va más allá del dominio conceptual y permite transformar el contenido matemático de las cónicas en donde el profesor demuestra sus habilidades para hacer diferentes representaciones (geométricas, algebraicas o gráficas), anticiparse a los errores de los estudiantes y utilizar recursos manipulativos o tecnológicos para representar visualmente las propiedades de las cónicas, así como establecer conexiones entre las cónicas y otros objetos matemáticos (funciones cuadráticas, trigonometría) o áreas de conocimiento.

En el caso de la enseñanza de las cónicas, el conocimiento base es fundamental para mejorar y enriquecer la práctica en la educación media, más aún cuando los estudiantes necesitan del profesor para interpretar la geometría de las cónicas y conectarlo con diferentes situaciones reales.

En la Figura 3.14, se puede observar las relaciones entre estas facetas y los componentes que se integran en el llamado “Conocimiento Didáctico-Matemático” del profesor (Godino et al., 2017).

Figura 3.14 Facetas y componentes del Conocimiento Didáctico-Matemático.



Fuente: Godino et al. (2017, p. 292)

La *faceta epistémica*, la cual se refiere a los objetos y procesos que participan y emergen en una práctica matemática. Esta puede ser interpretada como la forma particular en que el profesor entiende y conoce las definiciones y propiedades de las cónicas y las comprende desde diferentes perspectivas, reconociendo además, el vínculo que tienen con otros objetos matemáticos. La *faceta cognitiva*, la cual se refiere a cómo los estudiantes de la educación media aprenden y cómo este aprendizaje asciende en el proceso. Esta faceta facilita la comprensión de las cónicas en los niveles de desarrollo cognitivo de los estudiantes en estos niveles. La *faceta afectiva* que involucra aspectos afectivos, emocionales y actitudinales relacionados con la matemática y su dinámica de estudio, un profesor con conocimiento ampliado, puede escoger contextos que conecten el estudio de las cónicas con situaciones interesantes para el estudiante. La *faceta interaccional*, que relaciona las interacciones en el aula, su conocimiento sobre la enseñanza de las cónicas, el cómo resuelve las posibles dificultades que se pueden presentar en el aula y la forma en que organiza las tareas para abordar las cónicas. La *faceta mediacional* definida como el conocimiento que se tiene de los recursos que son apropiados para mejorar el aprendizaje de los estudiantes, como por ejemplo, el uso de software para modelar las cónicas. Finalmente, la *faceta ecológica* que implica el contexto institucional y curricular al comprender las relaciones del contenido de las matemáticas con otras disciplinas y áreas de conocimiento, así como los entornos sociales, que ayudan a seleccionar los conocimientos que deben enseñarse de las cónicas en los grados décimo y undécimo.

En este sentido, el conocimiento matemático base (*per-sé*) en el contexto de este trabajo, permite incorporar las seis facetas del modelo CDM mencionadas, convirtiéndose en una herramienta conceptual que, al ser reflexionado, transformado y contextualizado, es de gran utilidad para la enseñanza de las cónicas en los grados de la educación media. Por lo tanto, el

modelo CDM representa para este estudio, una herramienta con gran potencial explicativo, al articular de manera coherente los diferentes modelos de conocimiento del profesor, y abarcar de forma integral, aspectos clave involucrados en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Siendo la base de diversos trabajos realizados (Font et al., 2018; Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan et al., 2015), resulta el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos (CCDM) del profesor (Godino et al., 2017), el cual representa un avance en la caracterización de este tipo de conocimiento y por ende, en la evolución del modelo CDM.

3.6 El modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor (CCDM)

Para este estudio hemos escogido el modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticos del profesor, en adelante CCDM, propuesto por Godino et al. (2016; 2017) puesto que permite integrar de manera coherente, el conocimiento matemático con el conocimiento didáctico, lo cual es fundamental para el desarrollo de conocimiento matemático en profesores de matemáticas para la enseñanza de la geometría (Fernandes-Maia-Pereira y Keyber, 2022; Kurt-Birel et al., 2020) específicamente sobre las cónicas en los grados de la educación media. Vincula sub competencias que son particularmente útiles en geometría, como el análisis del conocimiento geométrico (análisis epistémico), la interpretación del conocimiento de los estudiantes (análisis cognitivo) y la adecuación de recursos y tareas para la enseñanza y el aprendizaje (análisis de la idoneidad didáctica). Esto resulta fundamental para la enseñanza, puesto que la geometría exige el uso de modelos y representaciones concretas que faciliten la comprensión hacia formas de pensamiento más abstractas, los posibles conflictos que se pueden manifestar de esa comprensión y la posibilidad de fortalecer el conocimiento del profesor mediante procesos reflexivos sobre su propia práctica de enseñanza. Específicamente, esta

mirada reflexiva no solo contribuye al desarrollo profesional del profesor, sino que además mejora la calidad de la enseñanza, al favorecer la comprensión crítica de los procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría.

El modelo CCDM es una evolución del modelo CDM con el fin de hacerlo más completo y avanzado, mejorando sus posibilidades de explicación en el desarrollo del conocimiento del profesor a través de la caracterización y desarrollo de competencias necesarias para la práctica profesional del profesor de matemáticas (Pino-Fan y Godino, 2015; Pino-Fan et al., 2015). Por lo tanto, tal y como lo mencionan Godino et al. (2017), en el marco del EOS, las nociones de *conocimiento* y *competencia* están muy relacionadas, teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. La práctica como acción, que permite resolver un problema o una tarea, devela la capacidad o competencia del sujeto que la realiza; asimismo, la intervención de objetos interconectados, emergentes, forman el conocimiento discursivo del profesor. En palabras de Godino et al. (2017): “La dialéctica entre práctica y objeto, entre competencia y conocimiento, se puede mostrar mediante el *análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas puestas en juego para la resolución de un problema matemático.” (p. 95). Tales prácticas pueden ser de tipo discursivo-declarativo (es decir, centradas en la posesión de conocimientos), o de tipo operatorio-procedimental (enfocadas en la aplicación de competencias).

En este orden de ideas, y correspondiendo a la necesidad de la vinculación dialéctica referida, Godino y colaboradores identifican las denominadas “Competencias de análisis e intervención didáctica” (Godino et al., 2016; 2017). Estas competencias constituyen un componente clave en el desarrollo profesional del profesor, al articular el conocimiento didáctico con la práctica en el aula.

3.6.1 Competencias de análisis e intervención didáctica

De acuerdo con lo señalado por Godino et al. (2017), la competencia de análisis e intervención didáctica se compone de cinco subcompetencias, su articulación permite establecer una relación entre las competencias y los conocimientos didácticos. La Figura 3.15, muestra los componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica propuesta por Godino et al. (2016), que a su vez, comprende otras cinco sub competencias: competencia de análisis de significados globales, competencia de análisis Ontosemiótico de las prácticas, competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas, competencia de análisis normativo y competencia de análisis de la idoneidad didáctica.

Figura 3.15 Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica.



Fuente: Godino et al. (2016, p. 295)

3.6.1.1 Competencia de análisis de significados globales.

La cual responde a preguntas como: ¿cuáles son los significados de los objetos matemáticos implicados en el estudio del contenido pretendido? ¿cómo se articulan entre sí? En esta competencia, los significados se refieren a los sistemas de prácticas, cuyo objetivo es construir un modelo que delimite los tipos de problemas que se abordan y las prácticas usadas para su resolución.

3.6.1.2 Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas.

En esta competencia se responden preguntas como: ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en las prácticas que constituyen los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas). ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los problemas? (configuraciones cognitivas)(Godino et al., 2017, p. 100). La identificación del profesor de objetos y procesos que intervienen en las prácticas matemáticas, es una competencia que le permitirá comprender, los aprendizajes alcanzados por los estudiantes, gestionando adecuadamente procesos de significados institucionales y evaluando además, sus competencias matemáticas.

3.6.1.3 Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas.

En el marco del EOS, esta competencia debe responder al problema de cómo enseñar un contenido específico: ¿qué tipo de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje? ¿cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje? Es en esta competencia, en donde el profesor debe conocer y comprender la noción de *configuración didáctica* definida por Godino et al. (2006), como una herramienta para el análisis de las interacciones tanto personales como materiales, en los procesos de estudio matemático, conociendo las diferentes configuraciones didácticas que se pueden implementar y que por lo tanto, generen un impacto en el aprendizaje de los estudiantes.

3.6.1.4 Competencia de análisis normativo.

Esta competencia debe permitir responder las preguntas: ¿qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales? ¿quién, cómo y cuándo se establecen las normas?

¿cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático? El profesor debe conocer, comprender y valorar la dimensión normativa (D'amore et al., 2007; Godino et al., 2009), diseñando acciones formativas que permitan su uso instruccional.

3.6.1.5 Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica.

La noción de idoneidad didáctica planteada por Godino (2013), se define como el grado en que un proceso de instrucción reúne ciertas características que lo describen como idóneo (adecuado) para lograr los significados personales de los estudiantes (aprendizaje) y los significados institucionales buscados (enseñanza), que tienen en cuenta los recursos del medio (entorno).

3.6.2 Competencia matemático-didáctica docente

De acuerdo con lo planteado por Pino-Fan et al. (2023), la formulación del término competencia, debe ser definida para establecer sus niveles de desarrollo y formular descriptores, que orienten su evaluación. De este modo, el profesor podrá poner en acción sus habilidades, conocimientos didáctico-matemáticos y actitudes para llevar a cabo una práctica orientada a la resolución de problemas profesionales. En este sentido, y siguiendo su propuesta teórico-metodológica, se busca integrar la noción de competencia y la noción de saber a través de una sola denominada la noción de “competencia matemático-didáctica docente”. Esta noción incluye una propuesta estructurada de competencias y subcompetencias, cada una con distintos niveles de logro para guiar su desarrollo. En línea con este enfoque, el uso de este modelo contribuye a la interpretación y comprensión de los conocimientos y competencias que posee el profesor, tanto en geometría como en didáctica, en su relación con la enseñanza de las cónicas en la educación media.

Pino-Fan y colaboradores (2023), sobre la base de los estudios realizados en torno al conocimiento y competencias del profesor y asumiendo que el conocimiento se encuentra implicado en el desarrollo de competencias, identifican dos competencias clave: (1) la competencia matemática-geométrica y (2) la competencia de análisis e intervención didáctica. A la vez, estas dos competencias, comprenden tres y cuatro subcompetencias, respectivamente, para las cuales proponen cuatro niveles de logro para cada una, caracterizados por indicadores de las acciones específicas que deben ser realizadas por los profesores de matemáticas y que permiten valorar los conocimientos y competencias del profesor. En este orden de ideas, la propuesta de Pino-Fan et al. (2023) se interpreta como una operacionalización del modelo CCDDM (Godino et al., 2016; 2017) en términos de las dos “macro competencias” y las subcompetencias que las componen, representando un avance en la caracterización de este tipo de conocimiento (Pino-Fan et al., 2023). En la Figura 3.16 se presenta de manera esquemática la propuesta de Pino-Fan y colaboradores, en la que se puede observar las dos competencias principales y las subcompetencias correspondientes.

A continuación, se presenta una breve descripción de todas las subcompetencias, en función de las dos competencias principales que venimos refiriendo.

Para la *competencia matemática-geométrica* del profesor, las subcompetencias son:

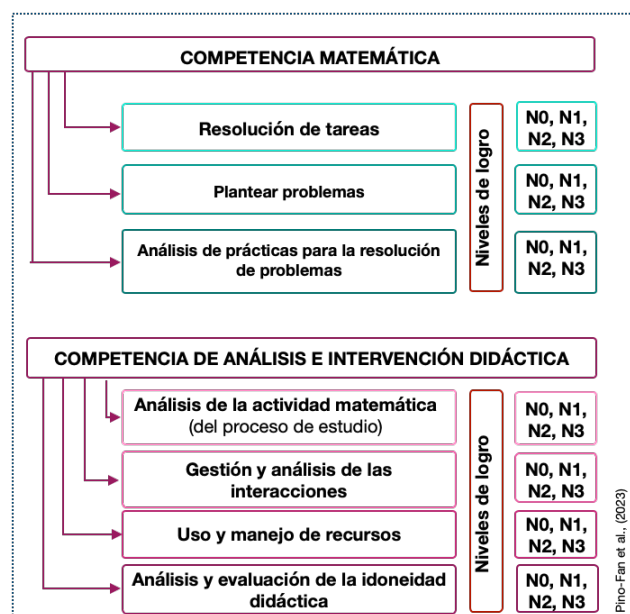
3.6.2.1 Resolución de tareas.

El profesor es visto como el proveedor de problemas matemáticos, asociados a técnicas de solución donde sean tenidas en cuenta, las aptitudes de los estudiantes, sus conocimientos previos, lineamientos curriculares, los objetos matemáticos, heurísticos y de resolución. Sus niveles de desarrollo se basan en las nociones de conocimiento común, ampliado y la faceta epistémica del modelo CDM.

3.6.2.2 Plantear problemas.

El profesor usa su conocimiento matemático especializado (faceta epistémica) para proponer tareas relacionadas con el estudio de un objeto matemático. El profesor considera los posibles conflictos o errores que enfrentan los estudiantes durante el desarrollo de la práctica, permitiéndole diseñar o proponer tareas para estudiar nociones matemáticas.

Figura 3.16 Competencias Matemáticas y de Análisis e Intervención Didáctica.



Fuente: Elaboración propia a partir de la propuesta de Pino-Fan et al. (2023)

3.6.2.3 Análisis de prácticas para la resolución de problemas.

Esta subcompetencia conecta con la competencia de análisis e intervención didáctica, definida por Font (2011) y Giménez et al. (2013), como el diseñar, aplicar y evaluar secuencias de aprendizaje, utilizando técnicas de análisis didáctico y criterios de calidad. En este sentido, las herramientas de análisis epistémico y cognitivo del modelo CDM son fundamentales para identificar, organizar e interpretar los saberes involucrados en la enseñanza de un objeto matemático, lo cual permite al profesor, realizar un análisis sistemático del contenido y de los

procesos cognitivos implicados en su aprendizaje aportando significativamente al desarrollo de esta subcompetencia.

Para la *competencia de análisis e intervención didáctica*, las subcompetencias son:

3.6.2.4 Análisis de la actividad matemática.

El profesor pone en juego su conocimiento didáctico-matemático (CDM) para analizar la actividad matemática que puede surgir en cualquiera de las etapas del diseño didáctico. Esta actividad puede surgir de forma operativa o discursiva en las prácticas del docente o de los estudiantes.

3.6.2.5 Gestión y análisis de las interacciones.

Los profesores deben ser competentes en el diseño y manejo de las configuraciones didácticas y debe conocer los múltiples tipos de configuraciones didácticas que se pueden implementar, el efecto que causa en el aprendizaje de los estudiantes y cómo estas pueden ser diseñadas y gestionadas en procesos de instrucción específicos.

3.6.2.6 Uso y manejo de recursos.

Los profesores deben utilizar de manera competente los recursos materiales (libros de texto, tablero, manipulativos) y distribuir adecuadamente el tiempo durante el proceso de estudio. Lo anterior, para que el profesor pueda adaptarse a los diversos contextos en los que se realizan los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

3.6.2.7 Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica.

En esta subcompetencia, el docente debe desarrollar sus habilidades reflexivas para prever, actuar y buscar posibles mejoras para los procesos de estudio, garantizando y mejorando las oportunidades de aprendizaje. Para ello el EOS propone la idoneidad didáctica como herramienta fundamental (Breda et al., 2017; Pino-Fan et al., 2017). Para el análisis de la

idoneidad didáctica, se hace uso de los indicadores propuestos por Godino (2013) en cada una de las idoneidades parciales y sus interacciones (epistémica, cognitiva, afectiva, interaccional, mediacional, ecológica); esto, con el fin de valorar las acciones formativas y planificadas por el profesor, lo cual, se hace a partir del diseño y desarrollo del Taller de formación (TF-CDM) dirigida a profesores en servicio.

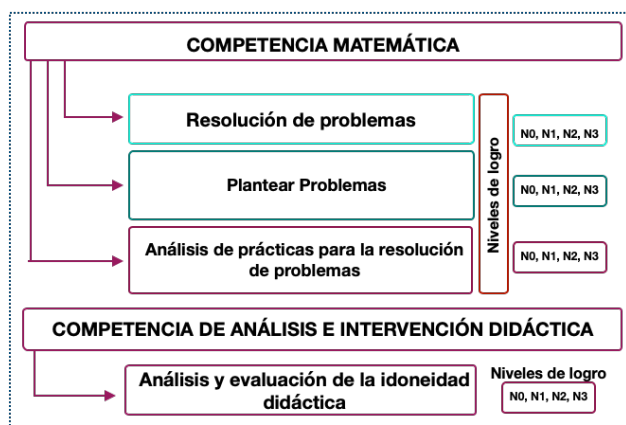
En función de lo expuesto en este apartado, se puede observar que el uso del modelo CCDDM (Godino et al., 2017) y lo propuesto por Pino-fan et al. (2023) da lugar a un estudio analítico de los diferentes aspectos involucrados en el desarrollo de conocimiento y competencias didáctico matemáticos del profesor, la “competencia matemático-didáctica docente”. Lo anterior, permite sustentar el desarrollo de las acciones principales para la realización de la presente investigación, como son el diseño y aplicación del cuestionario APDM-GC4 y el diseño e implementación del Taller TF-CDM, puesto que orientan, valoran y desarrollan, el análisis didáctico-matemático de profesores en servicio en torno a la geometría, específicamente en el estudio de las cónicas en la educación media.

3.6.3 Valoración y desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas

Tal y como se planteó en la pregunta de investigación y en la formulación de los objetivos, la esencia de esta investigación está en la posibilidad de realizar acciones que permitan el desarrollo de conocimiento y competencias profesionales del profesor de matemáticas. En este sentido, tanto el diseño y aplicación del cuestionario APDM-GC4 como el diseño e implementación del taller TF-CDM, pretenden valorar (diagnosticar) el estado de ese desarrollo en los profesores a los que se les aplicará el instrumento y se intentará lograr ese desarrollo con los profesores que participarán en el taller.

Para el diseño y aplicación del cuestionario APDM-GC4, la Figura 3.17 presenta esquemáticamente las competencias y subcompetencias que serán valoradas por medio de la aplicación de este instrumento. Ello involucra: (a) una valoración de la *Competencia Matemática-Geométrica*, por medio de las subcompetencias: (i) *Resolución de problemas*, (ii) *Planteamiento de problemas*, y (iii) *Análisis de prácticas para la Resolución de Tareas*, (b) una valoración de la competencia de *Análisis e intervención didáctica*, por medio de la subcompetencia: *Reflexión en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje*. La elección de estas cuatro subcompetencias, de las siete propuestas por Pino-Fan et al. (2023), obedece a ajustes realizados en el proceso de validación del cuestionario CCDM-GC que se presentan en el capítulo 5 de resultados de este informe.

Figura 3.17 Competencias y sub competencias que se valoran por medio del APDM-GC4.

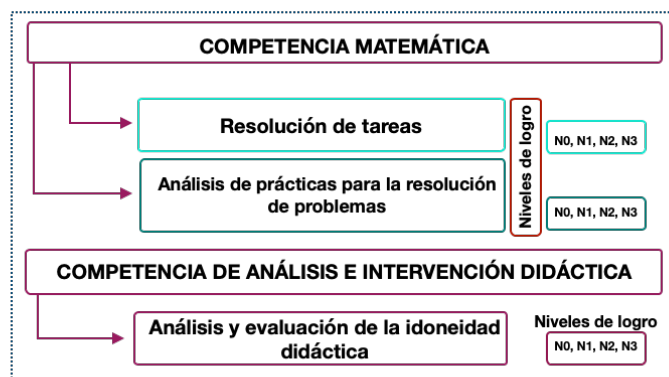


Fuente: elaboración propia basada en lo propuesto por Pino-Fan et al., (2023).

Para el diseño e implementación del taller TF-CDM, con el que se pretenderá el desarrollo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor, en la Figura 3.18 se esquematizan las competencias y subcompetencias que serán objeto de tal desarrollo. En este sentido, se encuentran involucradas: (a) la *Competencia Matemática-Geométrica* cuyo desarrollo se fomentará por medio de las subcomeptencias: (i) *Resolución de problemas* y (ii) *Análisis de prácticas para la resolución de problemas*; (b) la *Competencia de Análisis e Intervención*

Didáctica cuyo desarrollo se pretenderá por medio de la subcompetencia *Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica*. Para tales efectos, en el caso del desarrollo de la *Competencia Matemática-Geométrica* se propondrá al profesor participante, por medio del uso del Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas, realizar actividades en las que este utilice técnicas de análisis didáctico para el reconocimiento de objetos y significados matemáticos puestos en juego en la resolución de problemas, así como la identificación de conflictos potenciales que pueden tener el alumnado en tal resolución. Este reconocimiento contribuye a profundizar en el conocimiento didáctico-matemático del profesor, en sus facetas epistémica y cognitiva (Benito, 2019; Bravo, 2023), y le faculta a realizar una actividad docente informada y consciente de la diversidad de significados puestos en juego en la resolución de los problemas matemáticos involucrados (Beltrán, 2019; Chen, 2013).

Figura 3.18 Competencias y sub competencias que orientan el Taller TF-CDM.



Fuente: elaboración propia basada en lo propuesto por Pino-Fan et al. (2023).

En el caso de la *Competencia de Análisis e Intervención Didáctica* se hará uso de la Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje, la cual se aplicará sobre unidades didácticas elaboradas, tanto por los profesores participantes como por la profesora-investigadora. El uso de esta pauta permitirá establecer criterios de calidad, en el diseño de su planeación, su implementación, su evaluación y la posible elaboración de propuestas para su mejora. La noción

de idoneidad didáctica, involucrada en el uso de esta pauta, ayudará a responder preguntas como ¿cuál es el grado de idoneidad didáctica de los procesos de enseñanza y aprendizaje que el profesor pretende implementar por medio de su planeación? y ¿Qué cambios se deben hacer en el diseño o implementación del proceso de instrucción propuesto por el profesor, para aumentar su idoneidad didáctica en el futuro? La idoneidad didáctica por lo tanto, permitirá analizar características específicas que se consideran son pertinentes (ideales) para lograr la adecuación de significados de los estudiantes (aprendizaje - faceta cognitiva) y los fines y métodos instruccionales pretendidos (enseñanza – faceta instruccional), considerando los recursos disponibles (ambiente – faceta mediacional) (Pino-Fan et al., 2023). La selección de estas subcompetencias ha obedecido a delimitar la duración del taller para potenciar la participación de los profesores convocados para su realización.

CAPÍTULO 4. METODOLOGÍA

4.1 Introducción

En este capítulo se expone la metodología que se ha seguido en la presente investigación. Se presenta el diseño metodológico y el enfoque de investigación. El diseño metodológico corresponde a una Investigación de Diseño Educativo (*Eduactional Design Research*). El estudio se desarrolla siguiendo un enfoque mixto, articulado en dos vertientes complementarias: una cuantitativa y otra cualitativa. Dicho enfoque permite la integración de tres tipos de investigación: exploratoria, desde ambas perspectivas; descriptiva, desde la perspectiva cuantitativa; e interpretativa, desde la perspectiva cualitativa. Se presentan y describen las unidades de análisis y de trabajo estudiadas, así como las consideraciones éticas tomadas en cuenta en el tratamiento de datos de los participantes. Se expone de manera detallada lo relativo a los instrumentos y técnicas utilizados para recoger y analizar la información. Finalmente, se presenta una descripción de las fases y momentos en los que se organizan las diferentes acciones y se articulan los diferentes procedimientos desarrollados en esta investigación. En la Figura 4.1 se presenta un esquema en el que ilustra el marco metodológico puesto en juego.

4.2 Diseño metodológico

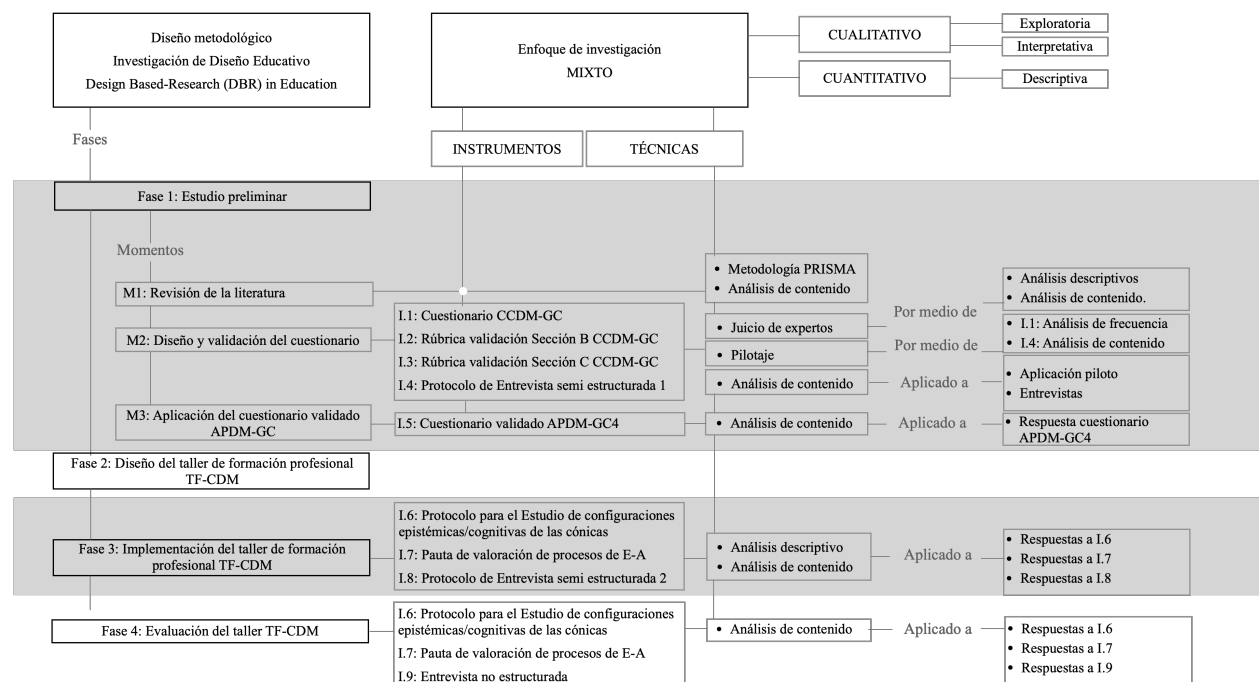
En función del marco general (fases/partes) que comprende el desarrollo de esta investigación, el diseño metodológico implementado corresponde a una “Investigación de Diseño Educativo” (*Educational Design Research*) (Anderson y Shattuck, 2012; Bakker, 2018; McKenney y Reeves, 2018). Se asume la perspectiva desde la cual la Investigación de Diseño Educativo (en adelante IDE) incluye el desarrollo de una investigación de enfoque mixto (Collins et al., 2004; Proctor, 2020; Ryu, 2020), lo que contrasta con la concepción cualitativista de este paradigma de investigación, sostenida por algunos investigadores (Bakker, 2018). La IDE se

viene estableciendo como un paradigma relevante en la investigación educativa contemporánea, dada sus características metodológicas que se compaginan muy apropiadamente con la práctica y la innovación educativa (McKenney y Reeves, 2018; Rinaudo y Donolo, 2010; The Design-Based Research Collective, 2003). Desde una perspectiva epistemológica, constituye una metodología de investigación que contribuye a la producción de conocimiento didáctico al vincular de manera intrínseca teoría y práctica, ayudando a comprender las relaciones entre estas, mediadas por la implementación de diseños didácticos en contextos reales de instrucción (The Design-Based Research Collective, 2003, p. 5).

En la realización de esta investigación, el uso de la IDE se hace en un primer ciclo, en el cual el desarrollo de las acciones y los procedimientos se articulan en las cuatro fases características de este diseño metodológico, a saber: (1) Estudio preliminar, (2) Diseño, (3) Implementación, (4) Evaluación del diseño implementado (Bakker, 2018; McKenney y Reeves, 2018). Una descripción de cada una de estas fases se presenta en el apartado 4.8 de este capítulo. Como puede observarse, en la Fase 1, se realiza un estudio preliminar que comprende tres momentos: el primero consiste en la revisión de la literatura, el segundo comprende el diseño y validación de un cuestionario para indagar sobre conocimientos y competencias del profesor de matemáticas en torno a cónicas, y el tercero se refiere a la aplicación del cuestionario validado. La complejidad de esta fase consiste en que al menos dos de estos tres momentos, en sí mismos, constituyen investigaciones en las que participan personas, se aplican instrumentos, se recoge y se analiza información, y se obtienen resultados. Esto se ha debido a que el estudio preliminar, exploratorio, requirió, además de una revisión de la literatura correspondiente, de una indagación específica sobre la manifestación empírica de la categoría fundamental de estudio: Conocimiento y competencias didáctico-matemáticos del profesor, para lo cual fue necesario el diseño, validación y aplicación de un cuestionario de investigación. Las fases subsiguientes de la

investigación son más simples, sin embargo, son las más importantes, y se refieren a acciones dirigidas al diseño, implementación y evaluación de la implementación de un taller de formación profesional, lo cual caracteriza la realización de esta investigación.

Figura 4.1 *Marco metodológico general de la investigación*



Fuente: Elaboración propia.

4.3 Enfoque de investigación

Dentro del marco de la IDE, en este estudio se adopta un enfoque metodológico mixto (Collins et al., 2004; Proctor, 2020; Ryu, 2020), el cual comprende el uso de técnicas e instrumentos de índole tanto cualitativa como cuantitativa para la recolección, análisis e interpretación de los datos, con el fin de obtener una comprensión del objeto de estudio (Creswell y Creswell, 2018; Hernández-Sampieri et al., 2014). Para Hernández-Sampieri et al. (2014; p. 534), los métodos mixtos constituyen un enfoque de investigación que combina de manera sistemática, empírica y crítica tanto la recopilación como el análisis de datos cuantitativos y cualitativos. Desde la perspectiva cuantitativa se realiza una investigación de tipo descriptiva,

mientras que desde la perspectiva cualitativa se desarrolla una investigación de tipo interpretativa (Hernández-Sampieri et al. 2014). En este sentido, la exploración de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas en servicio se realiza mediante el diseño y aplicación de un instrumento que aporta información desde ambas perspectivas metodológicas: cuantitativa y cualitativa. Asimismo, la implementación de un taller de formación permite indagar sobre el desarrollo de conocimientos y competencias profesionales del profesor desde el uso de técnicas descriptivas y cualitativas, en las percepciones, producciones y significados construidos por los participantes. La triangulación de estas dos fuentes y el uso de una diversidad de instrumentos, que serán referidos más adelante, constituye la base para la elaboración de un refinamiento del diseño formativo implementado, cumpliendo así con el primer ciclo de la investigación de diseño: estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación.

4.4 Unidad de análisis y unidad de trabajo

4.4.1 La Unidad de análisis

Estuvo constituida por las categorías relacionadas con los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos de los profesores en torno a la enseñanza de la geometría escolar de la educación media. En particular se analizan: (a) los conocimientos y competencias didáctico-matemáticos iniciales, (b) los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas movilizados a través del taller de formación profesional, y (c) las relaciones entre ambos, en el marco del enfoque Ontosemiótico.

4.4.1.1 Categoría de estudio.

La categoría estudiada en esta investigación es: *Conocimientos y competencias didáctico-matemáticos del profesor*. Esta categoría se estudia desde la perspectiva del enfoque Ontosemiótico haciendo uso del modelo “Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas

del Profesor” (CCDM) (Godino et al., 2016; 2017; Pino-Fan et al., 2023). Comprende dos competencias fundamentales propuesta por Pino-Fan et al. (2023), a saber: (1) Competencia Matemática-Geométrica y (2) Competencia de Análisis e Intervención Didáctica, las cuales se han definido como subcategorías de la categoría principal. Una descripción detallada de estas competencias se ha presentado en el apartado 3.5 (Capítulo 3) de este trabajo.

Para efectos de este informe de investigación, la categoría de estudio se analiza desde dos perspectivas. Una de carácter exploratorio a través de la aplicación de un cuestionario y otra, a través de una intervención dirigida a su desarrollo, por medio de un taller de formación. De esta manera, la categoría de estudio será analizada por medio de las respuestas de profesores en servicio de acuerdo con la aplicación del cuestionario, enfocándonos en el análisis de las respuestas de cuatro subcompetencias correspondientes a las dos subcategorías antes referidas, a saber: (1) Competencia Matemática-Geométrica; las subcompetencias: (1a) Resolución de problemas, (1b) Plantear problemas (1c) Análisis de prácticas para la resolución de problemas. (2) Competencia de análisis e intervención didáctica, la subcompetencia: (2d) Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica. Una descripción de estas subcompetencias ha sido presentada en el Capítulo 3, apartado 3.6 de este informe de investigación. Asimismo, la categoría de estudio será analizada a través de la exploración e interpretación de percepciones, producciones y significados construidos por los profesores, en el taller de formación profesional. La operacionalización de las subcompetencias, su valoración, se realiza por medio de los niveles de logro propuestos por Pino-Fan et al. (2023), lo cuales se encuentran expuestos en el [Anexo 29](#). Particularmente, en relación con la Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica, esta operacionalización viene dada por la comparación entre las valoraciones realizadas por los profesores participantes a una planeación y las realizadas por la profesora-investigadora.

El objeto matemático estudiado es *las secciones cónicas*, el cual forma parte del currículo de la educación media en Colombia (décimo y undécimo grado).

4.4.2 La Unidad de trabajo

Corresponde a los profesores de matemáticas en servicio cuyas producciones (respuestas, análisis, aportaciones) se recogieron y analizaron en las distintas fases del estudio. Se contó con la participación de (19) docentes de instituciones educativas públicas urbanas de Pereira (Colombia), regidos por los Decretos 1278 y 2277, con más de diez años de experiencia en la enseñanza de las matemáticas en los grados décimo y undécimo, quienes incluyen en su práctica docente la enseñanza de la geometría establecida en el currículo de educación media (MEN, 2006). En tal sentido, se reconocen dos unidades de trabajo específicas: (1) El grupo de catorce (14) profesores que voluntariamente respondieron al cuestionario sobre conocimientos didáctico-matemáticos en geometría, específicamente de las cónicas, siete para la aplicación piloto y siete para la aplicación del cuestionario validado. (2) El grupo de cinco profesores en servicio que voluntariamente participaron en el taller de formación profesional. El muestreo se llevó a cabo mediante una invitación formal dirigida a cada una de las unidades de trabajo. En la primera unidad, la invitación se realizó a 20 profesores de diferentes instituciones educativas a través de correo electrónico y mensajes de WhatsApp. En la segunda, se contó con el apoyo de la Secretaría de Educación Municipal y de la institución educativa donde la investigadora labora actualmente, con el fin de convocar a diez instituciones educativas del municipio de Pereira a participar en el taller de formación profesional para profesores de matemáticas. No obstante, a pesar del apoyo recibido, sólo se contó con cinco profesores.

4.5 Consideraciones éticas

Para dar cumplimiento a las responsabilidades éticas y de gestión de la información, se explicó a los profesores participantes, sobre el desarrollo de la presente investigación y los cuidados que se tendría con la información obtenida. Se aclaró que no se emplearía el nombre de los profesores en el análisis y se informó sobre cuáles serían los parámetros de uso de los datos, además de los compromisos y responsabilidades del investigador en la conservación del total anonimato de los participantes.

4.6 Técnicas e instrumentos

Las técnicas e instrumentos empleados en la investigación tuvieron como marco, para la recolección de la información, los siguientes ámbitos de acción: (a) validación del cuestionario inicial, (b) aplicación del cuestionario validado, y (c) desarrollo del taller de formación profesional. En cada uno de estos ámbitos se aplican técnicas, instrumentos y métodos de análisis específicos. En la validación del cuestionario inicial se usaron las técnicas del cuestionario, juicio de expertos, aplicación piloto y la entrevista; los instrumentos aplicados fueron un cuestionario de preguntas abiertas y cerradas, rúbricas de valoración y protocolos de entrevista semiestructurada; y los análisis aplicados fueron descriptivo y de contenido. Para el ámbito de la aplicación del cuestionario validado se usó la técnica del cuestionario, el instrumento fue un cuestionario de preguntas abiertas y cerradas y los análisis utilizados fueron descriptivo y de contenido. Para el ámbito de desarrollo del taller las técnicas utilizadas fueron la observación, acopio de las actividades de análisis realizadas por los profesores participantes o la investigadora y la entrevista; los instrumentos fueron protocolos o pautas de análisis, y protocolo de entrevista semiestructurada; y los análisis aplicados fueron descriptivo y de contenido.

A continuación, se presenta en la Tabla 4.1 las técnicas y los instrumentos que se emplearon, referidos anteriormente. Luego se presenta una breve descripción de las técnicas y los instrumentos utilizados.

Tabla 4.1 *Técnicas, tipos de instrumentos y métodos de análisis*

Técnica	Tipo de Instrumento	Método de análisis
Cuestionario	I.1. Cuestionario CCDM-GC I.5. Cuestionario validado APDM-GC4	Análisis de frecuencia Análisis de contenido
Validez de contenido por medio de juicio de expertos	I.2. Rúbrica validación Sección B CCDM-GC I.3. Rúbrica de validación Sección C CCDM-GC	Análisis de frecuencia Análisis de contenido
Actividades de análisis	I.6. Estudio de configuraciones epistémicas I.7. Pauta de valoración de procesos de E-A.	Análisis descriptivo Análisis de contenido
Entrevista	I.4. Protocolo de Entrevista semiestructurada 1 – cuestionario piloto I.8. Protocolo de Entrevista semiestructurada 2 – Taller de formación I.9. Entrevista no estructurada	Análisis de contenido

Fuente: elaboración propia.

4.6.1 Técnicas

Se observa en la Tabla 4.1 que se ha hecho uso de cinco técnica diferentes en el desarrollo de la investigación, a continuación se describen cada una de ellas.

Observación: La investigación nace de la realidad educativa, por ello se consideró importante realizar observaciones intencionadas durante el taller de formación. Hernández-Sampieri et al. (2014) plantea que “la observación cualitativa no es mera contemplación; implica adentrarnos profundamente en situaciones sociales y mantener un papel activo, así como una reflexión permanente. Estar atento a los detalles, sucesos, eventos e interacciones” (p. 399). El propósito general de la observación en el taller, es evidenciar los procesos que en él se generan,

con el fin de reflexionar acerca de los aspectos más relevantes que surgen en la interacción entre el tema a investigar y los participantes.

Cuestionario: Un cuestionario consiste en un conjunto de preguntas respecto de una o más variables a medir, debe ser congruente con el planteamiento del problema y la pregunta de investigación (Hernandez-Sampieri, 2014). Con el cuestionario se buscó reunir percepciones, opiniones y comprensiones que los profesores tenían en torno a su actividad profesional al enseñar el contenido de las cónicas. El cuestionario tiene como fin determinar un nivel inicial (diagnóstico) del desarrollo del conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor. En el siguiente apartado sobre instrumentos, se hace una descripción detallada del mismo.

Validez de contenido por medio de Juicio de Expertos: Escobar y Cuervo (2008) definen la validez de contenido por medio de un Juicio de Expertos como “una opinión informada de personas con trayectoria en el tema, que son reconocidas por otros como expertos cualificados en éste, y que pueden dar información, evidencia, juicios y valoraciones” (p. 29). En tal sentido, la validación del cuestionario diseñado y referido en el apartado 4.7, permite garantizar que los ítems del cuestionario representen y aborden adecuadamente las competencias y subcompetencias que se buscan evaluar, guardando en todo momento, la pertinencia y coherencia con los objetivos de la investigación.

Actividades de análisis realizadas por los profesores: Durante el proceso de implementación del taller de formación de profesores, tuvo lugar el análisis de las actividades desarrolladas por parte de los participantes, a través de dos instrumentos diseñados para ello: *Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas* y *Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza aprendizaje* (Idoneidad Didáctica aplicada a planeaciones de la enseñanza elaboradas por docentes participantes y la investigadora) en el

apartado Instrumentos, se hace una descripción más amplia de cada uno y el propósito de su implementación.

Entrevista: Se realiza una entrevista semiestructurada en los términos expuestos por Hernández-Sampieri et al. (2014): “Las entrevistas semiestructuradas se basan en una guía de asuntos o preguntas y el entrevistador tiene la libertad de introducir preguntas adicionales para precisar conceptos u obtener mayor información.” (p. 403). La primera entrevista semiestructurada, se realizó como parte de la aplicación piloto del *Cuestionario sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de geometría en torno a cónicas (CCDM-GC)*. Asimismo, se aplicaron dos entrevistas del mismo tipo, al finalizar cada una de las sesiones del taller de formación, la primera, sobre reflexiones en torno a la realización de análisis de las configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas, y la segunda, acerca del análisis de las planeaciones elaboradas por los profesores y la investigadora, autora del presente informe de investigación, a través de la valoración de procesos de enseñanza aprendizaje (Idoneidad Didáctica de las planeaciones). Su objetivo fue recolectar datos cualitativos que permitieran la triangulación de la información recogida haciendo uso de las técnicas antes referidas.

4.6.2 Instrumentos

A continuación, se presenta en la Tabla 4.2 los ocho instrumentos utilizados en las cuatro fases de investigación, que corresponden con los cinco tipos de instrumentos presentados en la Tabla 4.1. Luego se proporciona una breve descripción de cada uno.

Tabla 4.2 Instrumentos y fases en las que se usan en la investigación

No.	Instrumento	Fases
1	Cuestionario CCDM-GC	Estudio preliminar
2	Rúbrica Validez de Contenido - Sección B del Cuestionario CCDM-GC	
3	Rúbrica Validez de Contenido - Sección C del Cuestionario CCDM-GC	
4	Protocolo de Entrevista semi estructurada 1	

5	Cuestionario validado APDM-GC4	Diseño e implementación
6	Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas	
7	Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje	Evaluación
8	Protocolo de Entrevista semiestructurada 2	
9	Entrevista no estructurada	

Fuente: elaboración propia.

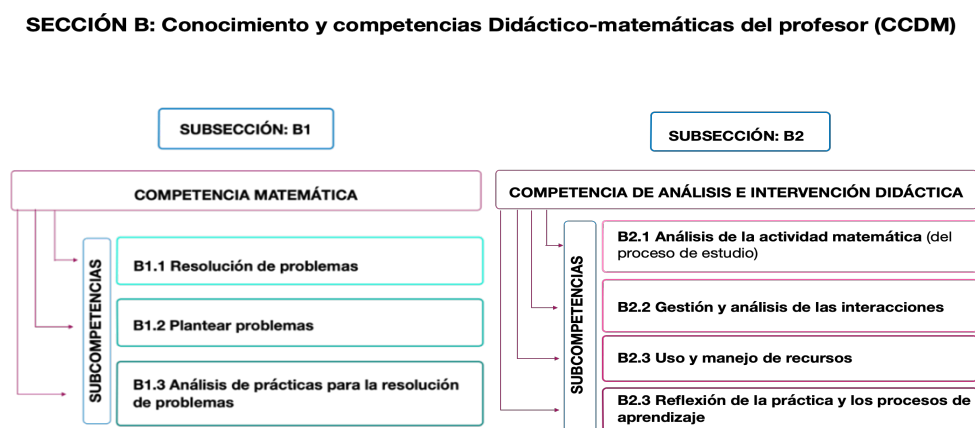
4.6.2.1 Instrumento I.1: Cuestionario sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de geometría en torno a cónicas (CCDM-GC).

El *Cuestionario sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de geometría en torno a cónicas* (ver [Anexo 1](#)) consta de tres secciones: A, B, C. En la Sección A se solicita información personal y académica general del profesor participante. Esta sección no fue tomada en cuenta en el proceso de validación del cual informamos. En la Sección B se valora con qué frecuencia el profesor realiza acciones relacionadas con el desarrollo de dos competencias: la Matemático-Geométrica y la de Análisis e Intervención Didáctica. Esta sección está compuesta por las Subsecciones B1 y B2, las cuales se refieren a estas dos competencias, respectivamente. A la vez, estas subsecciones están divididas en partes: B1.1, B1.2, B1.3 y B2.1, B2.2, B2.3, B2.4, respectivamente, que se refieren a cada subcompetencia de las dos competencias antes referidas. La construcción de este instrumento en su Sección B, consistió en elaborar ítems de selección, utilizando una escala tipo Likert con el fin de evaluar dos competencias macro (Subsección B1: Competencia Matemática-Geométrica y Subsección B2: Competencia de Análisis e intervención didáctica) y siete subcompetencias (tres para la primera competencia y cuatro para la segunda, tal y como se observa en la Figura 4.2. B1.1: Resolución de problemas; B1.2: Plantear problemas; B1.3: Análisis de la práctica de resolución de problemas; que corresponden a la competencia: “B1. Competencias matemático – geométricas” (correspondientes a la Subsección B1 del instrumento) y las subcompetencias: B2.1: Análisis de

la actividad matemática del proceso de estudio; B2.2: Gestión y análisis de las interacciones; B2.3: Uso y manejo de recursos; B2.4: Reflexión en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje; que corresponden a la competencia: “B2. Competencias de análisis e intervención didáctica” (correspondientes a la Subsección B2 del instrumento). La subsección B1 contiene 26 ítems y la subsección B2 65 ítems.

En la Sección C se evalúa el desarrollo de la Competencia Matemático-Geométrica por medio de la realización de tres tareas en torno a las cónicas. La primera tarea evalúa la Subcompetencia *Resolución de Problemas*, la segunda tarea busca evaluar la Subcompetencia *Planteamiento de problemas* y una tercera tarea que consiste en evaluar la Subcompetencia *Análisis de la práctica de resolución de problemas*. En esta última, se pide al profesor, que además de resolver el problema que se le plantea, también realice un análisis didáctico-matemático de su resolución.

Figura 4.2 Relación de componentes de la sección B del Instrumento CCDM-GC



Fuente: Elaboración propia. Adaptado de Pino-Fan et al. (2023).

4.6.2.2 Instrumento I.2: Rúbrica de evaluación de la Validez de Contenido - Sección B del CCDM-GC.

Con el fin de estudiar y establecer la validez de contenido de la Sección B del cuestionario CCDM-GC se elaboró una rúbrica por medio de la cual se valoró cada uno de los ítems de esa sección (ver [Anexo 2](#)). Las categorías utilizadas para valorar los ítems son: Claridad, Coherencia y Relevancia. Para la valoración se hizo uso de indicadores de logro que se evalúan asignando alguno de los niveles: cero, bajo, moderado, alto (Galicia et al., 2017, p. 49). Se solicita a los Jueces, evaluar cada uno de los ítems de las diferentes subcompetencias (ver Figura 4.2). Para las valoraciones de cada ítem los jueces asignan alguno de los niveles mencionados, según las categorías antes referidas. Asimismo, se solicita a los Jueces incluir, si lo estiman necesario, observaciones relativas a cada subsección de la sección B del cuestionario en el espacio: “Reflexión o comentarios sobre...”. Una vez finalizada la valoración de los ítems, se les solicita la opinión (adecuado, no adecuado) sobre el formato online del instrumento propuesto a los profesores participantes, al cual se podía acceder por medio de este link.

4.6.2.3 Instrumento I.3: Rúbrica de evaluación de la Validez de Contenido - Sección C del CCDM-GC.

Este instrumento tiene la misma forma del “Instrumento I.2”, se diferencia de este por el contenido al que va dirigida su aplicación. El formato online de este puede verse en el link. Un ejemplar de esta rúbrica se presenta en el [Anexo 3](#).

4.6.2.4 Instrumento I.4: Protocolo de Entrevista semiestructurada 1.

En este instrumento se hace un diseño de protocolo para la entrevista semiestructurada 1 de la aplicación piloto del cuestionario.

4.6.2.5 Instrumento I.5: Cuestionario de Autoevaluación de las Prácticas Didáctico-Matemáticas del profesor de Geometría en torno a Cónicas (APDM-GC).

El *Cuestionario de Autoevaluación de las Prácticas Didáctico-Matemáticas del profesor de Geometría en torno a Cónicas (APDM-GC)* (ver [Anexo 4](#)) corresponde a la versión validada y ajustada de los ítems originalmente propuestos para cada una de las subcompetencias del Cuestionario CCDM-GC. El título del cuestionario representa el cambio sugerido por uno de los jueces, con amplio y reconocido prestigio en el ámbito de la investigación en educación matemática. Este proceso de revisión dio lugar a la versión denominada *Cuestionario de Autoevaluación de las Prácticas Didáctico-Matemáticas del profesor de Geometría en torno a Cónicas (APDM-GC4)* (ver [Anexo 5](#)) en donde el número 4 hace referencia a las cuatro subcompetencias seleccionadas. Esta selección fue el resultado de las recomendaciones de los Jueces Expertos, así como de las opiniones recogidas del profesorado participante de la aplicación piloto del instrumento, que se presentan con detalle en el capítulo de resultados. Las subcompetencias que conforman el cuestionario *APDM-GC4* (ver [Anexo 5](#)) son: La Subcompetencia *Resolución de Problemas*, la Subcompetencia *Plantear problemas*, la Subcompetencia *Análisis de la práctica de resolución de problemas* y la Subcompetencia *Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica*.

4.6.2.6 Instrumento I.6: Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas.

Una configuración es una “trama” de objetos y procesos que se manifiesta en una práctica matemática, por ejemplo, en la resolución de un problema. En el caso de una configuración epistémica se refiere a los objetos puestos en juego en la resolución de un problema y los significados de uso de estos. El instrumento al cual hacemos referencia es una adaptación de la

Guía para el Reconocimiento de Objetos y Significados (GROS) propuesta en Rivas y Godino (2010), la cual permite realizar un análisis epistémico/cognitivo de la resolución de un problema matemático (ver [Anexo 6](#)). La realización de esta acción se utiliza como un indicador del desarrollo de las Subcompetencias de Resolución de problemas y Análisis de prácticas para la resolución de problemas (apartados 3.5 y 3.6 del capítulo 3). El propósito de esta herramienta de análisis, y su uso por parte de los profesores es observar el desarrollo de estas Subcompetencias, a través del reconocimiento de las configuraciones epistémicas y cognitivas de las cónicas, donde se analizan los tipos de objetos matemáticos y los significados de acuerdo con el reconocimiento de los objetos: Elementos lingüísticos, Conceptos–definiciones, Procedimientos, Propiedades–proposiciones y Argumentos.

4.6.2.7 Instrumento I.7: Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje.

Este instrumento es una adaptación de la pauta de análisis de la Idoneidad Didáctica de Procesos de Enseñanza y Aprendizaje de la Matemática, propuesta por Godino (2013). Con esta adaptación se busca que el profesor valore cada una de las facetas de la planeación de una planeación en relación con: Valoración del contenido, Valoración cognitiva, Valoración mediacional, Valoración afectiva, Valoración interaccional, Valoración ecológica (ver [Anexo 8](#)). La realización de esta acción se utiliza como un indicador del desarrollo de la Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica (apartado 3.5 del capítulo 3)

En este instrumento, los profesores participantes en el taller de formación analizan el diseño de una planeación propuesta por un profesor participante, la cual es solicitada previamente y cuya característica principal es el abordaje de la enseñanza de alguna de las secciones cónicas en los grados de la educación media. Las valoraciones se hacen a partir de una escala tipo Likert

a través de los niveles 0 a 4, donde 0 = No; 1 = Poco frecuente; 2 = Moderadamente frecuente; 3 = Frecuente; 4 = Muy frecuente. (Ver [Anexo 8](#)). Al final de cada valoración, se deja un espacio para la reflexión de los profesores concerniente al diseño de planeación que le correspondió analizar.

4.6.2.8 Instrumento I.8: Protocolo de Entrevista semiestructurada 2.

En este instrumento se hace un diseño de protocolo para la entrevista semiestructurada sobre la implementación del taller de formación.

4.6.2.9 Instrumento I.9: Entrevista no estructurada.

En este instrumento se hace una entrevista no estructurada para la evaluación del taller de formación.

4.7 Recolección y análisis de la información

Las fuentes de información principales en la realización de la presente investigación, en relación con el desarrollo de cada una de las fases, fueron: (a) estudio teórico-metodológico de la literatura especializada y actual, (b) validación del cuestionario CDM-GC (c) aplicación del cuestionario APDM-GC4, (d) implementación del taller TF-CDM que permitió la recolección de información por medio de dos fuentes fundamentales: el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas y la valoración de la pauta de idoneidad didáctica, y (e) la evaluación del taller de formación. Las técnicas e instrumentos de recolección y análisis de la información han sido referidas en el apartado 4.6.1 y 4.6.2 de este capítulo.

4.7.1 Recolección de la información

Las fuentes de información principales en la realización de la presente investigación, en relación con el desarrollo de cada una de las fases, fueron: (a) estudio teórico-metodológico de la literatura especializada y actual, (b) validación del cuestionario CDM-GC (c) aplicación del

cuestionario CDM-GC, (d) implementación del Taller de formación TF-CDM como estrategia didáctica, que permitió la recolección de información por medio de dos fuentes fundamentales: el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas y la valoración de la pauta de idoneidad didáctica, y (e) la evaluación del taller de formación. Las técnicas e instrumentos de recolección de la información han sido referidas en el apartado anterior (4.7) de este capítulo.

4.7.2 *Análisis de la información*

Para el análisis de la información, se utilizó la técnica cualitativa de Análisis de Contenido (Krippendorff, 2018), el cual viene definido como una técnica de investigación destinada a formular, a partir de ciertos datos, inferencias reproducibles y válidas que pueden aplicarse a su contexto. Este análisis se hace primero a partir de los datos recogidos de la validación y la aplicación piloto del instrumento CCDM-GC sobre conocimientos didáctico-matemáticos en geometría específicamente de las cónicas, y de la aplicación del Instrumento APDM-GC4. Luego, a los datos obtenidos de la implementación del taller TF-CDM, con la que se pretendió el desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos, en torno a la geometría escolar de la educación media, y la aplicación de los instrumentos 6 y 7 referidos en el apartado 4.6.2 de este capítulo.

Nos servimos de elementos cuantitativos para representar a través de tablas, los datos obtenidos a lo largo del estudio, así como la frecuencia de los datos y su respectivo análisis. Lo anterior, permite la exploración de las manifestaciones de las categorías y subcategorías objeto de estudio, y al mismo tiempo favorece la organización y sistematización de los datos y la presentación de resultados para su posterior interpretación. Desde lo cualitativo-interpretativo, se realizó un proceso de codificación y categorización de las producciones de los profesores según las dimensiones del CCDM (epistémica, cognitiva e interaccional), identificando significados,

conflictos y enfoques didácticos y haciendo la triangulación entre las producciones escritas y los registros orales. Desde lo cuantitativo-descriptivo como apoyo, se elaboró el conteo de frecuencia de términos, conceptos y procedimientos, con el fin de hacer visibles posibles patrones en las respuestas. Para el primer instrumento: Protocolo para el *Estudio de configuraciones epistémica/cognitivas de las cónicas* el objeto de análisis es examinar las configuraciones epistémicas/cognitivas vinculadas a la resolución de un problema matemático. Para el segundo instrumento: Pauta para la *Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje* (Idoneidad Didáctica), el objeto de análisis es analizar las competencias didáctico-matemáticas reflejadas en la planeación diseñada por los profesores. Nos valimos de técnicas de análisis cuantitativo, por medio del uso de la herramienta de análisis estadístico chi-cuadrado, con el fin de determinar la existencia de una asociación significativa entre las categorías estudiadas en el instrumento (valoración de contenido, valoración cognitiva, valoración mediacional, valoración afectiva, valoración interaccional, valoración ecológica) primero, acerca de las planeaciones propuestas por los profesores y luego, sobre la propuesta de planeación desarrollada por la investigadora.

Con el fin de proporcionar una descripción que facilite la comprensión de los procedimientos de indagación, involucrados en la realización del trabajo de investigación, se presenta, a continuación, una descripción de las fases que se ha seguido para su desarrollo. Asimismo, se identifican los objetivos de investigación logrados con la llevada a efecto de estas fases.

4.8 Fases de la investigación

Para alcanzar el objetivo general de investigación (OG), por medio del logro de los objetivos específicos (OE1, OE2, OE3, OE4, OE5) se ha desarrollado un conjunto de acciones enmarcadas en las fases de una investigación de diseño educativo (*Educational Design Research*)

(Anderson y Shattuck, 2012; Bakker, 2018; McKenney y Reeves, 2018), a saber: estudio preliminar, diseño, implementación, evaluación y reflexión. En la Figura 4.3 se muestra la articulación de estas fases en función de los objetivos de investigación propuestos. Los resultados a los que se refiere la Figura 4.3 incluye parte de lo realizado en las fases de evaluación y reflexión.

4.8.1 Fase 1: Estudio preliminar

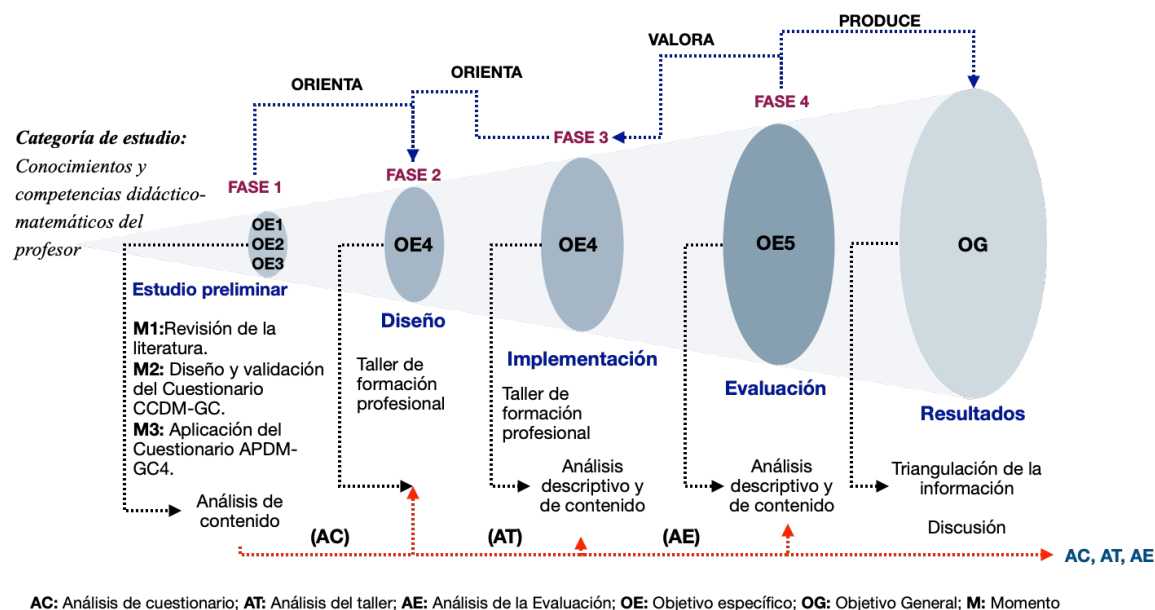
Como se muestra en la Figura 4.3, la fase de estudio preliminar busca alcanzar los objetivos OE1, OE2, OE3 de investigación. Comprende tres momentos: revisión sistemática de la literatura, diseño y validación del instrumento, y aplicación del instrumento validado, los cuales, como ya fue referido anteriormente, constituyen investigaciones en sí mismos. A continuación se presenta una breve descripción de estos.

4.8.1.1 Momento 1: Revisión sistemática de la literatura.

Para el desarrollo de este momento, se procedió a realizar una revisión sobre el estado del arte de la temática de estudio: Conocimiento del profesor de geometría en los niveles de educación media, tendencias y avances en su investigación. Esta revisión permitió obtener información relevante sobre el problema de estudio, en cuanto a lo que se conoce y se ha desarrollado en relación con el conocimiento del profesor en el ámbito de la geometría (cónicas), en los niveles de educación básica y media.

Los resultados de esta revisión han dado lugar a la publicación del artículo *Tendencias sobre el conocimiento profesional de los profesores de geometría, en la educación básica y media: Una revisión sistemática de la literatura*, (Mora y Rivas, en prensa) enviado a la Revista Colombiana de educación. La versión del manuscrito se puede ver a través del [link](#).

Figura 4.3 Fases de investigación y plan de análisis. Primer ciclo de una investigación de Diseño Educativo



Fuente: elaboración propia.

4.8.1.2 Momento 2: Diseño y Validación del Instrumento CCDM-GC.

Para el desarrollo de este momento, se plantea primero el diseño del *Cuestionario sobre conocimientos y competencias didáctico-matemáticas del profesor de geometría en torno a cónicas CCDM-GC*, el cual se desarrolla realizando dos procedimientos simultáneos, una aplicación piloto del instrumento y el estudio de validez de contenido por medio de la técnica de Juicio de Expertos. En el apartado 4.7 se ha referido a las características de este instrumento. El estudio realizado hasta la producción de este instrumento implicó: (i) la revisión sistemática de la literatura, (ii) la determinación de los indicadores de las competencias y subcompetencias de acuerdo con la herramienta propuesta por Pino-Fan et al. (2023), y (iii) el diseño de la versión inicial del cuestionario CCDM-GC. El cuestionario, cuya aplicación se informa en los resultados, ha sido diseñado de acuerdo con los indicadores propuestos en esta herramienta. La aplicación

piloto se desarrolla con un grupo de profesores de matemáticas de educación media, las características son las referidas en el apartado 4.4.

Como se ha referido en su descripción, el cuestionario CCDM-GC, está constituido por tres secciones (A, B, C). Dadas las características de las secciones del cuestionario, el estudio de la validez de contenido se realizó por secciones. La Sección A, referida a información general de los participantes, no requirió de validación. Para el estudio de validez de contenido de la Sección B, se convocó a expertos en el área de conocimientos para realizar la evaluación, guiados por la rúbrica (Instrumento I.2, [Anexo 2](#)), que permite emitir un juicio-valoración cuyo fin, es mejorar el diseño del cuestionario. Para ello se considera la correlación entre las valoraciones emitidas por los expertos y se opta por aceptar aquellas valoraciones donde exista un mayor grado de coincidencia: (a) positiva para la conservación de los ítems, (b) neutra para la revisión, ajuste o eliminación de los ítems y (c) negativa para la eliminación de los ítems. Se envió la Sección B del cuestionario y la respectiva rúbrica de evaluación a un total un grupo de 15 profesores de diferentes universidades de habla hispana, a nivel nacional e internacional, de los cuales, cinco de ellos, proporcionaron las respuestas a los ítems correspondientes. Las universidades de las cuales fueron seleccionados los expertos son: la Universidad Nacional de Río Cuarto (Argentina), la Universidad Los Lagos (Chile), la Universidad de Caldas en convenio con la Universidad Tecnológica de Pereira (Colombia), la Universidad de Barcelona (España), la Universidad de Granada (España) y la Universidad de Zaragoza (España).

Para el estudio de la Validez de contenido de la Sección C del cuestionario se siguió un procedimiento similar al implementado para la Sección B. Los jueces fueron seleccionados tomando en cuenta su trayectoria académica y experiencia docente. Para su participación, se tuvieron en cuenta indicadores como: título de posgrado en el área, experiencia docente, trabajos realizados sobre el conocimiento del profesor de matemáticas, que permitieron considerarlos

como expertos en el ámbito de la educación matemática, particularmente en el estudio del conocimiento y competencias del profesor de matemáticas. En este sentido, se seleccionaron cuatro profesores de diferentes instituciones educativas a nivel departamental, de los cuales, tres de ellos proporcionaron las respuestas a la rúbrica de evaluación de los ítems de la Sección C del cuestionario. Dos de los jueces son egresados de la Universidad Tecnológica de Pereira (Colombia) y estudiantes del programa de Doctorado en Didáctica de las Ciencias Exactas y Experimentales en la misma universidad, el tercero, es magister en Enseñanza de las matemáticas. Para el proceso de validación de esta sección, se hizo uso de Instrumento I.3 ([Anexo 3](#)). En el apartado 4.7 se han descrito las características de este instrumento.

Aplicación piloto del Instrumento CCDM-GC

La primera versión del cuestionario CCDM-GC, se sometió a una aplicación piloto con un grupo de siete profesores de matemáticas de educación media. El estudio piloto incluyó, además de la aplicación del cuestionario CCDM-GC, la realización de una entrevista semiestructurada. Ambos instrumentos fueron descritos en el apartado 4.7. La aplicación de estos instrumentos dio lugar a la realización de tres análisis, a saber: (a) Análisis de las respuestas de los ítems de la Sección B del cuestionario, por parte de los profesores participantes, sobre competencias y subcompetencias del profesor. La aplicación piloto de la Sección B del cuestionario se hizo por medio de la plataforma *Google forms*. (b) Análisis de las respuestas dadas por los participantes a las tres tareas sobre geometría planteadas en la Sección C, referidas a las tres subcompetencias de la Competencia Matemática-Geométrica. (c) Análisis de las entrevistas, transcripción de los diálogos y la categorización de las respuestas y opiniones de los participantes. La descripción de cómo se realizó el análisis de la información, ha sido expuesta en el apartado 4.8.

4.8.1.3 Momento 3: Aplicación del Instrumento APDM-GC4.

El instrumento utilizado para el desarrollo de este estudio es el instrumento validado APDM-GC4 (ver [Anexo 5](#)) descrito en el apartado 4.7. Previa convocatoria dirigida a quince profesores de instituciones educativas del Municipio de Pereira, se hace el estudio con un grupo de diez profesores de matemáticas de educación media y con características específicas referidas en el apartado 4.4 de este capítulo. Este estudio, dio lugar a la realización de dos análisis de manera similar a como se hizo con la aplicación piloto del cuestionario: (a) Análisis realizado a las respuestas de la Sección B del. (b) Análisis realizado a las respuestas de la Sección C. La descripción de cómo se ha realizado el análisis de la información, se ha presentado en el apartado 4.8.

Para la aplicación del instrumento validado, APDM-GC4 (ver [Anexo 5](#)), se realizó un rediseño del cuestionario CCDM-GC. El rediseño se hizo en función del proceso de validación que incluyó: (1) Validez de contenido del cuestionario, por medio del Jucio de Expertos, y (2) La aplicación piloto del cuestionario. Obteniendo de esta manera el instrumento validado APDM-GC referido en el apartado 4.7. Luego de la validación del cuestionario APDM-GC se hace la selección de las cuatro subcompetencias que serán aplicadas a una muestra de 10 profesores. El estudio implicó: (i) rediseño del cuestionario CCDM-GC, (ii) convocatoria de los participantes, (iii) aplicación del cuestionario APDM-GC4 referido en el apartado 4.6.2, y (iv) análisis de los datos obtenidos en las cuatro subcompetencias del cuestionario APDM-GC4 (ver [Anexo 5](#)).

4.8.2 Fase 2: Diseño del Taller de formación profesional (TF-CDM)

Para alcanzar el cuarto objetivo de investigación (OE4), tuvo lugar el diseño de un taller de formación, cuyo diseño se fundamentó en: (a) los hallazgos de la Fase 1, (b) el modelo CCDM (Godino et al. 2016; 2017) y (c) las dos macro competencias propuestas por Pino-Fan et al.

(2023): Competencia Matemática-Geométrica y Competencia de Análisis e intervención didáctica (los detalles al respecto se han expuesto en el Capítulo 3). El taller diseñado obedece a una estructura propia de una propuesta/diseño curricular en la que se plantean objetivos, contenidos, metodología y evaluación. La propuesta/diseño elaborado es parte de los resultados documentales de este trabajo de investigación, el cual se presenta en el apartado 5.2 del capítulo 5.

4.8.3 Fase 3: Implementación del Taller TF-CDM

La implementación del taller contó con la participación de cinco profesores de matemáticas de educación media. De los profesores en servicio que fueron convocados, cinco aceptaron la invitación y participaron activamente en el desarrollo del taller. Los instrumentos 6 y 7 (descritos en el apartado 4.6.2) sirvieron como base para la recolección de los datos y la realización de dos análisis: (a) Análisis descriptivo y de contenido realizado a los datos obtenidos del estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas, el (b) Análisis de contenido realizado a los datos obtenidos de la valoración de procesos de enseñanza aprendizaje (valoración de la Idoneidad Didáctica) tanto de las propuestas de planeación de los profesores (unidades didácticas elaboradas por profesores participantes en el taller), como de la planeación propuesta por la investigadora-doctoranda. Estas unidades didácticas versan sobre la enseñanza de las cónicas a nivel de educación media. La descripción de cómo se realizó el análisis de la información, fue descrito en el apartado 4.8.

El desarrollo de esta fase, permitió el logro del objetivo 4 (OE4), en el que se analizaron los resultados de la implementación del taller, para, posteriormente (en la fase 4), hacer propuestas de mejora en función de la evaluación que se realiza, para futuras implementaciones.

4.8.4 Fase 4: Evaluación del Taller de formación profesional (TF-CDM)

Para lograr el objetivo 5 de investigación (OE5), se realizó la evaluación del desarrollo del taller, la cual implicó el análisis del desarrollo de competencias/subcompetencias didáctico-matemáticas de los profesores participantes, la cual se deriva de los resultados de la fase 3. La evaluación del taller de formación profesional representó información fundamental para el desarrollo y la consolidación de esta fase de investigación.

CAPÍTULO 5. RESULTADOS

5.1 Introducción

La estructura de este capítulo contiene cinco apartados, los cuales corresponden al análisis de la información recolectada a partir del desarrollo de las fases de una investigación de diseño: estudio preliminar, diseño, implementación y evaluación. En el primero se desarrolla la fase de *estudio preliminar* que comprende tres momentos: (a) Una revisión de la literatura concerniente a la investigación reciente sobre el desarrollo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor en la enseñanza de la geometría en la educación media. (b) Resultados del proceso de diseño y validación del cuestionario CCDM-GC por medio de la técnica de Juicio de Expertos y de una aplicación piloto del mismo. (c) Resultados de la aplicación del cuestionario APDM-GC4, lo cual permitió obtener una autovaloración y el desempeño de un grupo de profesorado en servicio en torno a las competencias matemáticas y didácticas: *competencia matemática-geométrica y competencia de análisis e intervención didáctica*, propuestas en una operacionalización del modelo CCDM por Pino-Fan et al. (2023).

El segundo apartado corresponde a los resultados obtenidos de la fase de *Diseño*. En esta fase se evidencia el diseño del taller TF-CDM, fundamentado en el desarrollo de algunas de las subcompetencias, propuestas por Pino-Fan y colaboradores, en la operacionalización del modelo de Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor (CCDM) (Pino-Fan et al., 2023).

El tercer apartado presenta los resultados de los análisis de la información recogida en la fase de *Implementación*. En este apartado se muestran los resultados de dos análisis, el primero se

refiere a los resultados del análisis de la categoría Competencia Matemática-Geométrica y el segundo al análisis de la categoría Competencia de Análisis e Intervención Didáctica.

El cuarto apartado presenta el análisis de los resultados provenientes de la fase de *Evaluación de la Implementación*. En este apartado se valoran los efectos de la implementación del taller en las categorías Competencia Matemática-Geométrica y Competencia de Análisis e Intervención Didáctica. Asimismo, se analizan los resultados de la evaluación del taller de formación realizada por los profesores participantes desde las categorías: Diseño y Desarrollo (ver [Anexo 9](#)).

5.2 Resultados de la Fase 1: Estudio preliminar

En esta fase, se tuvieron en cuenta tres momentos para la recolección de datos y su análisis, el primero tiene que ver con la revisión sistemática de la literatura, el segundo sobre el diseño preliminar y la validación del cuestionario CCDM-GC, y el tercero, sobre la aplicación del cuestionario APDM-GC4.

5.2.1 Resultados del Momento 1: Revisión sistemática de la literatura

Los resultados del primer momento de la Fase 1, obtenido a partir de una revisión sistemática de la literatura, se han sintetizado en el artículo *Tendencias sobre el conocimiento profesional de los profesores de geometría, en la educación básica y media: Una revisión sistemática de la literatura*, (Mora y Rivas, en prensa) enviado a la Revista Colombiana de Educación, con aceptación para ser publicado en un próximo número del año 2026 de la revista, la versión preliminar (borrador) del artículo, aceptada por la revista, se puede ver en el [link](#). Esta revista se encontraba indexada en Publindex (Sistema Nacional de Indexación de Revistas Científicas y Tecnológicas, administradas por el Ministerio de Ciencia, Tecnología y Educación de Colombia) en la categoría B, para el momento del envío del manuscrito. A partir de los

resultados de este estudio, se logra una visualización del estado del arte sobre el tema de interés para la investigación, a saber: “Conocimiento del profesor de geometría en los niveles de educación básica (6 - 14 años) y media (15 - 18 años)”. Esta visualización se basa en la revisión de los artículos publicados en revistas de investigación académica-científica entre los años 2012 y 2022. Los detalles sobre la justificación, objetivos, marco conceptual y metodología que fundamentaron los resultados de este trabajo pueden verse en la versión referida del manuscrito.

A continuación, se resumen los resultados obtenidos, a partir de la revisión de la literatura referida, en torno al tema de interés, los cuales indican que: (1) Los contenidos geométricos más estudiados en las investigaciones reportadas son los relacionados con objetos bidimensionales. (2) Los modelos del conocimiento del profesor más utilizados en la investigación son el modelo “Conocimiento Pedagógico del Contenido” (PCK: *Pedagogical Content Knowledge*) y el modelo “Conocimiento Matemático para la Enseñanza” (MKT: *Mathematical Knowledge for Teaching*) los cuales fueron referidos en el capítulo 2. (3) Se observó una marcada tendencia hacia la realización de investigaciones con Profesores en Formación Inicial, siendo escasas las que se realizan con Profesores en Servicio. (4) Se encontró un predominio de los estudios en el nivel de Educación Básica Primaria, en comparación con los demás niveles educativos, los cuales son poco estudiados. (5) Existen cuatro temáticas que permiten tipificar los estudios realizados, estas son: (i) validación de instrumentos, (ii) conocimiento del profesor, (iii) propuestas metodológicas, y (iv) intervención versus diagnóstico. (6) Se reconoce la necesidad de mejorar los procesos de formación inicial de los profesores, en cuanto al conocimiento del contenido geométrico, la metodología de enseñanza, los recursos utilizados, las representaciones y el uso de problemas con múltiples soluciones. La información detallada de estos resultados se puede ver en el manuscrito Mora y Rivas (en prensa), antes referido. Por razones de espacio no es posible mostrar más detalles al respecto.

5.2.2 Resultados del Momento 2: Diseño y Validación del cuestionario CCDM-GC

En este apartado se informa sobre los resultados del proceso de validación del cuestionario CCDM-GC, tal proceso comprendió: (1) el estudio de la validez de contenido de las secciones B y C del cuestionario, por medio de un Juicio de Expertos, según las categorías Claridad, Coherencia y Relevancia, definidas en la rúbrica de evaluación (Instrumento I.2, ver [Anexo 2](#)), y (2) la aplicación piloto de este cuestionario. La descripción y composición de este cuestionario (secciones, subsecciones, competencias y partes que se evalúan), así como el procedimiento seguido en el proceso de validación fue expuesto en el apartado 4.6 del capítulo 4. Un ejemplar del mismo puede verse en el [Anexo 1](#).

5.2.2.1 Resultados de la Validez de contenido del cuestionario CCDM-GC Sección B¹.

A continuación, se presenta, en las Tablas 5.1 y 5.2, los Índices de Validez de Contenido, de las competencias referidas en las subsecciones B1 (Competencia Matemático-Geométricas) y B2 (Competencia de Análisis e Intervención Didáctica), respectivamente, según las tres categorías evaluadas por los jueces en cada competencia (ver [Anexo 14](#)). Estos valores fueron obtenidos mediante el empleo del programa de análisis estadístico IBM SPSS Statistics, versión 29.0.1.0.

Tabla 5.1 Validez de contenido de las categorías en la Subsección B1

Resumen de procesamiento de casos:	Categoría	Válido		Excluido ^a		Total		Estadística de fiabilidad	
		n	%	N	%	n	%	Índice de validez	n de elementos
Subsección B1	Claridad	4	80,0	1	20,0	5	100,0	0,62	39
	Coherencia	5	100,0	0	0,0	5	100,0	0,82	39
	Relevancia	5	100,0	0	0,0	5	100,0	0,81	39

a. Profesores que no responden todos los ítems de la subcompetencia.

Fuente: datos tomados de la aplicación del Instrumento I.2

¹ Para facilitar la comprensión de este apartado recomendamos al lector visualizar el [Anexo 1](#) y la Figura 1 presentada en las rúbricas de evaluación de los jueces, incluidas en el [Anexo 14](#).

De los resultados de la Tabla 5.1 se desprende que, al analizar las tres categorías evaluadas por los cinco jueces (Claridad, Coherencia y Relevancia), el índice de la validez de contenido de los ítems se sitúa en un rango entre 0.8 y 0.9 para las categorías Coherencia y Relevancia, respectivamente, y un índice de 0,62 para la categoría Claridad. Estos resultados sugieren una consistencia válida entre las valoraciones de los jueces respecto a los 39 ítems de la subsección B1 del cuestionario para las dos últimas categorías y no válida para la categoría Claridad. Este resultado implicó la realización de modificaciones en esta subsección del cuestionario.

Tabla 5.2 *Validez de contenido de las categorías en la Subsección B2*

<i>Resumen de procesamiento de casos:</i>	Categoría	<i>Válido</i>		<i>Excluido^a</i>		<i>Total</i>		<i>Estadística de fiabilidad</i>	
		n	%	n	%	n	%	Índice de validez	n de elementos
<i>Subsección B2</i>	Claridad	4	80,0	1	20,0	5	100,0	0,82	84
	Coherencia	4	80,0	1	20,0	5	100,0	0,85	84
	Relevancia	5	100,0	0	0,0	5	100,0	0,78	84

a. Profesores que no responden todos los ítems de la subcompetencia.

Fuente: datos tomados de la aplicación del Instrumento I.2

La Tabla 5.2 muestra que, al analizar las tres categorías evaluadas por los cinco jueces (Claridad, Coherencia y Relevancia) en las subcompetencias de la subsección B2, el índice de validez de contenido de los ítems se sitúa en un rango entre 0.8 y 0.9 para las categorías Claridad y Coherencia y un índice de 0,78 para la categoría Relevancia. El intervalo que comprende estos índices indica una consistencia válida entre las categorías según las valoraciones de los jueces.

A continuación, se presenta un análisis de contenido de las observaciones realizadas por los jueces a los ítems del cuestionario (subsecciones B1 y B2), según las categorías propuestas (Claridad, Coherencia, Relevancia).

B1.1: Subcompetencia de Resolución de Problemas (ítems 1 al 13)

En la Tabla 5.3 se muestra un resumen de las observaciones dadas por los jueces, con respecto a cada una de las categorías propuestas, sobre los ítems referidos a la Subcompetencia Resolución de Problemas.

Tabla 5.3 *Categorías de la parte B1.1 (Subcompetencias Resolución de Problemas) de la Subsección B1*

Claridad	Coherencia	Relevancia
Ambigüedad en el uso del verbo “fomentar”.	Falta de ítems que evalúen el diseño de problemas.	Necesidad de especificar las nociones geométricas que se evalúan.
“haciendo uso de” reemplazar por “se resuelven problemas en diferentes contextos”	Similitud entre ítems 12 y 13.	Incorporar recursos manipulativos y tecnológicos.
Sugerencia de cambiar “vinculando” por “...que vinculan”.	Mejorar la redacción. Algunos ítems hacen referencia a problemas geométricos y otros a resolución de problemas.	Redundancia y solapamiento.
Uso indistinto de “problemas”, “tareas” y “situaciones problema”. Propuesta de unificar lenguaje.		

Fuente: datos tomados de la aplicación del Instrumento I.2

Las observaciones de los jueces se centran en aspectos conceptuales, estructurales y terminológicos que inciden directamente en la calidad de los ítems. Estas muestran la necesidad de precisar sobre las nociones geométricas que se pretenden evaluar, asimismo consideran que las sugerencias orientadas a incluir ítems relacionados con el uso de recursos tecnológicos y la diversidad de procedimientos para la resolución de problemas mejora la evaluación de la competencia matemática-geométrica. Se infiere de las observaciones una preocupación por ampliar la cobertura del instrumento hacia prácticas más contemporáneas que estén relacionadas con la resolución de problemas y la modelación apoyados en tecnologías digitales, fortaleciendo de esta manera su validez ecológica. En conjunto, las observaciones de los jueces orientaron los ajustes necesarios para mejorar la precisión conceptual, la coherencia y la relevancia del

cuestionario. Estos resultados implicaron la realización de modificaciones en el cuestionario inicial.

B1.2: Subcompetencia de Plantear problemas (ítems 14 al 25)

Al igual que en la parte B1.1, se analizan las observaciones realizadas por los jueces en cada uno de los ítems de la Subcompetencia B1.2, con el fin de identificar las indicaciones dadas con respecto a las categorías propuestas. En la Tabla 5.4 se muestra un resumen de ellas.

Tabla 5.4 *Categorías de la parte B1.2 (Subcompetencia de Plantear problemas) de la subsección B1*

Claridad	Coherencia	Relevancia
Mayor claridad en términos como “plantea o “formula”	Énfasis en que el profesor debe ser capaz de adaptar o rediseñar problemas existentes.	Los ítems 16 y 17 no están centrados en contenido geométrico.
Se cuestiona el uso del término internet.	Ausencia de ítems dedicados a evaluar la capacidad de diseñar problemas. Ítem 17: vinculado al análisis curricular y aislado al planteamiento de problemas.	Recomendación sobre la explicación de las nociones geométricas implicadas en el problema.
Ambigüedad en la palabra “adecuado”		Propuesta del uso de diferentes recursos Considerar materiales y tecnologías diversas.

Fuente: datos tomados de la aplicación del Instrumento I.2

Se observa en la Tabla 5.4 que, con respecto a la categoría Claridad, las observaciones de los jueces indican la necesidad de realizar ajustes en la redacción de los ítems. Asimismo, se señala la necesidad de distinguir entre tareas, problemas y situaciones problema, lo que supuso realizar una unificación de estos términos. En cuanto a la categoría Coherencia, se refieren a la necesidad de alinear la formulación de los ítems con el propósito evaluativo real de la subcompetencia, en este caso, la capacidad del profesor para plantear, formular o rediseñar problemas geométricos. Con respecto a la categoría Relevancia presentan la sugerencia de ampliar la referencia al uso de diversos recursos tecnológicos y materiales, lo cual representa un

avance en la competencia del profesor en la invención y adaptación de problemas, apoyado en el uso de herramientas digitales. En general, las indicaciones de los jueces sugieren un mayor grado de precisión en la terminología, la especificidad conceptual y tomar en cuenta el uso de recursos innovadores en la formulación de problemas, que garantice un enunciado de los ítems más claro, coherente, y relevante para evaluar la Subcompetencia Planteamiento de problemas.

B1.3: Subcompetencia de Análisis de la práctica de resolución de problemas (ítems 26 al 39)

En la Tabla 5.5 se muestra un resumen de las observaciones dadas por los jueces, con respecto a cada una de las categorías propuestas, sobre los ítems referidos a la Subcompetencia de Análisis de la práctica de resolución de problemas.

Tabla 5.5 *Categorías de la parte B1.3 (Subcompetencia de Análisis de la práctica de resolución de problemas) de la subsección B1*

Claridad	Coherencia	Relevancia
No es clara la diferencia entre evaluar la competencia del docente y la del estudiante al resolver problemas.	Se cuestiona la redacción de los ítems 26 a 30. Importancia de evaluar la capacidad del docente para identificar el uso de objetos matemáticos.	Inclusión de “registros y representaciones”.
Distinción entre identificación de errores e identificación de conflictos.		

Fuente: datos tomados de la aplicación del Instrumento I.2

Se observa en la Tabla 5.5 que, con respecto a la categoría Claridad, las observaciones de los jueces indican refinar la precisión conceptual y coherencia evaluativa del instrumento. La recomendación de distinguir entre la identificación de errores y la detección de conflictos didácticos o conceptuales muestra que es necesario reconocer que ambos procesos implican diferentes niveles de análisis cognitivo y didáctico. Los errores tienen que ver con la observación técnica de fallos en la ejecución, mientras que la detección de conflictos requiere de una comprensión más profunda de significados y procesos de aprendizaje. Esto aporta al instrumento una mejor interpretación, permitiendo evaluar con mayor precisión la competencia de análisis del

profesor. En cuanto a la categoría Relevancia, las observaciones sobre el uso de expresiones como "registros y representaciones" muestran la necesidad de incluir una visión del trabajo matemático que reconozca distintas representaciones semióticas relacionadas con la construcción de conocimiento. Esta sugerencia de los jueces contribuye en la medida en que la evaluación contempla los diferentes modos en que profesores y estudiantes representan y comunican las ideas matemáticas.

B2.1: Subcompetencia de Análisis de la actividad matemática del proceso de estudio (ítems 1 al 20)

En la Tabla 5.6 se muestra un resumen de las observaciones dadas por los jueces, con respecto a cada una de las categorías propuestas, sobre los ítems referidos a la Subcompetencia de Análisis de la actividad matemática del proceso de estudio.

Se observa en la Tabla 5.6 que, con respecto a la categoría Claridad, las observaciones de los Jueces muestran una preocupación por mejorar la validez conceptual y la precisión semántica del instrumento, especialmente en lo relacionado con la definición de las competencias que se pretende evaluar y la coherencia interna entre los ítems. Las observaciones sobre el ítem 1 por ejemplo, reconocen la necesidad de profundizar en la evaluación de la argumentación matemática del profesor, no solo en su capacidad para argumentar, sino además para reconocer y gestionar los conocimientos develados en su propia práctica, lo que sugiere ampliar la evaluación hacia una reflexión metacognitiva, coherente con la perspectiva del Conocimiento Didáctico-Matemático (CDM), en la que el profesor no solo domina procedimientos, sino que también identifica los límites de su propio razonamiento. Asimismo, las observaciones en torno a los ítems 6 y 7 muestran la necesidad de precisar los objetivos evaluativos y de diferenciar los componentes epistémico, cognitivo e interaccional, evitando superposiciones que no permitan la interpretación de los resultados.

Tabla 5.6 *Categorías de la parte B2.1 (Subcompetencia de Análisis de la actividad matemática del proceso de estudio) de la subsección B2*

Claridad	Coherencia	Relevancia
Falta de precisión en lo que se pretende evaluar en los ítems 1, 6, 11, 14 a 19.	Articulación entre argumentación, verificación y demostración.	Necesidad de especificar el momento de implementación de la planificación y la ejecución.
Ambigüedad en el uso de términos como “identificar el desarrollo de procesos”	Las demostraciones pueden depender del tipo de problema y analizarse como parte de los procedimientos matemáticos.	
Dividir ítems para mejorar su comprensión.	Hay confusión respecto al tipo de herramientas que se evalúan, cómo y cuándo se espera que se utilicen.	
La definición del objeto matemático las cónicas, debe estar clara y precisa.	Reducir la complejidad y mejorar la estructura.	

Fuente: datos tomados del Instrumento I.2

En relación con la categoría Coherencia, las sugerencias de explicar el momento y el contexto en que se espera el uso de herramientas teórico-metodológicas muestran la necesidad de contextualizar los indicadores de desempeño en la práctica real del profesor. Esta observación aporta en la faceta ecológica dado que permite ver la evaluación en escenarios concretos y de enseñanza de la matemática. Respecto a los ítems 14 al 19, las observaciones sugieren un ajuste en la redacción hacia expresiones más directas, como “promueve el desarrollo”, lo cual favorece la claridad y coherencia del lenguaje.

Con respecto a la categoría Relevancia, las observaciones en general, muestran la necesidad de delimitar el objeto geométrico central (las cónicas), relacionándolo con el campo de contenido matemático específico que se desea analizar. Se identifica la conveniencia de simplificar la estructura y redacción de los ítems, con el fin de facilitar la interpretación, esta recomendación favorece la transparencia evaluativa y su uso en contextos de investigación y formación docente.

Las observaciones de los jueces muestran una contribución significativa a mejorar la coherencia, la relevancia y la calidad del instrumento, garantizando que este refleje de manera más fiel la complejidad del conocimiento didáctico-matemático que se busca evaluar.

B2.2: Subcompetencia de Gestión y análisis de las interacciones (ítems 21 al 50)

En la Tabla 5.7 se muestra un resumen de las observaciones dadas por los jueces, con respecto a cada una de las categorías propuestas, sobre los ítems referidos a la Subcompetencia de Gestión y análisis de las interacciones.

Tabla 5.7 *Categorías de la parte B2.2 (Subcompetencia de Gestión y análisis de las interacciones) de la subsección B2*

Claridad	Coherencia	Relevancia
Redundancia y superposición entre ítems.	Se sugiere revisar los ítems para que sea metodológicamente más inclusivos o neutrales.	Contextualización en el objeto geométrico y no en formulaciones genéricas.
Necesidad de una revisión estructural.	Presupuesto de que todos los profesores tienen conocimiento o uso sistemático de herramientas teóricas.	
“precisar con claridad” “desarrollar actitudes”, “poner énfasis”, “recursos teóricos” se perciben poco precisas.		

Fuente: datos tomados del Instrumento I.2

Se observa en la Tabla 5.7 que, con respecto a la categoría Claridad, las observaciones sobre los ítem 28 a 30 van referidos a la preocupación por la claridad de los mismos, destacando que expresiones como “responsabilidad” o “actitud positiva” carecen de referentes claros si no se contextualizan en acciones concretas. En este sentido, la propuesta de reformular estos ítems hacia expresiones situadas o comparativas (por ejemplo, “valora el aporte de los estudiantes al traer problemas”) orienta la evaluación hacia una perspectiva conductual y reflexiva, más coherente con la evaluación de competencias profesionales.

Con respecto a la categoría Coherencia, las observaciones apuntan a un proceso de validación que no solo refine la redacción de los ítems, sino que garantice la coherencia epistemológica y didáctica del instrumento, su aplicación a diferentes modos de enseñanza y su pertinencia con el objeto geométrico abordado. Estos aportes promueven el diseño de un instrumento más claro y ajustado teóricamente y en línea con la complejidad del conocimiento didáctico-matemático del profesor.

B2.3: Subcompetencia de Uso y manejo de recursos (ítems 51 al 73)

En la Tabla 5.8 se muestra un resumen de las observaciones dadas por los jueces, con respecto a cada una de las categorías propuestas, sobre los ítems referidos a la Subcompetencia de Uso y manejo de recursos.

Se observa en la Tabla 5.8 que, con respecto a la categoría Claridad, las observaciones de los jueces aportan elementos para mejorar la estructura y el enfoque del instrumento, en especial en la Subcompetencia Uso y manejo de recursos (didácticos y tecnológicos). Las sugerencias van en línea con la necesidad de lograr una mayor coherencia, claridad y relevancia conceptual y profundidad interpretativa, garantizando que los ítems no se limiten a describir las acciones del profesor, sino que también permitan comprender las intenciones y fundamentos que orientan estas acciones.

Con respecto a la categoría Coherencia, la sugerencia emitida por los jueces de reemplazar formulaciones genéricas por otras más específicas y situadas, vinculadas a los recursos y materiales empleados, busca mejorar la pertinencia empírica y contextual del instrumento, favoreciendo la observación de prácticas docentes concretas en lugar de descripciones abstractas. Así mismo los comentarios sobre la necesidad de unificar ítems similares responden a la necesidad de simplificar el instrumento sin abandonar el propósito

conceptual, esto permitirá tener un cuestionario más operativo sin perder la precisión de las competencias que se busca evaluar.

Tabla 5.8 *Categorías de la parte B2.3 (Subcompetencia de Uso y manejo de recursos) de la subsección B2*

Claridad	Coherencia	Relevancia
Se identifican solapamientos y repeticiones en varios ítem.	Tensión entre uso individualizado vs colaborativo. Se sugiere revisar para mantener coherencia con principios pedagógicos contemporáneos. Enfocar los ítems en el contenido matemático central de estudio: las cónicas.	Se sugiere que los ítems también mencionen el propósito o impacto pedagógico del uso de recursos. Algunos ítems parecen más pertinentes en otras subcompetencias. Se propone reubicar o redefinir ítems según la intención deseada. Se sugiere una categoría de ítems con enfoque funcional y reflexivo.

Fuente: datos tomados del Instrumento I.2

Con respecto a la categoría Relevancia, los aportes de los jueces evidencian la necesidad de reorientar la subcompetencia de uso y manejo de recursos hacia una visión más integrada y reflexiva, que considere tanto los fines educativos y epistemológicos como los medios tecnológicos y material empleados. Asimismo, señalan la importancia de depurar la estructura y redacción del instrumento, para evitar redundancias y garantizar su aplicación en contextos reales de enseñanza de la geometría.

B2.4: Subcompetencia de Reflexión en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje (ítems 74 al 84)

En la Tabla 5.9 se muestra un resumen de las observaciones dadas por los jueces, con respecto a cada una de las categorías propuestas, sobre los ítems referidos a la Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica.

Tabla 5.9 *Categorías de la parte B2.4 (Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica) de la subsección B2*

Claridad	Coherencia	Relevancia
Propuesta en la sustitución del término “reflexión” por “análisis retrospectivo” al ser más específico y riguroso.	Propuesta de reformulación de ítems para explicitar en qué se basa la reflexión del profesor y evidenciar los fundamentos de la práctica reflexiva.	Propuesta para la integración de acciones previas, simultáneas y posteriores al desarrollo de la reflexión docente.
Revisión del nombre de la subcompetencia.	Evitar formulaciones que jerarquicen las opciones de respuesta: “de manera aislada”, “integrando”	Sugerencia acerca de nombrar la reflexión con adjetivos fijos (evaluativa, comprensiva), lo cual reduce su complejidad y limita la interpretación.
Cambio en el nombre del cuestionario, para aclarar su enfoque de evaluar prácticas, no conocimientos.		

Fuente: datos tomados del Instrumento I.2

Se observa en la Tabla 5.9 que, con respecto a la categoría Claridad, las observaciones de los jueces contribuyen en la precisión conceptual y metodológica del cuestionario, orientadas a fortalecer la subcompetencia de reflexión sobre la práctica docente, un eje transversal en el desarrollo profesional del profesor de matemáticas. En general los aportes coinciden en la necesidad de delimitar con mayor claridad y alcance del proceso reflexivo, así como la conveniencia de utilizar un lenguaje más específico y operativo que evite ambigüedades en la interpretación.

La sugerencia de sustituir el término genérico “reflexión” por “análisis retrospectivo”, con el propósito de destacar la dimensión analítica, sistemática y fundamentada de la práctica reflexiva del profesor, contribuye a situar la reflexión como una actividad metacognitiva y evaluativa, asociada al reconocimiento de fortalezas, debilidades y oportunidades de mejora tanto en la dimensión didáctica como en la matemático-geométrica de la enseñanza. Asimismo, la propuesta de cambiar o revisar el título del instrumento, se apoya en que los ítems no indagan

directamente en los conocimientos y competencias declarativas del profesor, sino en la presencia y frecuencia de acciones observables o reportadas en su práctica. Esta precisión conceptual fortalece la validez del instrumento, al ajustar su denominación a la naturaleza de lo que evalúa.

Con respecto a la categoría Coherencia, mencionan la complejidad de la competencia reflexiva, mostrando que el acto de reflexionar no puede reducirse a categorías fijas, pues señalan, se trata de un proceso dinámico y contextual, con lo cual proponen que la evaluación de la reflexión debería centrarse más en reconocer los matices y sentidos que los profesores otorgan a sus propias prácticas reflexivas.

En general, las observaciones contribuyen a profundizar en la elaboración de los ítems relacionados con la reflexión docente, fortaleciendo de esta forma la coherencia con el modelo CCDM, al situar la reflexión como una actividad analítica y metacognitiva que articula las dimensiones epistémica, cognitiva y didáctica del conocimiento profesional del profesor de geometría.

Cambios realizados a la Sección B del cuestionario CCDM-GC

En retrospectiva, a partir del análisis de contenido de las observaciones realizadas por los jueces a los ítems de la Sección B del cuestionario, se concluyó que este resulta extenso y complejo para su respuesta en las siete subcompetencias propuestas, lo cual implicó la realización de cambios importantes en cuanto a Claridad, Coherencia y Relevancia de algunos de los ítems. En consecuencia, se procedió a rediseñar el cuestionario. En este sentido, para efectos de la investigación se decidió utilizar una versión reducida del cuestionario en la cual se incluyeran sólo cuatro de las siete subcompetencias de la Sección B: Para la Competencia Matemático-Geométrica (B1), se seleccionaron: Resolución de problemas (B1.1), Planteamiento de problemas (B1.2) y Análisis de la práctica de Resolución de problemas (B1.3). Para la Competencia de

Análisis e Intervención Didáctica (B2), se seleccionó: Reflexión en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje (B2.4).

Uno de los cambios sugerido por uno de los jueces es el título del instrumento CCDM-GC, dado que buena parte del instrumento (toda la Sección B) se refiere a una actividad de autoevaluación que realiza el docente sobre su práctica. Al tomar en cuenta la sugerencia, el título pasa de ser *Cuestionario sobre Conocimientos y Competencias Didáctico-Matemáticas del profesor de Geometría en torno a Cónicas (CCDM-GC)* a llamarse *Cuestionario de Autoevaluación de las prácticas Didáctico-Matemáticas del profesor de Geometría en torno a Cónicas (APDM-GC)*. (ver [Anexo 5](#)).

5.2.2.2 Resultados de la Validez de contenido del Instrumento CCDM-GC: Sección C.

A continuación se presenta un análisis cuantitativo de carácter descriptivo de la sección C del cuestionario CCDM-GC y un análisis de las reflexiones o comentarios emitidos por los jueces expertos para cada tarea planteada, en relación con las categorías Claridad, Coherencia y Relevancia definidas en la rúbrica de evaluación (Ver [Anexo 3](#)).

Evaluación de los jueces expertos sobre la Tarea 1

En la Tabla 5.10 se hace una síntesis de las observaciones de los jueces en relación con las categorías Claridad, Coherencia y Relevancia definidas en la rúbrica de evaluación (Ver [Anexo 3](#)), asimismo, en el [Anexo 15](#) se presenta la evaluación realizada por cada uno de los jueces:

Con respecto a la Tarea 1 todos los jueces consideran que es clara, coherente y relevante en un nivel alto, por lo que el índice de validez es 1 esto indica una validez total de la tarea. Permite evaluar en el profesor la competencia matemático-geométrica y la subcompetencia de Resolución de problemas, sin embargo, proponen que se hagan ajustes en su diseño para lograr una evaluación adecuada sin sobrepasar la formalidad del concepto matemático involucrado.

Tabla 5.10 Categorías evaluadas para la Tarea 1

Claridad				Coherencia				Relevancia			
na	nm	nb	nc	na	nm	nb	nc	na	nm	nb	nc
5	0	0	0	4	1	0	0	4	1	0	0
Semántica y sintaxis adecuada, instrucciones directas y bien definidas, diseño de la tarea con lenguaje muy formal.				Se relaciona con la subcompetencia resolución de problemas y la aplicación de conceptos geométricos, cónicas.				De baja complejidad pero requiere de conocimientos básicos en geometría. Requiere de ajustes para su implementación.			
Consistencia en las instrucciones para cada tarea.											
na: nivel alto nm: nivel moderado nb: nivel bajo nc: nivel cero											

Fuente: datos obtenidos del Instrumento I.3

Evaluación de los jueces expertos sobre la Tarea 2

En la Tabla 5.11 se hace una síntesis de las observaciones de los jueces en relación con las categorías Claridad, Coherencia y Relevancia definidas en la rúbrica de evaluación (Ver [Anexo 3](#)):

Tabla 5.11 Categorías evaluadas para la Tarea 2

Claridad				Coherencia				Relevancia			
na	nm	nb	nc	na	nm	nb	nc	na	nm	nb	nc
3	2	0	0	4	1	0	0	4	1	0	0
Ajustes en la semántica y la sintaxis.				Adecuado para evaluar la subcompetencia.				Especificidad en la tarea.			
Requiere de ajustes para su implementación.								Precisión en el alcance de la tarea, inclusión de criterios claros que permitan su evaluación.			
na: nivel alto nm: nivel moderado nb: nivel bajo nc: nivel cero											

Fuente: datos obtenidos del Instrumento I.3

La Tarea 2 ha sido evaluada por los jueces como clara, coherente y relevante en un nivel moderado-alto. Permite evaluar en el profesor, la Competencia Matemático Geométrica desde la Subcompetencia Planteamiento de Problemas, sugieren modificar la sintaxis de la tarea, puesto que, como menciona uno de los jueces, presenta ambigüedad en la misma cuando se pide un solo problema para abordar el desarrollo matemático de las cuatro cónicas, por lo que la especificidad

del problema, debería estar dirigida a la elección de la cónica que se busca estudiar y además la o las características de la cónica que se persiguen profundizar.

Evaluación de los jueces expertos sobre la Tarea 3

En la Tabla 5.12 se hace una síntesis de las observaciones de los jueces en relación con las categorías Claridad, Coherencia y Relevancia definidas en la rúbrica de evaluación (Ver Anexo 3):

Tabla 5.12 *Categorías evaluadas para la Tarea 3*

Claridad				Coherencia				Relevancia			
na	nm	nb	nc	na	nm	nb	nc	na	nm	nb	nc
3	1	1	0	4	1	0	0	4	0	1	0
Existe claridad en las instrucciones.				Adecuada para evaluar la subcompetencia.				Vinculación efectiva entre teoría y contexto.			
Falta claridad en los elementos gráficos.											
Necesita mejor representación gráfica.				Necesita precisión en las relaciones matemáticas.							
na: nivel alto nm: nivel moderado nb: nivel bajo nc: nivel cero											

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.3

Con respecto a la Tarea 3, los jueces la valoran como clara, coherente y relevante. Permite evaluar en el profesor, la competencia de Análisis e Intervención Didáctica, sin embargo, presenta, según el juez JC2, poca claridad en su gráfica, lo que da la sensación de que hay elementos en la misma que confunden y son innecesarios. Ninguno de los jueces hace pronunciamiento sobre la solicitud de la tarea referida a “realizar un análisis didáctico matemático de su resolución”, se dedican a reflexionar sobre el diseño del problema matemático en sí y su posible solución.

Con relación a lo adecuado del formato del Instrumento en su versión online, los jueces están de acuerdo en que es adecuado. Dentro de las observaciones del juez JC3, se hace la sugerencia de resumir el contenido, puesto que resulta un tanto abrumador, especialmente para la

labor docente, que se provee de múltiples responsabilidades. Considera además que la información es un poco densa y piensa que podría ser más clara simplificándola de tal manera que permita su fácil comprensión y desarrollo.

Cambios realizados en la sección C del Instrumento CCDM-GC a partir de las observaciones emitidas por los jueces

Por lo anterior y teniendo en cuenta las valoraciones y las reflexiones realizadas por los jueces expertos, la nueva estructura de la Sección C en la versión definitiva del instrumento APDM-GC4 queda como se muestra en las Figuras 5.6, 5.7.

Figura 5.6 *Modificación a la Tarea 2. C2: Plantear problemas*

Tarea 2.

Formule o plantee una o varias situaciones problema en la elección de una o varias cónicas, con la cual se puedan evaluar los siguientes indicadores².

1. Identificación en forma visual, gráfica y algebraica de algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cono.
2. Identificación de características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana, en particular de las figuras cónicas.

Fuente: datos tomados del cuestionario *APDM-GC*

Cambios realizados a la Tarea 2:

- Se incluye la palabra “o varias” en la instrucción de la tarea para enfatizar en la posibilidad de formular más de una situación problema, en la elección de una o más de una cónica. Esto se hace atendiendo a las observaciones tanto de los jurados como de los profesores participantes en esta prueba piloto.

² Los indicadores se han tomado de los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para los grados décimo y undécimo, correspondientes al pensamiento geométrico y sistemas geométricos (MEN, 2006, p. 88).

Figura 5.7 Modificación a la Tarea 3. C3: Análisis de la práctica de resolución de problemas

Tarea 3. Resuelva el siguiente problema y realice un <u>análisis didáctico-matemático</u> de su resolución. El análisis solicitado es de alta relevancia para este estudio. Agradecemos prestar suficiente atención a este indicador.
Problema 2. Un túnel semi elíptico tiene una altura de 3m y el ancho de la carretera es de 16 metros, por el cual transitan vehículos en doble sentido. Ver Figura 2. Figura 2 Si trazamos en el túnel semi elíptico un sistema de coordenadas rectangulares con centro en el origen, con el eje mayor horizontal. ¿Cuáles son las coordenadas de los vértices? ¿Cuál es la ecuación canónica de la cónica asociada al túnel? Fuente: Adaptado de Pérez y Camatón (2013)

Fuente: datos tomados del cuestionario APDM-GC

Cambios realizados a la Tarea 3:

- Se subraya la palabra análisis didáctico-matemático.
- Se agrega a la instrucción: “El análisis solicitado es de alta relevancia para este estudio. Agradecemos prestar suficiente atención a este indicador.” Esto se hace porque en la prueba piloto, se observó que los profesores participantes y los jueces no reconocieron esta instrucción y por lo tanto no la tomaron en cuenta dentro de la solución de la tarea.

5.2.2.3 Aplicación piloto del cuestionario CCDM-GC.

El cuestionario ha sido diseñado de acuerdo con los indicadores propuestos en la macro herramienta propuesta por Pino-Fan et al., (2023) y definidas en el capítulo 3, apartado 3.6.2 de esta investigación.

Los resultados del análisis de los datos de la Sección B del CCDM-GC, en el cual participaron siete profesores, se ha presentado en gráficos de barras y puede verse a través del *Link* (ver [Anexo 17](#)) Se hará una presentación de resultados generales, en la que se han valorado las respuestas de los profesores en función de las competencias y subcompetencias y de acuerdo con las categorías establecidas para los ítems correspondientes. En la Tabla 5.13 se pueden observar las frecuencias de las respuestas.

Tabla 5.13 Valoración de subcompetencias de la Competencia Matemático-geométrica

Categorías de los ítems	Subsección		B1					
	B1.1		B1.2		B1.3			
	n	%	n	%	n	%	n	%
Siempre	25	27,5	21	25,0	26	26,5	72	26,4
Con frecuencia	41	45,1	47	56,0	43	43,9	131	48,0
En ocasiones	20	22,0	14	16,7	24	24,5	58	21,2
Rara vez	4	4,4	2	2,4	3	3,1	9	3,3
Nunca	1	1,1	0	0,0	2	2,0	3	1,1
B1.1: Resolución de problemas (13 ítems)								
B1.2: Plantear problemas (12 ítems)								
B1.3: Análisis de prácticas de resolución de problemas (14 ítems)								
B1. Competencia matemático-geométrica (39 ítems)								

Fuente: datos tomados de la aplicación piloto del cuestionario CCDM-GC.

Como puede verse en la Tabla 5.13, de acuerdo con las respuestas de los profesores, las subcompetencias de la Competencia Matemático-Geométrica, presentan valores en su mayoría superiores a la categoría media de la escala, lo cual indica que estas subcompetencias presentan un desarrollo apropiado en su práctica profesional, evidenciándose, de acuerdo con su propia opinión, que los profesores “Con frecuencia” o “Siempre” realizan acciones en sus clases

basadas en el uso y desarrollo de su Competencia Matemático-Geométrica. Sin embargo, hay una presencia del 21,2% en la categoría “En ocasiones”, lo que permite reflexionar sobre la oportunidad de mejorar en esta competencia. De acuerdo con los resultados individuales que componen la Competencia Matemático-Geométrica, se puede decir que las Subcompetencias B1.1 y B1.2 están más presentes en los profesores en cuanto a la resolución y planteamiento de problemas. Sin embargo, la Subcompetencia B1.3 se realiza “en ocasiones” con un porcentaje del 24,5%, lo que muestra una oportunidad para fortalecer en la Subcompetencia de Análisis de prácticas de resolución de problemas.

Con respecto a la segunda competencia: Competencia de Análisis e intervención didáctica, en la Tabla 5.14 se presentan los resultados correspondientes, en la cual, según las respuestas/opiniones de los profesores, son similares a los expuestos para la Competencia Matemático-Geométrica.

A partir de la interpretación de los resultados de la Tabla 5.14, se puede inferir que la mayoría de los profesores realizan “Con frecuencia” las acciones evaluadas en la Competencia B2 (54,9%), mientras que las categorías Rara vez o Nunca, solo representan el 5,1% de las respuestas, lo que es positivo puesto que sugiere que los profesores realizan con frecuencia acciones de enseñanza que involucra el análisis de su práctica y sus intervenciones en la clase.

Tabla 5.14 *Valoración de subcompetencias de Análisis e Intervención Didáctica*

Categorías de los ítems	Subsecciones								B2	
	B2.1		B2.2		B2.3		B2.4			
	n	%	N	%	N	%	N	%	n	%
Siempre	39	27,9	47	22,4	28	17,4	9	11,7	123	20,9
Con frecuencia	78	55,7	138	65,7	71	44,1	36	46,8	323	54,9
En ocasiones	22	15,7	25	11,9	41	25,5	24	31,2	112	19,0
Rara vez	1	0,7	0	0,0	20	12,4	8	10,4	29	4,9
Nunca	0	0,0	0	0,0	1	0,6	0	0,0	1	0,2

B2.1: Análisis de la actividad matemática del proceso de estudio (20 ítems)

B2.2: Gestión y análisis de las interacciones (30 ítems)

B2.3: Uso y manejo de recursos (23 ítems)

B2.4: Reflexión en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje (11 ítems)

B2. Competencia de análisis e intervención didáctica (84 ítems)

Fuente: datos tomados de la aplicación piloto del cuestionario CCDM-GC.

De acuerdo con los resultados individuales que componen la competencia de Análisis e Intervención Didáctica, se puede decir que las Subcompetencias B2.1 y B2.2 son las mejor valoradas, dado que muestran una alta frecuencia en sus procesos de análisis de la actividad matemática y gestión y análisis de las interacciones. Sin embargo, se percibe alta dispersión en las respuestas de la Subcompetencia B2.3, lo cual indica variabilidad en el uso y manejo de recursos por parte de los profesores. Finalmente, y basados en los resultados de la Subcompetencia B2.4, la reflexión docente es la más débil, lo que sugiere la necesidad de fortalecer en los profesores el análisis permanente y reflexivo de su enseñanza, antes y después de su práctica.

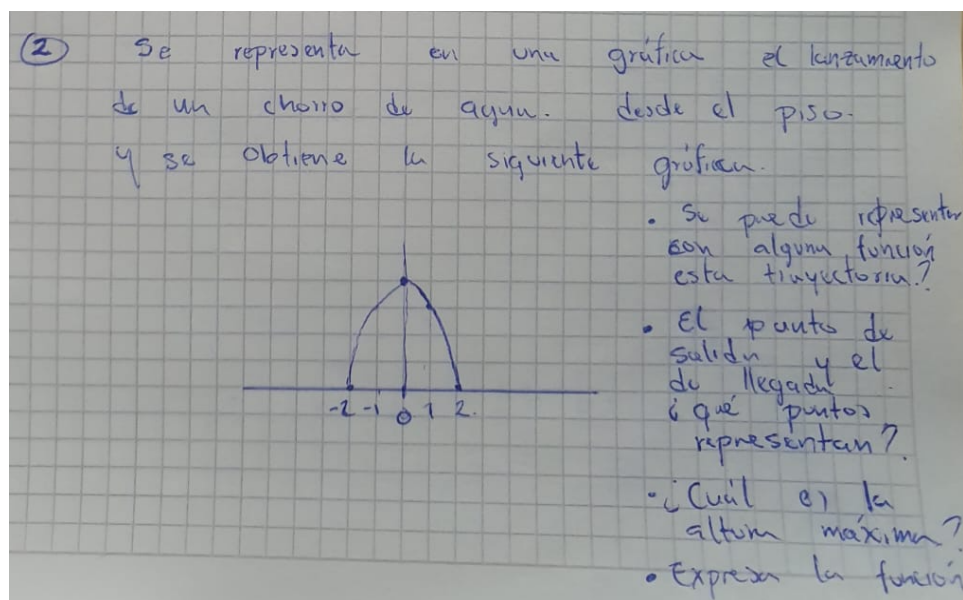
5.2.2.4 Resultados de la aplicación piloto del cuestionario CCDM-GC en la Sección C.

Competencia matemático-geométrica de los profesores

La Sección C del cuestionario CCDM-GC, en la que se solicitó la realización de tres tareas, sólo fue resuelta por tres de los siete profesores voluntarios (ver [Anexo 12](#)). La Tarea 1, en la que se pedía la resolución de un problema de geometría relativo a la definición de parábola, ha sido respondida de manera formal y procedimental de manera correcta por algunos profesores. En cuanto a las prácticas matemáticas desarrolladas, siguen procedimientos parecidos, teniendo en cuenta las condiciones del problema y lo solicitado en este. La Tarea 2, en la que se solicita formular un problema cuyo fin sea evaluar dos de las competencias propuestas en el documento curricular oficial de educación media (MEN, 2006), relativo a cónicas, dos profesores plantean

problemas contextualizados en la vida laboral y científica, logrando involucrar parcialmente los indicadores propuestos. La Figura 5.9, muestra el problema planteado por uno de ellos.

Figura 5.1 Problema planteado en la Tarea 2: Profesor 1



Fuente: Respuestas al cuestionario CCDM-GC, aplicación piloto.

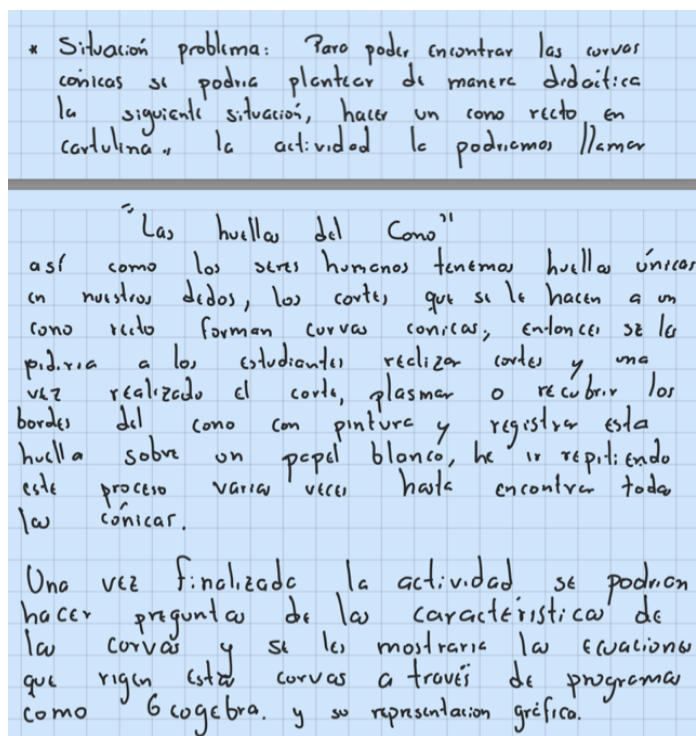
De la Figura 5.9 se puede observar que el profesor efectivamente usa un contexto real como lo es el lanzamiento de un chorro de agua desde el piso (suelo), pero no es claro a qué contexto específico se refiere y cuál es la intención de su solución diferente a la meramente relacionada con la matemática. Se puede observar además, que el problema lleva directamente a la representación gráfica del fenómeno, sin permitir al estudiante modelar la situación y deducir la cónica involucrada. Otro elemento que se logra observar, es que no se puede deducir del dibujo, las unidades usadas en contexto real (metros, cm, pasos, etc.), puesto que están directamente relacionadas en el plano cartesiano como sistema de referencia. Aun cuando la intención del problema pareciera involucrar ideas iniciales o conceptos previos sobre cónicas, da la sensación de que es un problema que aborda el concepto de función más que el de secciones cónicas. En general el problema planteado no logra relacionar el primer indicador de la

instrucción “Identificación en forma visual, gráfica y algebraica de algunas propiedades de las curvas que se observan en los bordes obtenidos por cortes longitudinales, diagonales y transversales en un cono” y parcialmente logra responder al segundo: “ Identificación de características de localización de objetos geométricos en sistemas de representación cartesiana, en particular de las figuras cónicas”.

El profesor P3 propone una actividad (en su opinión se trata de una “situación problema”) la cual incluye el uso de material concreto para identificar las cónicas (como secciones de un cono), y del programa GeoGebra con el cual “se les mostraría las ecuaciones que rigen estas curvas... y su representación gráfica” (cita de lo expuesto por el profesor). No obstante, no logra formular un problema con las condiciones propuestas. En la Figura 5.10 se puede observar lo planteado en su problema.

Lo anterior constata las dificultades que tiene un profesor para *plantear problemas* poniendo de manifiesto un nivel competencial que amerita ser mejorado, necesario para un buen desempeño docente. Desde la perspectiva teórica del EOS, con que se observan este tipo de prácticas, se considera necesario movilizar las relaciones entre los objetos matemáticos requeridos, los procesos, las representaciones y la variedad de procedimientos involucrados (lo epistémico) que permitan un planteamiento de problemas de manera más completa e informada, al tiempo que favorezcan la comprensión y análisis de los problemas matemáticos planteados, su resolución, así como las relaciones que plantea tal comprensión y movilización con el aprendizaje de los estudiantes (lo cognitivo). Además, la posibilidad de plantear situaciones problema ricas, generadoras de conocimiento, podría conducir al desarrollo de la autonomía en el aprendizaje (lo interaccional) del estudiantado.

Figura 5.2 Problema planteado en la Tarea 2: Profesor 3

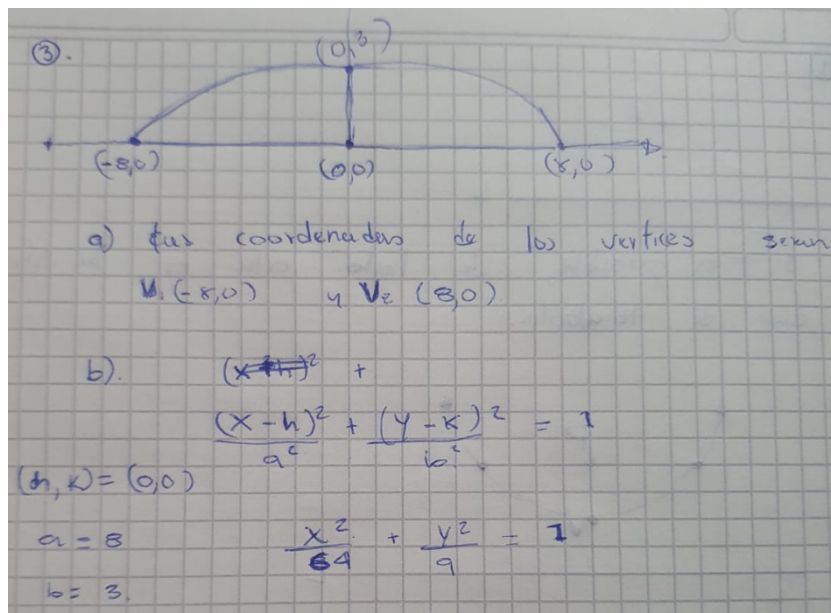


Fuente: Respuestas al cuestionario CCDM-GC, aplicación piloto.

La Tarea 3, en la que se solicita resolver un problema relativo a la ecuación canónica de una elipse y realizar un análisis didáctico-matemático de su resolución, se pudo observar que dos profesores resuelven correctamente el problema a nivel conceptual y el tercer profesor no lo hace del todo correcto puesto que confunde los valores de a, b, c para hallar los vértices, su solución se muestra en la Figura 5.11. Ninguno de los profesores realiza un análisis didáctico-matemático de la resolución del problema, de lo cual se deduce que los tres profesores están más interesados por demostrar sus competencias matemáticas que por analizar el componente didáctico del problema.

Es preciso mencionar que cuatro de los siete profesores no dieron respuesta a esta sección del cuestionario. Aun cuando se les proporcionó al menos una semana para devolver las tareas y dando las respectivas instrucciones para completar el instrumento, no hubo respuesta alguna.

Figura 5.3 Problema planteado en la Tarea 3: Profesor 1



Fuente: Respuestas al cuestionario CCDM-GC, aplicación piloto.

5.2.2.5 Resultados de la Entrevista a profesores sobre la aplicación piloto del cuestionario CCDM-GC.

Como parte de la validación del instrumento, sólo dos de los siete profesores participantes y convocados a la aplicación del cuestionario, respondieron a una entrevista semi estructurada acerca del diseño del instrumento (ver [Anexo 16](#)). A continuación se presenta un análisis de sus respuestas (ver [Anexo 10](#)) que, por razones de espacio, sólo se presenta el resumen de las opiniones expresadas por los dos profesores en torno al instrumento, según las preguntas propuestas en el protocolo de entrevista.

Consideraciones de los profesores en torno al cuestionario CCDM-GC

De acuerdo con la entrevista realizada, los profesores señalan que el cuestionario es pertinente para evaluar las competencias matemático-geométricas y de análisis e intervención didáctica del profesor. En cuanto a las competencias y subcompetencias que se evalúan, el profesor P2 afirma que son suficientes para caracterizar el trabajo que realiza el profesor, ya que se muestran

muy detalladamente las posibles acciones asociadas a estas. El profesor P1, plantea que también deben tenerse en cuenta otros aspectos como la competencia humana, la cual, asegura, no haberla percibido en la Sección B del formulario, a continuación se presenta la respuesta de P1.

P1: Discrepo porque el proceso de enseñanza, de las preguntas que uno a veces está inmerso en la dinámica del hecho de dictar un conocimiento, no se puede abordar en un cuestionario, porque habrá competencias que se quedan por fuera, pero si nos vamos a un marco teórico y conceptual precisamente, uno diría que sí. Pero digamos que sean algunas competencias que son de carácter humano que no se pueden evidenciar bajo las preguntas. (P1, Entrevista semiestructurada 1, 2024).

Con respecto a la pregunta E4: Considera que es posible lograr el desarrollo de las competencias y subcompetencias propuestas en el trabajo que se realiza como profesor/a y por qué, ambos concuerdan en que sí es posible, aun cuando identifican condiciones adversas a ese desarrollo: características particulares de los estudiantes y su nivel académico, el tiempo limitado, que se ve afectado además por actividades extracurriculares (institucionales, culturales y recreativas), esto entre otras condiciones. En relación con las tareas propuestas en la Sección C del cuestionario, los dos profesores consideran que están muy bien planeadas y acordes con las competencias de estudio. Al respecto se presenta un fragmento de lo referido por P1.

P1: En la sección C, había que resolver tres problemas, que tenían que ver básicamente con parábola, ...dos de ellos me parecieron adecuados”. Y agrega: “... el segundo donde se debía evaluar la didáctica ... son apropiados en esos dos ámbitos, tanto para la competencia geométrica, como para la competencia didáctica. (P1, Entrevista semiestructurada 1, 2024).

El profesor P1 sugiere agregar una o dos tareas más que permitan evaluar, de manera integrada, el conocimiento didáctico y geométrico. Finalmente, los dos profesores coinciden en que una mejora del cuestionario se puede lograr reduciendo el número de ítems de cada

competencia, intentando fusionar y/o eliminar algunos de ellos, esto sin perder detalles involucrados en los ítems que permiten evaluar cada competencia. Asimismo, sugieren incluir en la introducción de cada una de las subsecciones del cuestionario, el tiempo para su desarrollo.

Basados en las respuestas de los profesores a la entrevista, se puede observar que ambos valoran de manera positiva tanto la propuesta de competencias como el diseño del instrumento, lo que permite concluir que ellos consideran posible el desarrollo de las competencias propuestas. Estos resultados convalidan las competencias/subcompetencias propuestas para evaluar el desarrollo competencial de los profesores.

5.2.3 Resultados del Momento 3: Aplicación del cuestionario APDM-GC4

El proceso de validación del cuestionario CCDM-GC condujo a la producción de una versión reducida de este cuestionario, la cual se obtuvo en función de las recomendaciones de los cinco jueces tanto de la Sección B como de la Sección C del cuestionario. Esta nueva versión del cuestionario se ha denominado *Cuestionario de Autoevaluación de las Prácticas Didáctico-Matemáticas del profesor de Geometría en torno a Cónicas (APDM-GC4)*, donde el “4” se refiere a que se evalúan solo cuatro competencias de las siete entre la Sección B y la Sección C.

Los resultados de la aplicación de la Sección B del cuestionario APDM-GC4, a 10 profesores en servicio, representados en gráficos de barras, pueden verse en el *Link*, solo siete de los diez profesores respondieron a todas las secciones del cuestionario. A continuación, se presentan los resultados generales de tal aplicación, en la que se han valorado las respuestas de los profesores en función de las competencias B1 y B2 y las subcompetencias B1.1, B1.3 y B2.4, con las que se evalúan las percepciones de ellos en torno al desarrollo de sus propias competencias.

5.2.3.1 Resultados de las Percepciones de los profesores en torno al desarrollo de sus Competencias.

En las Tablas 5.15 y 5.16 se presenta un análisis de frecuencia de acuerdo con las percepciones de los profesores evidenciadas en las respuestas al cuestionario.

En la Tabla 5.15 se puede observar que todas las subcompetencias de la Competencia Matemático-Geométrica, presentan valores mayoritariamente superiores a la categoría media de la escala, lo cual indica que estas subcompetencias presentan un desarrollo apropiado en su práctica profesional, evidenciándose de esta manera que, según su propia opinión, los profesores realizan “Con frecuencia” o “Siempre”, acciones en sus clases basadas en el uso y desarrollo de su Competencia Matemático-Geométrica.

Tabla 5.15 Valoración de las subcompetencias de la Competencia Matemática-Geométrica

Categorías de los ítems	Subsecciones				B1	
	B1.1		B1.3			
	n	%	n	%	n	%
Siempre	32	26,7	35	25,0	67	25,8
Con frecuencia	52	43,3	69	49,3	121	46,5
En ocasiones	29	24,2	26	18,6	55	21,2
Rara vez	7	5,8	9	6,4	16	6,1
Nunca	0	0,0	1	0,7	1	0,4
B1.1: Resolución de problemas (12 ítems)						
B1.3: Análisis de la práctica de resolución de problemas (13 ítems)						

Fuente: datos tomados de la aplicación del cuestionario APDM-GC4

Con respecto a la segunda competencia de análisis e intervención didáctica, la Tabla 5.16 muestra que los resultados correspondientes, según las percepciones de los profesores, son similares a los expuestos para la Competencia Matemático-Geométrica, es decir, la Subcompetencia *Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica* (parte 2.4 del cuestionario: Reflexión en torno al proceso de enseñanza aprendizaje), presenta un desarrollo apropiado,

evidenciando que los profesores, según su propia opinión, realizan “Con frecuencia”, acciones basadas en el uso y desarrollo de su Competencia de Análisis e Intervención Didáctica.

Tabla 5.16 *Valoración de la Subcompetencia de Análisis e Intervención Didáctica*

Categorías de los ítems	Subsecciones		B2	
	B2.4			
	n	%	n	%
Siempre	21	19,1	21	19,1
Con frecuencia	51	46,4	51	46,3
En ocasiones	21	19,1	21	19,1
Rara vez	7	6,4	7	6,4
Nunca	10	9,1	10	9,1
B2.4: Reflexión en torno al proceso de enseñanza y aprendizaje (10 ítems)				

Fuente: datos tomados de la aplicación del cuestionario APDM-GC4

Algunas reflexiones de los profesores en torno a las subcompetencias evaluadas en la Sección B

En las reflexiones finales de la Subsección B1.1 (ver [Anexo 18](#)), los profesores PA1 Y PA2 destacan la importancia de seleccionar problemas que se relacionen con el contexto real del estudiante cuya solución, promuevan una comprensión profunda de los conceptos geométricos en estudio. Además, señalan la falta de capacidad de interpretación por parte de los estudiantes al enfrentarse a un problema, con frecuencia, esperan que el profesor les proporcione las directrices para su solución, sin tomarse el tiempo necesario para analizar y argumentar posibles soluciones por sí mismos.

En cuanto a la Subsección B1.2, el profesor PA1 menciona que, de acuerdo con la experiencia docente, es fundamental realizar un análisis antes, durante y después de presentar problemas a los estudiantes. Antes de la clase, para anticipar posibles dificultades o malentendidos que puedan surgir durante la resolución de problemas, lo que le permite al profesor, preparar estrategias específicas para abordar esas áreas problemáticas. Durante la clase, para observar de cerca las interacciones de los estudiantes con los problemas, identificando el uso

correcto o incorrecto de conceptos, representaciones y argumentos. Después de la clase, para revisar detenidamente el desempeño de los estudiantes, analizando sus errores y aciertos para comprender mejor sus procesos de pensamiento y áreas de mejora. En este sentido, el análisis le dará al profesor, información valiosa para ajustar los procesos de enseñanza, adaptar los métodos y estrategias para abordar las necesidades individuales de los estudiantes y promover un aprendizaje más efectivo. Mencionan además que, utilizar herramientas teórico-metodológicas específicas para profundizar en la comprensión de los procesos cognitivos y didácticos involucrados en la resolución de problemas, le permite mejorar continuamente su práctica.

Las reflexiones de la Sub-sección B2.1 giran en torno a cómo el profesor desarrolla la enseñanza de la matemática, considerándose tal reflexión como parte fundamental de su práctica profesional. Según el profesor PA1, a través de la reflexión se puede evaluar constantemente la efectividad de sus métodos y estrategias, identificar áreas de mejora y adaptar su enfoque para satisfacer las necesidades de los estudiantes. Al reflexionar sobre su práctica docente, el profesor PA1 se pregunta: (1) ¿cómo puede mejorar la comprensión de sus estudiantes con los conceptos geométricos? (2) ¿cómo puede lograr un ambiente de aprendizaje inclusivo y colaborativo? (3) ¿cómo su propuesta didáctica puede generar un impacto en el proceso de aprendizaje de sus estudiantes y cómo puede ajustarla según las necesidades?

5.2.4 Resultados de la aplicación del cuestionario APDM-GC4 en la Sección C.

Competencia Matemático-Geométrica de los profesores.

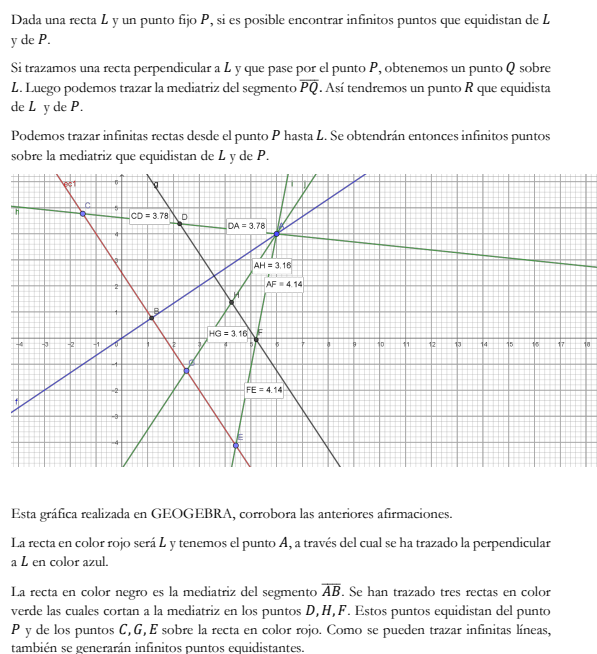
La Sección C del cuestionario APDM-GC4 en la que se solicitó la realización de tres tareas, sólo fue desarrollada por siete de los diez profesores voluntarios. (Ver [Anexo 19](#))

La Tarea 1, en la que se pedía la resolución de un problema de geometría relativo a la definición de parábola, ha sido respondida correctamente por cinco profesores (PA2, PA3, PA4,

PA5 y PA6), parcialmente correcta por un profesor (PA7) y de manera incorrecta por un profesor (PA1) (ver [Anexo 13](#)). Las prácticas matemáticas desarrolladas, siguen procedimientos similares, teniendo en cuenta las condiciones del problema y lo solicitado en este. Sólo un profesor (PA7) usó el software Geogebra para representar los objetos matemáticos involucrados en su respuesta, para argumentar sobre la existencia infinita de puntos que equidistan de un punto y de una recta. La Figura 5.12 muestra lo realizado por este profesor.

De lo planteado por el profesor en la Figura 5.12 se puede observar que trata de justificar su afirmación (sobre la existencia de infinitos puntos que equidistan de un punto y de una recta) haciendo uso de objetos geométricos (puntos, rectas, posiciones relativas, distancias...), para dar una solución al problema. No obstante, un uso incorrecto de la definición de la distancia de un punto a una recta lo conduce al error de afirmar que la mediatriz (sus puntos) es una recta que equidista de un punto y de una recta.

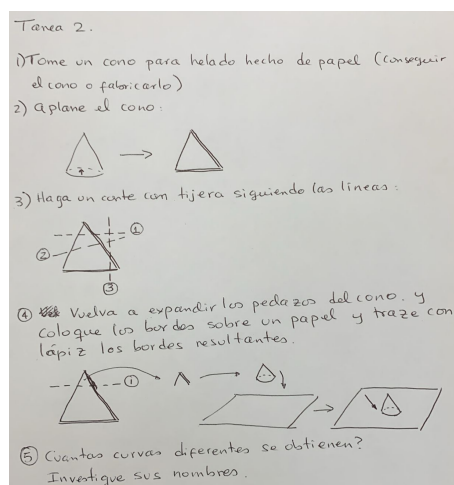
Figura 5.4 Respuesta de PA7 al Problema planteado en la Tarea 1



Fuente: Respuestas al cuestionario APDM-GC4.

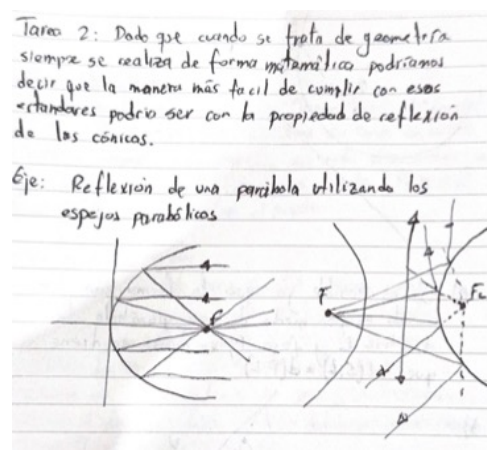
La Tarea 2, en la que se solicitaba formular un problema cuyo fin era evaluar dos de las competencias propuestas en el documento curricular oficial de educación media (MEN, 2006), relativo a cónicas, tres profesores (PA1, PA4 Y PA7) logran involucrar de manera parcial al menos uno de los indicadores propuestos en el problema, otros tres no cumplen con ninguno de los indicadores (PA2, PA3 y PA6) y tan solo uno (PA5) intenta responder a los dos indicadores pero no plantea un problema específico. A continuación se exponen dos de las siete propuestas (Propuesta PA1 y Propuesta PA2). La Propuesta PA1 se centra en el uso de material concreto para deducir las cónicas a través de la construcción de un cono de papel. Por su parte, la Propuesta B propone el uso de espejos parabólicos para explicar la propiedad de reflexión de las cónicas, la Figura 5.13 presenta el planteamiento de cada propuesta.

Figura 5.5 Problema planteado en la Tarea 2: Profesores PA1 y PA2



Propuesta PA1

Fuente: Respuestas al cuestionario APDM-GC4.



Propuesta PA2

La forma en la que se plantea el problema en la Propuesta PA1, sugiere que existe una intención de vincular material concreto para introducir nuevas ideas de pensamiento matemático y geométrico. Este planteamiento otorga un valor didáctico al problema pues combina la experiencia práctica con el concepto de cónica. En este sentido, sitúa al profesor en un nivel de análisis descriptivo y explicativo, considerando ambos como importantes a la hora de desarrollar

un concepto matemático. El uso de material concreto como recurso no solo favorece la comprensión, sino que además posibilita una aproximación al concepto formal de las cónicas.

La Propuesta PA2 por el contrario, lleva el problema a niveles de representación más amplios aplicados a otros campos de conocimiento como la física, con la que no necesariamente están familiarizados los estudiantes por tratarse de dominio conceptual en dos áreas (matemática y física). Si bien esta articulación puede ayudar en la comprensión, también supone un desafío, ya que requiere de conocimientos previos en el campo de la física que no necesariamente es de dominio total de los estudiantes. Asimismo, la forma en la que se escribe el problema, no se ajusta a la instrucción de la tarea ni responde plenamente a los indicadores del enunciado, lo que limita su pertinencia didáctica.

De manera similar, los profesores PA3 y PA6 plantean ejercicios que dirigen al estudiante al uso estricto de algoritmos matemáticos, pero no involucran problemas en contexto, lo que demuestra que sus planteamientos se basan en procesos mecánicos de solución desde la geometría analítica, sin incluir los dos indicadores propuestos en la Tarea 2. En cuanto a las respuestas de los profesores PA2, PA4 y PA7 estos plantean problemas contextualizados en la vida laboral y científica logrando involucrar parcialmente los indicadores propuestos, sin embargo, cuando propone la tarea a realizar, se convierte en un ejercicio de consulta de contenido matemático perdiendo el potencial didáctico. Finalmente, el profesor PA5 propone un ejercicio modelado en el programa GeoGebra, pero no logra formularlo a partir de las condiciones propuestas en la tarea, quedando el programa en un uso meramente instrumental.

Los problemas planteados por los siete profesores muestran una manifestación baja de la Subcompetencia de Planteamiento de Problemas. Se evidencia la intención de describir y explicar el surgimiento de las cónicas mediante representaciones manipulativas, que favorecen la comprensión conceptual y el pensamiento matemático formal. En este sentido, las propuestas de

los profesores PA1, PA4 logran una integración adecuada entre conocimiento matemático y didáctico, situándose en niveles iniciales pero sólidos para la enseñanza de las cónicas. Con respecto a las propuestas de los profesores PA2, PA3, PA5 y PA7 aunque proponen una aplicación contextualizada e interdisciplinar, los problemas no responden a las exigencias de la tarea. Aun así, se evidencia creatividad y proyección con otras áreas de pensamiento, pero no logran la claridad y pertinencia necesarias para ubicarse como un recurso didáctico.

Estos resultados ponen en evidencia la existencia de dificultades presentadas por los profesores para *Plantear Problemas* al no considerar las relaciones entre los objetos matemáticos, los procesos, las representaciones del objeto matemático y la variedad de procedimientos (epistémico) que permiten la comprensión y el aprendizaje de los estudiantes (cognitivo) y favorecen la autonomía en el aprendizaje (interaccional).

La Tarea 3, en la que se solicita resolver un problema relativo a la ecuación canónica de una elipse y realizar un análisis didáctico-matemático de su resolución, se evidencian diferencias en el desempeño de los participantes. Tres profesores resuelven correctamente el problema (PA1, PA4, PA6), otros tres profesores lo resuelven de manera parcial (PA3, PA5, PA7) y uno de ellos no lo resuelve (PA2). En relación con el análisis didáctico-matemático, sólo dos de los siete profesores lo realizan (PA4, PA6). Uno de ellos hace un análisis desde los conocimientos previos, los posibles desafíos, el enfoque didáctico, la relevancia del análisis y la conexión con el contexto. El otro profesor reconoce que el problema está planteado desde un contexto real pero sus preguntas se alejan de las posibles necesidades a resolver en el contexto.

5.3 Resultados de la Fase 2: Diseño del Taller de Formación Profesional (TF-CDM)

En esta fase se muestran los resultados del diseño teórico-metodológico del Taller de formación profesional TF-CDM, fundamentado en: (a) los hallazgos de la Fase 1, (b) el modelo

CCDM (Godino et al. 2016; 2017) y (c) la herramienta de operacionalización del CCDM (Pino-Fan et al., 2023). El taller diseñado obedece a una estructura propia de una propuesta curricular en la que se plantean objetivos, contenidos, metodología y evaluación.

5.3.1 Taller de Formación profesional (TF-CDM)

5.3.1.1 Objetivo General.

Como objetivo para el desarrollo de la fase de diseño, nos trazamos alcanzar el objetivo 4 de investigación (OE4). En este sentido, se crea el taller de formación, que tiene como objetivo principal, desarrollar competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor de geometría en torno a las cónicas. Para el logro de este objetivo se desarrollaron dos acciones de formación principales, haciendo uso de herramientas del enfoque onto-semiótico para el desarrollo de competencias, según el modelo CCDM (Godino et al., 2016; 2017, Pino-Fan et al., 2023). En la primera acción formativa se hizo uso de la herramienta de análisis epistémico/cognitivo y en la segunda la herramienta de la idoneidad didáctica. En este contexto, se valora la planificación realizada por los profesores (y la investigadora) haciendo uso de la herramienta de Idoneidad Didáctica (ID) (Godino, 2013).

5.3.1.2 Objetivos específicos.

El taller de formación para profesores pretende lograr los siguientes objetivos específicos:

1. Fomentar la resolución de problemas sobre cónicas, y el análisis de ésta, identificando objetos y procesos de significación puestos en juego en la misma.
2. Promover la reflexión sobre la actividad de análisis de resolución de problemas y su relación con un desempeño apropiado de la labor del profesor
3. Analizar unidades didácticas elaboradas con el fin de desarrollar el proceso de enseñanza aprendizaje de las secciones cónicas en el grado undécimo de educación básica general.

4. Promover la reflexión sobre el uso de herramientas de análisis de procesos de enseñanza aprendizaje planificados sobre secciones cónicas y su relación con la realización de una actividad docente-matemática de calidad.

En la Fase 3 (apartado 5.3) se describe en detalle, los resultados obtenidos de la implementación del taller de formación diseñado.

5.3.1.3 Contenidos.

1. Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas (Parábola, Elipse).
2. Valoración de procesos de enseñanza aprendizaje: (1) propuesta de planeación por parte de los profesores sobre una de las cónicas (circunferencia, parábola, elipse, hipérbola) (2) propuesta de planeación por parte de la investigadora sobre todas las cónicas, diseñada teniendo como referente la pauta de la idoneidad didáctica.

5.3.1.4 Metodología.

Se planificaron dos sesiones con una duración de cuatro horas cada sesión, para un total de ocho horas. La duración establecida obedece a un uso óptimo del tiempo en el que los profesores participarían presencialmente a la actividad. La optimización se da en función de ocupar el menor tiempo posible de los participantes y en el logro de la aplicación de los dos instrumentos claves del taller. Al inicio de la primera sesión se entrega a cada profesor participante, una carpeta con dos instrumentos y una planificación para el desarrollo de las sesiones: (1) *Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas*, (2) *Pauta para la Valoración de procesos de Enseñanza y Aprendizaje* (ver [Anexos 6, 7, 8](#)), así como hojas en blanco para la escritura de notas personales y complementarias de las actividades del taller. Para cada sesión se tomará la asistencia de los participantes a través del [link](#). Para la recogida de la información en ambas sesiones, serán utilizadas las técnicas de: (1) recogida de

información escrita: producida por los profesores a partir del desarrollo de los instrumentos aplicados en ambas sesiones, (2) entrevista semi estructurada 2 a profesores (sobre el desarrollo del taller), (3) grabaciones de audio de las sesiones del taller.

Para el procedimiento de codificación, se realizó en una primera fase, la lectura abierta y exploratoria para identificar manifestaciones de elementos recurrentes relativos a los objetos matemáticos identificados. En una segunda fase se aplicó un proceso de codificación axial, clasificando las unidades de análisis en las subcategorías referidas. Finalmente se empleó una codificación selectiva que permitió organizar los resultados en torno a patrones comunes entre los profesores. Es preciso mencionar que los conteos de frecuencia no constituyen el análisis en sí mismo, sino un apoyo descriptivo que permite destacar puntos comunes, este conteo facilitó la identificación de los términos centrales en la resolución de los problemas y cuáles no.

La saturación se registra es por medio de la manifestación de elementos que se hacen comunes en los distintos momentos en los que las categorías/subcategorías son valoradas/evaluadas. La triangulación se hace a través del contraste entre la producción de los profesores, las grabaciones de audio y las observaciones consignadas en el diario de campo y las representaciones gráficas producidas en los instrumentos.

El análisis se realizó de manera manual y sistemática, sin apoyo de software especializado como ATLAS.ti puesto que los datos estuvieron conformados únicamente por las producciones de cinco profesores, con lo cual resultó en un volumen de información reducido y manejable (Mason, 2002). En este contexto, el uso de software no aportaba ventajas frente al análisis manual, que permitió mantener un mayor control interpretativo y proximidad con los datos, la estructura del instrumento aplicado, favoreció la codificación directa y organizada de las respuestas, sin necesidad de acudir a procesos automatizados. Aun así, se siguieron criterios de rigor metodológico (registro de frecuencias, tabulación de resultados, procedimientos de

triangulación y saturación teórica) que garantizan la transparencia, fiabilidad y validez del análisis aun sin el empleo de herramientas digitales.

Se tomaron como categorías la Competencia Matemática-Geométrica y la Competencia de Análisis e Intervención didáctica referidas en el capítulo 3 y resumidas en la Figura 3.18. Dentro de estas categorías, se definieron subcategorías que guiaron el análisis de los instrumentos y que corresponden a su vez, a las subcompetencias Resolución de tareas y Análisis de prácticas para la resolución de problemas para la primera categoría y, Análisis y evaluación de la Idoneidad didáctica para la segunda.

Los análisis realizados, se fundamentan en un enfoque mixto (cuantitativo-cualitativo) que permite identificar tanto la frecuencia de uso de objetos matemáticos (dimensión cuantitativa) como el significado que los profesores atribuyen a estos objetos (dimensión cualitativa). Se trabajó sobre las respuestas escritas de los profesores en los instrumentos aplicados y se incorporaron de manera complementaria, evidencias gráficas y orales registradas en las sesiones, cuando estas permitían reforzar o aclarar la interpretación de las respuestas escritas. Esto constituye un registro multimodal, aunque el énfasis del análisis se centró en la producción escrita.

A partir de las propuestas de planificación diseñadas por los cinco profesores sobre alguna de las secciones cónicas, la investigadora hizo un estudio de la idoneidad didáctica, haciendo uso del Instrumento I.7 (ver [Anexo 8](#)), de las planeaciones diseñadas por los profesores. Este estudio permitió valorar las facetas (de contenido, cognitiva, afectiva, mediacional, interaccional y ecológica) en las planeaciones elaboradas por los profesores. Estas valoraciones se compararán con las producidas por los profesores, lo que permitirá una aproximación a la valoración del desarrollo de la Subcompetencia de Análisis de la idoneidad didáctica en los profesores participantes. Estas comparaciones y, por ende, la valoración sobre el desarrollo de la

Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica se presentan en el capítulo 6 sobre discusión de resultados.

5.3.1.5 Justificación.

El diseño metodológico del taller de formación TF-CDM se sustenta en uno de los principios didácticos generales de la pedagogía actual, refrendado y adaptado en los fundamentos teóricos del enfoque onto-semiótico, según el cual el conocimiento didáctico-matemático del profesor no se transmite de manera lineal, sino que emerge de la práctica como un proceso reflexivo. En este sentido, el taller no se diseñó con el fin de ser una guía paso a paso sobre cómo ejecutar un plan de clase para estudiantes de educación media en el concepto de cónicas, ni pretende ser un guion preestablecido diseñado por la investigadora. En cambio, busca ser un medio que permita tanto al profesor en su práctica como a la profesora investigadora, interpretar y orientar las transformaciones que pueden surgir por medio la realización de acciones caracterizadas por la puesta en juego de los instrumentos propuestos y de las reflexiones que puedan surgir por medio de tales acciones. Todas estas acciones contextualizadas en un ambiente que pretende desarrollar competencias y conocimientos del profesor de matemáticas en torno a cónicas.

Desde el punto de vista epistemológico, fundamentados en el enfoque onto-semiótico, la metodología implementada busca que la práctica se convierta en recurso para la producción de conocimiento didáctico-matemático por parte de los profesores participantes, por medio de (1) la práctica de la resolución de tareas y el análisis de las configuraciones epistémicas, cognitivas reconocidas en esa práctica, y (2) la práctica reflexiva por medio del análisis de procesos de enseñanza-aprendizaje planificados para desarrollar la actividad docente en torno a las secciones cónicas.. Es por esto que el diseño de dos sesiones de cuatro horas cada una, responde a la

necesidad de articular profundidad epistémica, cognitiva e instruccional con espacios de reflexión y producción docente. Así, la planeación funciona como eje que organiza los contenidos y actividades, y permite al profesor conectar el estudio de las cónicas con los procesos de enseñanza y aprendizaje en contextos reales, generando una integración entre el conocimiento matemático, el conocimiento didáctico y la práctica del profesor.

Con respecto a la recogida de la información que tiene lugar en el desarrollo del taller, la combinación de técnicas como: (a) producción escrita de los participantes, (b) entrevista semiestructurada 2, (c) grabación de audio, asegura el abordaje cualitativo y cuantitativo que da la posibilidad de hacer un análisis descriptivo e interpretativo de los desempeños de los profesores y la comprensión de las transformaciones didáctico-matemáticas que emergen. Estos desempeños y transformaciones informan sobre el desarrollo de las competencias/subcompetencias propuestas en el marco teórico, las cuales son observadas en las prácticas previstas en el taller y desarrolladas por lo profesores participantes. A la vez, la combinación de las técnicas/fuentes de información referidas, permite fortalecer la validez del proceso de investigación en el que se inscribe la realización del taller, puesto que faculta la triangulación de las fuentes de información, su contraste y complementación.

Así pues, el TF-CDM se constituye en un dispositivo metodológico de carácter formativo dado que permite a los profesores resignificar sus competencias didáctico-matemáticas, e investigativo porque hace posible identificar necesidades, logros y niveles de desempeño desde la práctica. Por lo que la metodología implementada conlleva una estrategia de construcción de conocimiento, fundamentado en la práctica y orientado a mejorar procesos de enseñanza aprendizaje de la geometría, en particular de las cónicas.

Evaluación

Para la evaluación del taller, se aplicará una evaluación de tipo formativa (Wiliam, 2011), entendida como un proceso continuo de recolección y análisis de información sobre el aprendizaje alcanzado por los profesores durante el desarrollo de las dos sesiones. Este enfoque no busca medir el resultado final del taller a través de una juicio de valor, sino identificar oportunamente las dificultades y avances en todo el proceso, permitiendo ofrecer retroalimentación inmediata y realizar ajustes pertinentes. Además, involucra a los participantes en un proceso reflexivo, mediante las técnicas e instrumentos descritos en el apartado 4.7 del capítulo 4. En la primera sesión, la reflexión se basará en el estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas haciendo uso del Protocolo de Estudio de las configuraciones epistémicas/cognitivas (ver [Anexo 20](#)). En la sesión 2 se enfocará en la evaluación de los diseños instruccionales convencionales utilizados por los profesores para la enseñanza de la geometría, esto, mediante el uso de la Pauta de Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje (ver [Anexo 8](#)). Se solicita a los profesores participantes que compartan previamente con la investigadora, sus planeaciones didácticas comunes y utilizadas para desarrollar la enseñanza de la geometría sobre cónicas en grados décimo o undécimo, con el fin de conocer los elementos didácticos y matemáticos que consideran en su proceso de planificación.

Finalmente, se comparte con los profesores, el diseño de la planeación (ver [Anexo 7](#)) planteada a partir de las configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas y la pauta de idoneidad didáctica. Esta unidad pretende servir de referente para ser comparada con la que viene desarrollando el profesor en su práctica. La comparación se realiza mediante el uso de la Pauta de Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje (ver [Anexo 8](#)), aplicada a ambos tipos de planeación (la de los profesores y la de la investigadora), con el fin de fomentar la reflexión y la identificación de posibles ajustes de mejora en ambos tipos de planeación.

5.4 Resultados de la Fase 3: Implementación del Taller de formación profesional (TF-CDM)

En este apartado se presentan los resultados con respecto al desarrollo logrado de las subcategorías/Subcompetencias B1.2 (Análisis de la práctica de resolución de problemas) y B2.1 (Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica) (renombradas para efectos del desarrollo de esta fase de la investigación) a partir de dos análisis, el primero tiene que ver con los resultados del análisis de la aplicación del Instrumento I.6: Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémica/cognitivas (ver [Anexo 20](#)) presentes/emergentes en una tarea de geometría propuesta por la investigadora-doctoranda, por medio de lo cual se identifica el desarrollo logrado de las subcategorías/Subcompetencias B1.1 y B1.2 (en adelante: subcategoría B1.1 y subcategoría B1.2, respectivamente). El segundo, con los resultados del análisis de la aplicación del Instrumento I.7: Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza aprendizaje referida en el capítulo 4 (ver [Anexo 8](#)), tanto de las propuestas de planeación de los profesores, como de la planeación propuesta por la investigadora-doctoranda, por medio de lo cual se identifica el desarrollo logrado de la subcategoría/Subcompetencia B2.1(en adelante: subcategoría B2.1).

De acuerdo con (Krippendorff, 2018), el análisis de contenido debe garantizar que los hallazgos sean interpretaciones válidas de los textos o discursos en relación con los contextos de los que emergen. Así, los criterios de calidad empleados en el análisis —variedad y profundidad, coherencia y eficacia, consistencia y relevancia, claridad y fundamentación— se sustentan en los principios de validez, fiabilidad, y coherencia interna propuestos por Krippendorff (2018, pp. 277 y 361). Estos criterios permiten realizar el proceso analítico y presentar los resultados de las categorías/subcategorías.

5.4.1 *Análisis de la práctica de resolución de problemas (Análisis Subcategoría B1.2)*

A continuación se presenta dos tipos de análisis (descriptivo y de contenido) realizados sobre las respuestas de los profesores al Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de un problema sobre cónicas (ver Anexo 21), por medio de los cuales se obtiene información sobre el desarrollo de la subcategoría B1.2. El enunciado y la resolución del problema que se analiza se presenta en el [Anexo 27](#).

Análisis descriptivo

Para hacer el análisis descriptivo de los resultados de la aplicación de este instrumento, se ha seguido un proceso organizado en el cual primero, se identificaron los objetos matemáticos que intervienen en la práctica de la resolución de problemas, lo cual involucra: los términos clave más frecuentes, definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos más relevantes para cada profesor. Luego, se determina la frecuencia en que aparecen estos objetos en los cinco instrumentos valorados por los profesores participantes. Esto con el fin de identificar patrones que permitan destacar las ideas más comunes en los cinco profesores. Asimismo, se hace un análisis de los conflictos potenciales que encontraron los profesores en cada tipo de objeto matemático analizado.

5.4.1.1 *Identificación de Elementos lingüísticos.*

Los profesores encontraron cinco términos clave, identificados con mayor frecuencia en el análisis de los elementos lingüísticos, en la resolución del problema. A continuación se describe cada uno de ellos, presentando el significado común o más frecuente asignado por los profesores.

Arco de túnel: Se refiere a la forma curva de la parte superior del túnel.

Semielipse: Se describe como la mitad de una elipse, que representa la forma del arco del túnel.

Altura del túnel: Se define como la distancia vertical desde el suelo hasta el punto más alto del arco en cualquier posición a lo ancho del túnel.

Centro del túnel: Se utiliza como referencia para medir la distancia horizontal desde el centro.

Orilla de un carril: Se menciona en relación con la distancia horizontal desde el centro del túnel.

No se observaron conflictos de significado en las producciones de los profesores al referirse a estos términos, identificados como elementos lingüísticos. En la Tabla 5.18 se presenta la frecuencia con que fueron identificados estos términos por parte de los profesores y el significado antes referido.

Tabla 5.17. *Frecuencia de Elementos lingüísticos identificados*

Términos/frecuencia	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	Profesor 4	Profesor 5	Total
Arco de túnel	1	1	1	1	1	5
Semielipse	1	1	1	1	1	5
Altura del túnel	1	1	1	1	1	5
Centro del túnel	1	0	1	1	1	4
Orilla de un carril	0	0	0	0	1	1

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6

De la Tabla 5.17 se observa que, de los cinco elementos lingüísticos y los significados identificados de estos, son claves en la solución del problema de la elipse los términos: “semielipse” y “altura del túnel”, puesto que se presentan con mayor frecuencia. Asimismo, la poca presencia del término “orilla de un carril” muestra que puede prescindirse de este en la resolución del problema. En general, el uso constante de elementos lingüísticos como “arco de túnel”, “semielipse”, “altura de túnel” y “centro del túnel”, indican la influencia que tienen estos términos a la hora de resolver el problema planteado.

Como ejemplo de lo expuesto, la Figura 5.14 presenta la explicación de los elementos lingüísticos tenidos en cuenta por dos profesores (P2, P3).

Se puede observar del Profesor P2, que los elementos lingüísticos descritos están expresados en un lenguaje muy simplificado y con pocas precisiones, además, hace un listado de palabras clave sin profundizar sobre cuál es el conflicto puntual que encuentra en el uso de cada una. Algo similar ocurre con los elementos lingüísticos encontrados en el problema por el profesor P3.

En relación con los *Conflictos potenciales* asociados a los *Elementos lingüísticos* identificados por los profesores en la resolución del problema, se destacan: (1) La interpretación de términos como "arco de un túnel", "semielipse", "orilla de un carril". (2) La interpretación de la frase "Un arco de un túnel es una semielipse de 20 metros de ancho y 7 metros de alto, en el centro del túnel". (3) La relación entre los elementos geométricos de la elipse (semiejes, focos). (4) La distinción entre el sistema de coordenadas de la elipse y las medidas físicas del túnel.

Los conflictos potenciales identificados por los profesores permiten concluir que estos no se derivan de la complejidad matemática del problema, sino de la ambigüedad del lenguaje y la dificultad para interpretar y traducir lenguaje natural en lenguaje matemático, por lo que la comprensión del problema matemático depende tanto del conocimiento del lenguaje común como del especializado.

Figura 5.6 Elementos lingüísticos identificados en la resolución del problema de la elipse.

Elementos lingüísticos del Profesor P2

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (RELACIÓN DE REFERENCIA O DE USO)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)	
* Arco de un túnel	Forma que toma un puente.
* Semielipse 20m ancho	La mitad de una elipse normal
* Alto 7m en centro túnel	Definición del punto más alto de la figura
Conflictos potenciales:	
(a) arco de puente, semielipse, ancho, alto, centro túnel. (b) altura del túnel, orilla de un carril	

Elementos lingüísticos del Profesor P3

TIPOS DE OBJETOS	SIGNIFICADOS (RELACIÓN DE REFERENCIA O DE USO)
ELEMENTOS LINGÜÍSTICOS (términos y expresiones matemáticas: símbolos, representaciones gráficas)	
Arco de tunnel	La parte de arriba de un tunnel
Semielipse de un	La mitad de una elipse.
Orilla o fm	un lado a partir del centro del tunnel
Conflictos potenciales:	
- concepto de arco del tunnel - confusión con la palabra orilla.	

Fuente: Respuestas al Instrumento I.6.

5.4.1.2 Identificación de Conceptos-definiciones.

Los profesores identificaron como conceptos-definiciones y el significado con que estos intervienen en la resolución del problema los siguientes:

Elipse: lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a dos puntos fijos (focos) es constante.

Focos: dos puntos fijos en el eje mayor de la elipse, equidistantes del centro.

Ecuación de la elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Semiejes: distancias desde el centro de la elipse hasta el borde en las direcciones del eje mayor (a) y menor (b).

Centro de la elipse: punto medio del segmento que une los focos.

No se observaron conflictos en los significados propuestos por los profesores a los conceptos-definiciones. En la Tabla 5.18 se presenta un resumen de los conceptos-definiciones más frecuentes identificados por los profesores.

Tabla 5.18. *Frecuencia de Conceptos-definiciones identificados*

Conceptos-definiciones/frecuencia	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	Profesor 4	Profesor 5	Total
Elipse	1	1	1	1	1	5
Focos	1	1	1	1	1	5
Ecuación de la elipse	1	1	1	1	1	5
Semiejes	1	1	1	1	1	5
Centro de la elipse	1	1	1	1	1	5

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6

De la frecuencia con que los profesores se refieren a estos cinco conceptos-definiciones se puede observar que, el predominio del concepto “elipse” muestra que es central en el análisis matemático realizado por los profesores y que es fundamental para comprender el problema. Asimismo, los conceptos de “focos” y “ecuación de la elipse” indica que hay una atención a las propiedades específicas de la sección cónica involucrada en el problema. Asimismo, la presencia constante de conceptos como “semiejes” y “centro de la elipse” que demuestra que los profesores consideran estas entidades como necesarias para la resolución del problema y para comprender la geometría de la elipse.

En síntesis, los profesores muestran competencia para identificar los conceptos-definiciones básicos que se utilizan en la resolución del problema, así como para dar significados matemáticamente apropiados a estos. En la solución de problemas de secciones cónicas, aun cuando los profesores identifican elementos lingüísticos en el problema, no los presentan de forma completa y no permite identificar el dominio conceptual que poseen del objeto matemático estudiado. En la Figura 5.15 se muestran dos ejemplos de los conceptos-definiciones identificados por dos profesores.

En relación con los *Conflictos potenciales asociados al objeto Conceptos-definiciones* identificados por los profesores en la resolución del problema, se destacan: (1) Identificar los ejes de simetría de la elipse (eje mayor y eje menor). (2) Calcular la distancia entre los focos de la

elipse. (3) Ubicar los datos en la gráfica. (4) Reconocer la ecuación canónica de la elipse

$(x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1)$. (5) Hallar la altura del arco. (6) Relacionar las dimensiones del túnel con los parámetros de la ecuación.

Figura 5.7 Conceptos-definiciones presentados por los profesores P2 y P5 en el problema de la elipse

CONCEPTOS - DEFINICIONES (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
arco	sección de círculo
semi-elipse	elipse dividida en su ecuador o semieje
centro	origen de coordenadas o punto medio de la elipse.
elipse	Curva sea que rodea dos puntos focales de tal forma que la distancia de un punto a los dos focos es una constante.
Ecuación de la Elipse	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Conflictos potenciales:	
a) relación entre focos y semiejes	
b) identificar a "a" y "b" como semiejes.	

CONCEPTOS - DEFINICIONES (entidades matemáticas para las cuales se puede formular una definición más o menos formal)	
Lugar geométrico	Puntos que cumplen una o más condiciones geométricas
Ecuación	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
Elipse	curva geométrica se define como conjunto de puntos que tienen una suma constante de distancias a dos puntos fijos llamados focos
Foco	* Es uno de los dos puntos interiores que se concentran en el eje mayor de la elipse y que tiene la propiedad de que la suma de las distancias de cualquier punto de la elipse a los dos focos es constante.
Conflictos potenciales:	
a) $b \neq b^2 = a^2 - c^2$	
b) $y = \sqrt{a^2 - x^2}$	
c) Resolver ecuación	

Fuente: respuestas al Instrumento I.6.

De lo anterior se observa que los profesores consideran conflictivo vincular los conceptos geométricos con el contexto físico y para aplicar una definición general a un caso particular, un paso propio del razonamiento matemático. Esto muestra la necesidad de fortalecer la práctica del profesor dirigida a desarrollar una comprensión relacional entre conceptos y contexto.

5.4.1.3 Identificación de Procedimientos.

Los *Procedimientos* (métodos, técnicas o pasos específicos) identificados por los profesores en la resolución del problema de la elipse se resumen en la Tabla 5.19.

Tabla 5.19. *Frecuencia de los Procedimientos identificados*

Procedimientos/frecuencia	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	Profesor 4	Profesor 5	Total
Uso de la ecuación canónica de la elipse	1	1	1		1	4
Identificación de semiejes a y b	1				1	2
Sustitución de puntos conocidos en la ecuación	1				1	2
Despeje de la variable y	1	1	1			3
Reemplazo de datos conocidos		1	1	1		3
Hallar las coordenadas de los focos				1		1
Verificar la simetría horizontal				1		1
Cálculo del valor y en el punto (7, y)					1	1

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6

Se observa en la Tabla 5.19 que los *Procedimientos* identificados por los profesores se centran principalmente, en la sustitución de valores en ecuaciones, el despeje de variables y el uso de la ecuación canónica para modelar el problema y encontrar la altura del arco del túnel a una distancia del centro. La Figura 5.16 muestra un ejemplo representativo de los procedimientos usados por los profesores en la solución del problema.

Figura 5.8 *Procedimiento presentado por el profesor P5 para resolver el problema de la elipse.*

PROCEDIMIENTOS (técnicas de cálculo, operaciones, algoritmos)	
1) hallar las coordenadas de los focos.	Permite definir la posición x de los focos
2) Verificar la simetría horizontal	un foco debe estar en c y otro en -c
3) reemplazar los valores en la ecuación	Permite entender que se debe despejar "y"
4) despejar "y"	Permite hallar la solución para la altura
Conflictos potenciales:	
a) Calcular bien los cuadrados involucrados	
b) Calcular la raíz cuadrada correctamente.	

Fuente: Respuestas al Instrumento I.6.

De la frecuencia con que los profesores identifican los *Procedimientos*, mostrados en la Tabla 5.19 se puede inferir que predomina la identificación de los mismos procedimientos, lo cual es un indicador de que se utilizan formas de proceder similares en la resolución del problema

de la elipse, es decir, los profesores abordan procedimentalmente de manera similar la resolución del problema, haciendo uso de las mismos métodos y técnicas de cálculo.

En relación con los *Conflictos potenciales* asociados al objeto *Procedimientos* identificados por los profesores en la resolución del problema, se destacan: (1) Usar las operaciones entre fracciones y decimales. (2) Despejar ecuaciones de primer y segundo grado. (3) Convertir una fracción en un decimal. (4) Identificar los semiejes a y b. (5) Interpretar geoméricamente el resultado obtenido.

5.4.1.4 Identificación de Propiedades/proposiciones.

Las *Propiedades/proposiciones* identificadas por los profesores en la resolución del problema de la elipse se resumen en la Tabla 5.20.

Tabla 5.20 Frecuencia de las *Propiedades/proposiciones* identificadas

Propiedad/proposición*/frecuencia	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	Profesor 4	Profesor 5	Total
P1: Ecuación de la elipse	1	1	1	1	1	5
P2: $a=10$ $b=7$	1	1	1	0	1	4
P3: $(x^2/100) + (y^2/49) = 1$	1	1	0	0	0	2
P4: Para $x = 7$, $y \approx 5$	1	1	1	1	1	5

* Las Propiedades/proposiciones se denotan por P1, P2, ..., respectivamente.

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6.

En general cada profesor identifica a lo sumo cuatro *Propiedades/proposiciones*, haciendo uso de diferentes formas de enunciarlas. Todos los profesores identifican propiedades relacionadas con la ecuación de la elipse y sus elementos. En cuanto a los enunciados, utilizados para expresar las *Propiedades/proposiciones* identificadas, aunque diversos, presentan una relación entre los elementos geométricos de la elipse y las dimensiones del túnel. Cada conjunto de *Propiedades/proposiciones*, identificadas por los profesores, busca sustentar el proceso de resolución y la respuesta al problema. A continuación en la Figura 5.17 se presenta un ejemplo de

la identificación realizada por el profesor P5, la cual es representativa de las identificaciones realizadas por ellos.

Figura 5.9 *Proposiciones usados por el profesor P5 en el problema de la elipse.*

PROPIEDADES/PROPOSICIONES (enunciados para los cuales se requiere una demostración o prueba)
P1: La ecuación de la elipse es $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$
P2: el semieje "a" es 10 (horizontal)
P3: el semieje "b" es 7 (vertical).
P4: La altura es 5
Conflictos potenciales:
a) confundir "a" con "b".
b) equivocar al despejar "y".

Fuente: Respuestas al Instrumento I.6.

En síntesis, aun cuando se reconoce una base común en la identificación del objeto Propiedades/proposiciones fundamentales (en torno a ecuación y elementos constituyentes), la diversidad en los enunciados y la falta de uniformidad en la identificación de la totalidad local de Propiedades/proposiciones involucradas, indican diferencias en las capacidades de los profesores para identificar este tipo de objetos matemáticos en la resolución de un problema de elipse.

En relación con la identificación de *Conflictos potenciales* asociados al objeto *Propiedades/proposiciones* que identifican los profesores en la resolución del problema, se destacan: (1) Reconocer las ecuaciones canónica y general de la elipse, con respecto a sus ejes mayor y menor. (2) Reemplazar los valores conocidos para determinar los semiejes a y b de la elipse. (3) Obtener la ecuación general. (4) Sustituir el punto conocido ($x = 7$) en la ecuación de la elipse y hallar el valor de y.

5.4.1.5 Identificación de Argumentos.

Con respecto a la identificación del objeto Argumentos, realizada por los profesores en la resolución del problema de la elipse, se reconoce una variedad de este objeto, cuyo resumen se presenta en la Tabla 5.21.

Tabla 5.21 *Frecuencia de los Argumentos identificados**Frecuencia de los Argumentos identificados*

Argumentos/frecuencia	Profesor 1	Profesor 2	Profesor 3	Profesor 4	Profesor 5	Total
A1	1	1	1	1	1	5
A2	1	1	1	1	1	5
A3	1	1	1	1	1	5
A4	1	0	0	1	1	3
A5	1	0	0	0	0	1

A1: el eje mayor de la elipse es horizontal y el eje menor es vertical, la ecuación canónica que se utiliza es

$\left(\frac{x^2}{a^2}\right) + \left(\frac{y^2}{b^2}\right) = 1$, donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor.

A2: Los valores de a y b se obtienen directamente de las dimensiones del túnel. El semieje mayor a es la mitad del ancho total ($20/2 = 10$), y el semieje menor b es la altura máxima en el centro (7).

A3: Al sustituir los valores de a y b en la ecuación canónica, se obtiene la ecuación específica de la elipse para este problema: $\left(\frac{x^2}{100}\right) + \left(\frac{y^2}{49}\right) = 1$.

A4: El valor de y se obtiene a partir de la sustitución del punto conocido ($x = 7$) en la ecuación de la elipse, y despejando y de la ecuación resultante. Esto es una ecuación de segundo grado.

A5: La interpretación geométrica del resultado obtenido para y representa la altura del arco del túnel a una distancia de 7 metros del centro.

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6.

En general, dos profesores identificaron tres *Argumentos* en sus análisis epistémicos para explicar las Propiedades/proposiciones y procedimientos matemáticos puestos en juego en la resolución del problema sobre elipse, otros dos profesores identificaron cuatro *Argumentos* y solo uno identificó cinco *Argumentos*. Los profesores usan argumentos relacionados con la aplicación de conceptos geométricos y se centran en justificar la elección de los mismos, explicar su relación y sustentar el procedimiento que se llevó a cabo para resolver el problema. Con respecto a la estructura de los argumentos, esta varía entre los profesores, puesto que muestran estilos propios y sus perspectivas individuales del problema. Algunos enfatizan más sobre las propiedades, mientras que otros se centran en la aplicación de técnicas de cálculo y la solución de ecuaciones (aspectos meramente procedimentales). La Figura 5.18 presenta un ejemplo de los argumentos utilizados por el profesor P1 para la solución del problema.

Se puede inferir de la Figura 5.18, que el profesor P1 aporta argumentos apropiados para justificar su propuesta de resolución en relación con el problema de la elipse.

Figura 5.10 *Argumentos en la solución del problema de la elipse por el profesor P1.*

ARGUMENTOS (usados para validar o explicar las propiedades y procedimientos)

A1: Puesto que el eje mayor de la elipse es horizontal y el eje menor es vertical, la ecuación canónica que se utiliza es $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$, donde a es el semieje mayor y b es el semieje menor.

A2: Los valores de a y b se obtienen directamente de las dimensiones del túnel. El semieje mayor a es la mitad del ancho total ($20/2 = 10$), y el semieje menor b es la altura máxima en el centro (7).

A3: Al sustituir los valores de a y b en la ecuación canónica, se obtiene la ecuación específica de la elipse para este problema: $(x^2/100) + (y^2/49) = 1$.

A4: El valor de y se obtiene a partir de la sustitución del punto conocido ($x = 7$) en la ecuación de la elipse, y despejando y de la ecuación resultante. Esto implica resolver una ecuación de segundo grado.

A5: La interpretación geométrica del resultado obtenido para y representa la altura del arco del túnel a una distancia de 7 metros del centro, validando así la relación entre el modelo matemático (elipse) y la forma física del túnel.

Fuente: Respuestas al Instrumento I.6.

En relación con los *Conflictos potenciales* asociados al objeto *Argumentos* que identifican los profesores para resolver el problema, se destacan: (1) Justificar la ecuación canónica basándose en la orientación de los ejes de la elipse en relación con la forma del túnel. (2) Explicar la relación entre las dimensiones del túnel y los parámetros a y b de la ecuación de la elipse. (3) Saber argumentar que la sustitución de los valores de a y b en la ecuación canónica produce la ecuación general. (4) Responder a los procesos algebraicos para despejar y . (5) Hacer una correcta interpretación de la representación gráfica y de los valores asignados a los componentes de la elipse. (6) Explicar cómo al reemplazar el punto, se obtiene el valor de y y la altura del túnel deseada.

A partir de lo anterior, se observa que los profesores identifican de manera apropiada, los objetos que son relevantes para la resolución del problema, con lo cual se puede concluir que lo relativo al desarrollo de la Subcompetencia de Análisis de la práctica de resolución de problemas, los profesores lo logran adecuadamente.

Análisis de contenido

Para mostrar la variedad y profundidad de conceptos y definiciones relacionados con la elipse y otros elementos matemáticos en el contexto de túneles, puentes y arcos, se presenta un análisis de lo identificado por cada profesor en la Tabla 5.22. (ver Anexo 21). En este contexto la variedad se refiere a los conceptos y definiciones que el profesor identifica, mientras que la profundidad, se refiere a la comprensión amplia de los objetos matemáticos identificados.

Tabla 5.22 *Variedad y profundidad: Conceptos y definiciones*

	Variedad	Profundidad
Profesor 1	Identifica los conceptos de elipse, semielipse, focos, ejes de simetría, entre otros, relacionados con la geometría de las figuras presentadas en el contexto de un túnel, necesarios para la resolución del problema.	El significado asignado a los conceptos identificados, son pertinentes, asociados al uso que se hace de estos, con un nivel de profundidad apropiado, mostrando una comprensión amplia de los elementos matemáticos presentes y necesarios en la resolución del problema del túnel.
Profesor 2	Identifica los conceptos de lugar geométrico, ecuación de la elipse, elipse, focos, pero no todos los necesarios en relación con puentes y arcos, y los implementados en la resolución del problema.	Aunque identifica cierta variedad de conceptos, la profundidad de los significados asignados es aceptable, expresados con descripciones superficiales o generales que no son óptimos para la explicación de la resolución del problema.
Profesor 3	Identifica los conceptos de elipse, ecuación de la elipse, focos, distancias, eje mayor y focal, pero no todos los involucrados en la resolución del problema.	Proporciona una profundidad aceptable en la asignación de los significados a los conceptos identificados. Similar a la mostrada por P2
Profesor 4	Identifica los conceptos de elipse, focos, eje mayor, eje focal, longitud de los ejes mayor y menor, omitiendo algunos implicados en la resolución del problema.	El significado asignado a los conceptos identificados es pertinentes con el uso que se hace de estos en la resolución del problema, con un nivel de profundidad apropiado.
Profesor 5	Identifica los conceptos de arco, semielipse, centro, elipse, ecuación de la elipse, reconociendo su uso en la resolución del problema.	La profundidad de los significados asignados a los conceptos identificados es pertinente. Se reconoce de manera pertinente el uso que se hace de estos en la resolución del problema.

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6.

En cuanto a la variedad de los conceptos, los profesores identifican una diversidad de conceptos del álgebra y la geometría relacionados con la elipse y sus características, necesarios y pertinentes para la resolución del problema propuesto, identificando, por ejemplo, definiciones

adecuadas para el contexto del problema. Todos reconocen conceptos fundamentales como focos, ejes o arcos y la mayoría establece relaciones entre estos conceptos y sus usos reales (túneles, arcos: semielipse). Sin embargo, se observan diferencias en la cantidad de conceptos que identifican. El profesor 1 y el Profesor 5 identifican conceptos como semielipse y componentes estructurales del problema (carrera, túnel), lo que indica que hay una lectura más profunda de los elementos matemáticos relacionados en el problema. El Profesor 3 identifica cierta variedad al incluir distancias, eje mayor y eje focal, mostrando atención a características geométricas más específicas. El Profesor 2 por el contrario, reconoce una menor variedad de conceptos pero los que identifica se limitan al uso intra-matemático de estos y no a su aplicación en la resolución contextual del problema. Por ejemplo, el concepto de semielipse o arco para representar la curva que caracteriza el túnel no es reconocido.

Respecto a la profundidad, referida a la descripción o definición y al uso contextualizado de los conceptos por parte de los profesores, se observa que asignan significados adecuados a los conceptos identificados, presentan descripciones o definiciones de estos, pero no los relacionan con el contexto del problema. Esto indica un nivel de análisis con baja profundidad, al presentar los significados asignados a los conceptos identificados basados únicamente en una descripción o en la definición de estos.

Con respecto a la coherencia y eficacia de los procedimientos reconocidos por los cinco profesores se presenta un análisis en la Tabla 5.23. En este contexto, la coherencia viene dada por la identificación de los procedimientos y los significados asignados a estos. Mientras que la eficacia se logra cuando se reconoce la totalidad de los procedimientos que se ponen en juego y son necesarios para la resolución del problema.

Tabla 5.23 *Coherencia y eficacia: Procedimientos*

	Coherencia	Eficacia
Profesor 1	Hay coherencia en los procedimientos que identifica puesto que los significados asignados describen apropiadamente cada uno.	Los procedimientos que reconoce son necesarios para resolver el problema, no obstante, solo identifica la mitad de estos.
Profesor 2	Hay coherencia en los procedimientos que identifica aunque los significados asignados son paráfrasis de estos.	Los procedimientos identificados son adecuados, puesto que se aplican en la resolución, pero no reconoce la totalidad de los necesarios para resolver el problema.
Profesor 3	Existe coherencia en los procedimientos que identifica, no obstante, los significados asignados son generales y superficiales.	La identificación de los procedimientos es apropiada, sin embargo, no reconoce la mayoría de los necesarios para resolver el problema.
Profesor 4	Muestra coherencia entre el significado asignado y los procedimientos identificados, siendo tal asignación generalmente apropiada.	Identifica de manera apropiada los procedimientos implicados en la resolución, aunque solo identifica la mitad de los necesarios.
Profesor 5	Existe coherencia en los procedimientos que identifica puesto que los significados asignados describen apropiadamente los procedimientos reconocidos.	Los procedimientos identificados son requeridos para resolver el problema, no obstante, reconoce solo la mitad de los implicados.

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6.

En relación con la coherencia, la mayoría de los profesores (P1, P4, P5) identifican procedimientos para la resolución del problema de manera apropiada, puesto que tales procedimientos efectivamente son aplicados en la resolución y los significados asignados a estos corresponden con la lógica implícita en cada procedimiento. Siendo los más comúnmente reconocidos los siguientes: Uso de la ecuación canónica de la elipse, Despeje de la variable y, Reemplazo de valores conocidos. El Profesor 2 y el Profesor 3 presentan limitaciones en la asignación de significados a los procedimientos identificados.

En cuanto a la eficacia, se observa que los profesores no identifican los procedimientos necesarios para resolver el problema. Aunque los identificados son pertinentes, muestran falta de eficacia para reconocer la totalidad de los involucrados en tal resolución. Más específicamente

los profesores P1, P4 y P5 muestran mayor eficacia al reconocer los procedimientos necesarios en la resolución. Los profesores P2 y P3, por su parte, muestran una eficacia menor.

En cuanto a la consistencia y relevancia de las propiedades/proposiciones (en adelante proposiciones) identificadas por los cinco profesores, en la Tabla 5.24 se presenta un resumen. En este contexto, las proposiciones son consistentes cuando se identifica de manera organizada la secuencia de las proposiciones necesarias en la resolución del problema. Mientras que la relevancia viene dada si el enunciado de la proposición identificado contribuye de manera explícita a la resolución del problema.

Tabla 5.24 *Consistencia y relevancia: Propiedades*

	Consistencia	Relevancia
Profesor 1	Presenta consistencia en la identificación de las proposiciones necesarias para la resolución del problema, estableciendo una secuencia lógica en tal identificación.	Las proposiciones identificadas son relevantes ya que los enunciados de estas ayudan de manera explícita a resolver el problema.
Profesor 2	Es consistente al identificar las proposiciones necesarias para resolver el problema, puesto que las reconoce en el orden lógico requerido para la resolución.	Las proposiciones identificadas, son relevantes, aunque uno de los enunciados de una de ellas no contribuye de manera explícita a la resolución del problema.
Profesor 3	Las propiedades identificadas de manera escueta no permiten concluir sobre una secuencia lógica que conduzca a la resolución del problema, por tanto, la consistencia es baja.	Presenta falta de relevancia en la identificación de las proposiciones, puesto que los enunciados de estas no contribuyen explícitamente a la resolución del problema.
Profesor 4	Identifica solo dos proposiciones lo que impide establecer la secuencia lógica de resolución del problema y, con ello, la manifestación de una consistencia baja	El enunciado de las dos proposiciones identificadas contribuye a la resolución del problema, lo que las hace relevantes. Sin embargo, la relevancia es en general baja.
Profesor 5	La identificación de las proposiciones necesarias para la resolución del problema es consistente, aunque omite una proposición requerida en la secuencia de resolución.	Enuncia de manera explícita las proposiciones identificadas con lo que contribuye a la resolución del problema y, con ello la relevancia de tal identificación.

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6.

Respecto a la consistencia, las propiedades y proposiciones que la mayoría de los profesores identifica (P1, P2, P5) son consistentes, puesto que tales proposiciones son necesarias

en la resolución del problema. El Profesor 3 y el Profesor 4 presentan limitaciones en la identificación de proposiciones.

En cuanto a la relevancia, se observa que los profesores no identifican las proposiciones necesarias para resolver el problema. Aunque los identificados son pertinentes, muestran falta de relevancia para reconocer la totalidad de estas en la resolución. Más específicamente los profesores P1, P2 y P5 muestran una escogencia de mayor relevancia al reconocer las proposiciones necesarias en la resolución. Los profesores P3 y P4, por su parte, muestran una relevancia menor.

Finalmente, con respecto a la claridad y fundamentación de los argumentos identificados por los profesores al analizar la resolución del problema de la elipse se presenta en la Tabla 5.25 el análisis correspondiente. En este contexto la claridad se refiere a la correspondencia entre los argumentos y proposiciones identificados. Mientras que la fundamentación se interpreta como la justificación de las proposiciones por medio de los argumentos identificados.

Tabla 5.25 *Claridad y fundamentación: Argumentos*

	Claridad	Fundamentación
Profesor 1	Los argumentos identificados muestran correspondencia con las proposiciones reconocidas en la resolución del problema. Por tanto, la claridad se manifiesta apropiadamente.	Los argumentos identificados justifican de manera apropiada las proposiciones reconocidas en la resolución del problema. Así se logra una fundamentación pertinente al identificar los argumentos.
Profesor 2	Muestra deficiencia en la identificación de argumentos al no haber correspondencia entre las propiedades reconocidas y los argumentos identificados. Por tanto, la claridad no se manifiesta de manera apropiada.	Muestra deficiencia en la fundamentación, puesto que los argumentos identificados no justifican las proposiciones reconocidas en la resolución del problema
Profesor 3	Los argumentos identificados no tienen correspondencia con las proposiciones reconocidas en la resolución del problema. Por lo que muestra deficiencia en la claridad de la identificación de los argumentos.	Los argumentos identificados no justifican las proposiciones reconocidas en la resolución del problema. En consecuencia es deficiente la fundamentación en la identificación de los argumentos.
Profesor 4	No establece correspondencia entre los argumentos identificados y las proposiciones reconocidas en la resolución del problema. En	Los argumentos identificados podrían fundamentar las proposiciones necesarias para la resolución del problema, no obstante, las

	consecuencia la identificación de argumentos carece de claridad.	proposiciones identificadas no constituyen la totalidad de las requeridas.
Profesor 5	La claridad se manifiesta de manera apropiada, puesto que los argumentos identificados muestran correspondencia con las proposiciones reconocidas en la resolución del problema.	La fundamentación al identificar los argumentos es apropiada, puesto que los argumentos identificados justifican de manera apropiada las proposiciones reconocidas en la resolución del problema.

Fuente: Datos tomados del Instrumento I.6.

En cuanto a la claridad, la mayoría de los profesores (P2, P3, P4) no presentan un razonamiento de los argumentos que van en correspondencia con las proposiciones identificadas, lo cual muestra que no hay claridad en los argumentos que relacionan para la resolución del problema. Solo los profesores P1 y P5 demuestran tener claridad en la escogencia de los argumentos para las proposiciones identificadas.

Con respecto a la fundamentación, los argumentos identificados por los profesores P1 y P5, justifican de manera apropiada las proposiciones reconocidas en la solución del problema, logrando una fundamentación pertinente. Los profesores P2, P3, P4 por su parte, demuestran que tienen un nivel de fundamentación de los argumentos menor.

En resumen, los resultados de la aplicación del protocolo para el estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas, muestran que existe un desarrollo aceptable de la subcompetencia de análisis de la práctica de resolución de problemas, de acuerdo con los principios de validez, fiabilidad y coherencia interna analizados a partir de los ocho criterios de calidad empleados.

5.4.2 Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica (Análisis Subcategoría B2.1)

5.4.2.1 Análisis por parte de los profesores a las planeaciones a las planeaciones diseñadas por ellos.

A partir de las propuestas de planificación diseñadas por los cinco profesores sobre alguna de las secciones cónicas, se hacen dos análisis. El primero, hace referencia a un análisis descriptivo de las respuestas dadas por los profesores al Instrumento I.7: *Pauta para la*

Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje, en el cual se realiza un análisis basado en la función matemática Chi-cuadrado, con el fin de determinar si existe una asociación significativa entre los tipos de valoraciones de las facetas que constituyen el instrumento (valoración de contenido, valoración cognitiva, valoración mediacional, valoración afectiva, valoración interaccional, valoración ecológica) y las valoraciones dadas por los profesores participantes (valor: 0,1,2,3,4). El segundo, tiene que ver con un análisis de contenido aplicado a las reflexiones expresadas por los profesores en relación con las valoraciones de cada una de estas facetas en el diseño de cada planeación. Se debe señalar que las valoraciones realizadas por los profesores se realizan sobre planeaciones diseñadas por otro profesor. Es decir, ninguno de los profesores evalúa su propia planeación. Esto da mayor objetividad a las valoraciones realizadas por ellos. La aplicación de la pauta de valoración por parte de los profesores puede verse en [Anexo 24](#).

Análisis descriptivo de las respuestas dadas al Instrumento I.7

Para hallar el valor chi-cuadrado, primero se construye una tabla que relaciona la valoración de las facetas y el valor asignado, estos se han extraído de las respuestas dadas por los profesores en el Instrumento I.7. La Tabla 5.26 muestra un resumen de estos valores.

Tabla 5.26 *Valoración de las facetas en las planeaciones de los profesores*

Valoración de faceta/Valor	0	1	2	3	4	Total	% en 0-1
Valoración de contenido	16	20	12	10	2	60	60,0
Valoración cognitiva	13	9	5	8	4	39	56,4
Valoración mediacional	15	9	4	8	4	40	60,0
Valoración afectiva	11	12	1	2	4	30	76,6
Valoración interaccional	25	7	4	9	5	50	64,0
Valoración ecológica	6	3	3	10	3	25	36,0
Total	86	60	29	47	22	244	
%	35,2	24,6	11,9	19,3	9,0		

Fuente: Datos tomados de la aplicación del Instrumento I.7

Lo anterior, representa las frecuencias obtenidas de las respuestas de los cinco profesores en cada una de las facetas valoradas. Para poder hallar los valores de las frecuencias esperadas, se hace uso de la herramienta Microsoft Excel y la fórmula $VE = \frac{\text{total fila} \times \text{total columna}}{\text{total general}}$. Resulta entonces la tabla de contingencia de valores esperados (Tabla 5.27).

Tabla 5.27 *Valores esperados de la valoración de las facetas.*

Valoración de faceta/Valor esperado	VE/0	VE/1	VE/2	VE/3	VE/4
Valoración de contenido	21,14754098	14,7540984	7,13114754	11,557377	5,40983607
Valoración cognitiva	13,74590164	9,59016393	4,6352459	7,51229508	3,51639344
Valoración mediacional	14,09836066	9,83606557	4,75409836	7,70491803	3,60655738
Valoración afectiva	10,57377049	7,37704918	3,56557377	5,77868852	2,70491803
Valoración interaccional	17,62295082	12,295082	5,94262295	9,63114754	4,50819672
Valoración ecológica	8,81147541	6,14754098	2,97131148	4,81557377	2,25409836

Fuente: Datos tomados de los resultados obtenidos de la aplicación del Instrumento I.7

A continuación, se halla el valor chi-cuadrado usando la función PRUEBA.CHICUAD de Excel, usando un nivel de significancia $\alpha = 0.05$. Al hacer esta prueba se ha obtenido un valor $p = 0,047812713$. En general, si el valor p es menor que 0.05, se rechaza la *hipótesis nula*, es decir que hay una relación significativa entre las variables (Valoración de faceta, Valor). Dado que en nuestro caso el valor $p = 0.047812713 < 0.05$, se rechaza la *hipótesis nula*. Lo que muestra que hay una relación estadísticamente significativa entre las variables de la Tabla 5.27, Valoración de faceta y Valor asignado.

De lo anterior se concluye que las respuestas de los cinco profesores participantes en cada una de las valoraciones de las facetas de la idoneidad didáctica son cercanas entre ellas, por lo que las valoraciones en los niveles bajos de la escala (0 - 4) podrían constituir un indicador de una marcada debilidad en el diseño didáctico-matemático en las propuestas de planeación de los cinco profesores. En este sentido, se observa que el valor 0 (Nunca) obtuvo 86 respuestas de un total de 244, lo que representa un 35,2%, le sigue el valor 1 (poco frecuente) con 60 respuestas,

equivalente a un 24,6%, y finalmente con valor 3 (frecuente), 47 respuestas, es decir, un 19,3%. El 20,9% restante, corresponden a las respuestas dadas por los profesores con valoraciones 2 y 4 (moderadamente frecuente y muy frecuente, respectivamente). Agrupando los valores 0, 1, 2 y los valores 3 y 4, se puede observar que las respuestas en el primer grupo tienen mayor predominio que los del segundo grupo, es decir, un 71,7% contra un 28,3%, lo cual convalida la conclusión hipotética inicial, obtenida por medio de la aplicación Chi-cuadrado, de la existencia de una marcada debilidad didáctico-matemática en las planeaciones diseñadas por los profesores al ser valoradas por medio de una pauta que evalúa la idoneidad didáctica de estas. En el análisis de las respuestas de cada valoración sobre la idoneidad didáctica, se observa que hay aspectos débiles y por mejorar tanto en los componentes referidos al *contenido*, así como en los componentes correspondientes a las facetas *interaccional* y *mediacional* de las planificaciones de los profesores participantes.

Este primer análisis indica que los profesores muestran un nivel de desarrollo similar (entre ellos) en cuanto a la Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica al hacer uso de la pauta para valorar una planeación de enseñanza sobre las cónicas, coincidiendo en que las planeaciones requieren ser mejoradas a la luz de lo planteado en la pauta utilizada. Se infiere de este análisis que los profesores reconocen que las planeaciones analizadas presentan una Idoneidad Didáctica predominantemente baja.

Análisis de contenido con base en las reflexiones de los profesores

Para realizar un análisis de contenido con base en las reflexiones registradas por los profesores en la aplicación del Instrumento I.7 (ver [Anexo 25](#)), primero se hace un análisis de contenido extrayendo las facetas de la idoneidad didáctica y hallando las posibles relaciones. Esta información se resume en la Tabla 5.28.

Tabla 5.28 *Facetas de la idoneidad didáctica: reflexiones de los profesores*

Faceta	Reflexión
Faceta cognitiva	Importancia de la claridad en la presentación de contenidos y la evaluación de los conocimientos previos para adaptar la enseñanza.
Faceta de contenido	Sin reflexión
Faceta interaccional	Tendencia común hacia el fomento del trabajo en grupo y la autonomía de los estudiantes en el proceso de aprendizaje. La interacción profesor-estudiante y la adaptación a las necesidades individuales son aspectos clave en la enseñanza.
Faceta mediacional	Necesidad de integrar la innovación, tecnología y relaciones interdisciplinarias en las prácticas de enseñanza.
Afectiva	No se puede hablar de actitudes y emociones porque no hay conocimiento de la población. Los materiales manipulables siempre serán del agrado del estudiante. No son considerados los intereses, las actitudes y emociones del estudiante.
Ecológica	No aporta en innovación y formación profesional. Desconexión del contexto social, escolar, profesional. No hay relación con otras disciplinas.

Fuente: Datos tomados de los resultados obtenidos de la aplicación del Instrumento I.7

De acuerdo con la Tabla 5.28, y con respecto a la faceta cognitiva, los profesores P2 y P3 señalan que las planeaciones revisadas no son explícitas y consideran que requieren ser adaptadas a las necesidades de los estudiantes, reconociendo el contexto educativo y los conocimientos previos de los estudiantes, así como una planificación con una distribución de tiempo y actividades claras que permitan integrar adecuadamente los componentes teóricos y prácticos involucrados. En cuanto a la faceta mediacional, el profesor P4 menciona que no hay una propuesta para implementar herramientas de apoyo físico o tecnológico, lo cual limita las posibilidades tanto de enseñanza como de aprendizaje, pues explicar los conceptos matemáticos y con ejemplos concretos aporta a la comprensión en el aprendizaje. Con respecto a la faceta afectiva, el profesor P4, manifiesta en la planeación analizada, el poco interés por tener en cuenta las actitudes y las emociones de los estudiantes. Asimismo, el profesor P4 también menciona la falta de conexión con los contextos social, escolar, profesional y su relación con otras disciplinas.

En síntesis, las reflexiones de los profesores apuntan hacia una preocupación general por: (a) la claridad en la enseñanza como categoría transversal de las facetas de contenido, cognitiva, mediacional y afectiva. (b) la necesidad de atender a la diversidad funcional de los estudiantes y

(c) la necesidad de incorporar nuevas metodologías de enseñanza aprendizaje, como por ejemplo, la incorporación de elementos tecnológicos en su diseño e implementación.

5.4.2.2 Análisis por parte de la investigadora a las planeaciones diseñadas por los profesores participantes.

A partir de las propuestas de planificación diseñadas por los cinco profesores sobre alguna de las secciones cónicas, se hacen dos análisis. El primero, hace referencia a un análisis descriptivo de las valoraciones realizadas por la investigadora a las respuestas (valoraciones) dadas por los profesores al Instrumento I.7: Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje. Se trata de meta-valoraciones puesto que son valoraciones de la investigadora sobre valoraciones hechas por los profesores a las diferentes facetas de la idoneidad didáctica. El segundo, tiene que ver con un análisis de contenido aplicado a las reflexiones expresadas por la investigadora en relación con las valoraciones de cada una de estas facetas en el diseño de cada planeación. La aplicación de la pauta de valoración por parte de la investigadora puede verse en Anexo 26.

La Tabla 5.29 muestra la frecuencia con la que se valoran las seis facetas de la idoneidad didáctica, según el Instrumento I.7, aplicado a las planeaciones diseñadas por los profesores, por parte de la investigadora.

Tabla 5.29 *Valoración de facetas en las planeaciones de los cinco profesores*

Valoración de faceta/Valor	0	1	2	3	4	Total	% en 0-1
Valoración de contenido	32	20	6	0	0	58	89,7
Valoración cognitiva	14	15	11	0	0	40	72,5
Valoración mediacional	5	16	6	0	0	27	77,8
Valoración afectiva	13	11	6	0	0	30	80,0
Valoración interaccional	23	21	6	0	0	50	88,0
Valoración ecológica	12	8	4	0	0	24	83,6
Total	99	91	39	0	0	229	

%	43,2	39,7	17,1	0	0
---	------	------	------	---	---

Fuente: Datos tomados de los resultados obtenidos del Instrumento I.7.

De los datos presentados en la Tabla 5.29, se puede observar que hay una tendencia clara hacia puntuaciones bajas de las Valoraciones de las facetas, la mayor concentración de las valoraciones se dan entre los puntajes cero y uno, por lo que, según los valores asignados a estas por la investigadora ninguna faceta alcanza los puntajes altos de la escala de valores. Haciendo un análisis de cada una de las planeaciones se puede precisar las que se encuentran en valores extremos. En este sentido, se observa que la Valoración de contenido es la peor valorada. Asimismo, la valoración cognitiva es la mejor valorada. Se infiere de este análisis que las planeaciones realizadas por los profesores presentan una Idoneidad Didáctica baja.

Análisis de contenido con base en las reflexiones de la investigadora

Para realizar un análisis de planeaciones realizadas por los profesores al valorar cada una de las facetas de la idoneidad didáctica, se hizo uso de un análisis de contenido. Esta información se resume en la Tabla 5.30.

Tabla 5.30 *Análisis de los componentes de la Idoneidad Didáctica según las reflexiones de la investigadora*

Faceta	Reflexión
Contenido	Contexto: Falta de contextualización. Argumentación: Ausencia en la argumentación y economía en el lenguaje sin ampliación de las actividades propuestas. Claridad: Falta de claridad en las relaciones entre lo que se pretende enseñar y lo que se busca que aprenda el estudiante.
Cognitiva	Articulación: Desarticulación didáctica, limitaciones en el diseño, listados sin desarrollo. Conexión entre saber previos y nuevos: las planeaciones manifiestan intención, pero carecen de estructura. Falta de una secuencia didáctica. Inclusión: hay mención de atención a la diversidad, sin embargo no se describe el cómo. Evaluación: las evaluaciones planteadas no garantizan un desarrollo de competencias. Ausencia de intenciones pedagógicas explícitas: las planeaciones repiten elementos importantes, pero sin desarrollo didáctico.
Mediacional	Recursos didácticos: mencionados sin especificar. Aunque todos mencionan que usarán recursos, no es claro que tipo de recurso será. Ausencia de contexto: ninguna planeación describe sus estudiantes o menciona sus características.

	Gestión del tiempo: no se detalla con precisión la distribución de momentos de clase, solo se presentan fragmentos de tiempo por actividad, sin claridad y coherencia en el proceso.
Afectiva	Interés y relevancia: hay preocupación por captar el interés de los estudiantes, sin embargo el desarrollo de las planeaciones tiene un enfoque más matemático que de aplicación. Participación activa y colaboración: la participación de estudiantes se menciona pero no se desarrolla claramente.
Interaccional	Contexto: las referencias a la utilidad social y profesional están presentes, pero no hay una planeación que permita sea conocido por los estudiantes. Autonomía y comprensión del estudiantes: las planeaciones buscan que el estudiantes aprenda de manera autónoma, pero no se registra un desarrollo de cómo hacerlos. Interacción: no se evidencia en las planeaciones como se fomenta la interacción. Evaluación de procesos: no se detalla su aplicación concreta y su integración con la enseñanza.
Ecológica	Adaptación e innovación curricular: falta propuestas innovadoras y adaptadas a contextos reales. Conexión con el contexto: No hay claridad en cómo se conectarán los contenidos matemáticos con el contexto social, profesional de los estudiantes. Enfoque interdisciplinar: las planeaciones no vinculan la matemática con otras áreas de conocimiento.

Fuente: Datos tomados de la aplicación del Instrumento I.7 por parte de la investigadora.

De la Tabla 5.30 se puede observar que las cinco planeaciones son débiles en cada una de las facetas de la idoneidad didáctica reflejando una falta de articulación entre diagnóstico, intervención y evaluación, planeaciones que en su mayoría presentan lo deseable pero no lo presenta de manera desarrollada, lo que posiblemente limita una intención formativa de calidad. Todas las planeaciones muestran una ausencia o escasa presencia de situaciones problema contextualizadas que permitan aplicar los conceptos geométricos presentes en el estudio de las cónicas. Los ejemplos, las definiciones y procedimientos son en general omitidos, lo que no permite tener información sobre el uso de estos objetos en la planeación.

Finalmente, se comparte con los profesores, el diseño de la planeación (ver [Anexo 7](#)) planteada a partir de las configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas y la pauta de idoneidad didáctica. Esta unidad pretende servir de referente para ser comparada con la que viene desarrollando el profesor en su práctica. La comparación se realiza mediante el uso de la Pauta de

Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje (ver [Anexo 8](#)), aplicada a ambos tipos de planeación (la de los profesores y la de la investigadora), con el fin de fomentar la reflexión y la identificación de posibles ajustes de mejora en ambos tipos de planeación.

La valoración de la planeación elaborada por la investigadora, se realiza a través del instrumento "Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje" como una manifestación de la subcompetencia "Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica" ([Anexo 28](#)). Los resultados del uso de ese instrumento constituyen un indicador de la efectividad del taller para desarrollar conocimientos y competencias del profesor de matemáticas, específicamente la Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica que contribuye al desarrollo de la Competencia de Análisis e intervención didáctica.

Por otro lado se realiza una valoración del taller por parte de los profesores participantes en cuanto al diseño y desarrollo del mismo ([Anexo 9](#)). Para complementar estas valoraciones se realiza una encuesta en la que intenta recoger las reflexiones de los profesores participantes en relación con las actividades realizadas en las sesiones del taller. Por razones de espacio los análisis referidos se han incluido en los anexos mencionados, como referentes de las contribuciones de la implementación del taller al desarrollo de la Competencia de Análisis e intervención didáctica del profesor.

5.5 Resultados de la Fase 4: Evaluación de la implementación del taller TF-CDM

La evaluación del taller se realiza a partir del análisis de las respuestas de los profesores participantes, considerando sus reflexiones, interpretaciones y valoraciones en torno a la experiencia de formación, que permiten evaluar el taller en relación con el desarrollo de las dos competencias estudiadas: Competencia Matemática-Geométrica y Competencia de Análisis e Intervención Didáctica.

5.5.1 En relación con las herramientas utilizadas

Una primera valoración de los efectos del taller en el desarrollo de las competencias referidas, se observa en las opiniones de los profesores participantes sobre la implementación/uso de las dos herramientas puestas en juego en el taller (Instrumentos I.6 e I.7), registradas por medio de la Entrevista semiestructurada 2 ([ver Anexo 11](#)), en la que los profesores respondían voluntariamente a preguntas diseñadas con el fin de registrar las reflexiones y aportes de ellos para mejorar la propuesta de formación.

5.5.1.1 Con respecto a la evaluación y análisis del estudio de configuraciones epistémica/cognitivas de las cónicas (uso del Instrumento I.6).

Los profesores se refieren al reconocimiento de los diversos objetos (elementos lingüísticos, conceptos, definiciones, procedimientos y propiedades matemáticas) involucradas en la resolución del problema como una actividad esencial para comprender y enseñar el problema de manera eficiente. Asimismo, en el reconocimiento de los conflictos potenciales que los estudiantes podrían enfrentar al abordar el problema. Al respecto, el profesor P1 expresó que “Es interesante porque si hay muchas barreras que uno no tiene presentes en el momento de transmitir la solución de un problema ... que pueden dificultar la comprensión del estudiante” (P1, Entrevista semiestructura 2 I.6, 2024).

También hacen referencia a que el uso de la herramienta ayuda a concebir una guía clara y detallada para ayudar a los estudiantes a comprender y resolver el problema. Finalmente, destacan la importancia de que los profesores cuenten con la profundidad conceptual (epistémica) de las ideas matemáticas abordadas en el problema y además, saber conectar los conocimientos de años anteriores o en otros casos, los menos utilizados.

De la entrevista se puede concluir que los profesores consideran que el estudio epistémico y cognitivo a partir del análisis de los objetos involucrados en la resolución de un problema específico, es necesario para su completa comprensión. Asimismo, reconocen que los estudiantes podrían enfrentar dificultades al interpretar conceptos (objetos) matemáticos clave, lo que destaca la importancia de anticipar y abordar estos conflictos.

Estas opiniones de los profesores participantes constituyen una valoración positiva de la implementación del taller en relación con el uso de la herramienta de análisis de resolución de problemas implementada. Al mismo tiempo, las valoraciones recogidas en las opiniones de estos profesores constituyen un indicador del desarrollo de la Subcompetencia de Análisis de la práctica resolución de problemas.

5.5.1.2 Con respecto al uso de la Pauta de Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje (uso del Instrumento I.7).

El cual ha permitido realizar la evaluación y discusión de la propuesta de planeación diseñada por los profesores, ellos se refieren a que su uso contribuye a identificar aspectos a tener en cuenta la preparación de la clase, el desarrollo de la actividad, la interacción de los estudiantes, la motivación, la relevancia de tomar en cuenta las diferentes facetas propuestas para la evaluación de la planeación. Los profesores expresaron opiniones sobre cómo se desarrolló la actividad, lo que les pareció interesante y relevante, así como la emergencia de sugerencias de mejora en la evaluación de las planeaciones propuestas. Se refieren a la importancia de los procesos de interacción entre los estudiantes, dado que permite que investiguen y discutan de manera autónoma durante el proceso de aprendizaje. Al respecto el profesor P1 expresó: “...pueden ser evaluados con más objetividad ... como son los sentimientos, como son las interrelaciones que se pueden dar en el aula...” (P1, Entrevista semiestructurada 2 I.7, 2024).

Asimismo, los profesores destacan la importancia de abordar de manera holística las seis facetas y con ello lograr una enseñanza y un aprendizaje con significado. Al respecto el profesor P2 comentó que “...en cuanto a las diferentes facetas me gustó mucho la interaccional porque es como crear una empatía con el alumno, una motivación, de que si lo están atendiendo, lo están escuchando...” (P1, Entrevista semiestructurada 2 I.7, 2024).

En resumen, los profesores reconocen, a partir del uso de esta herramienta, que las planeaciones deben incluir: (a) la importancia del desarrollo de una enseñanza dinámica, participativa y centrada en el estudiante para lograr un aprendizaje significativo, (b) simplificar y fraccionar la evaluación final para facilitar su comprensión y asimilación por parte de los estudiantes e incluir, además de lo cognitivo, lo emocional, (c) lo interaccional y lo afectivo como pilares de una enseñanza efectiva, (d) ser un procesos intencional, integral y flexible.

Estos resultados constituyen un indicador del desarrollo de la Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica por parte de los profesores participantes, lo cual, a la vez, representa una evidencia del efecto positivo logrado con la implementación del taller.

5.5.2 En relación con los resultados generales de la implementación

Desde una perspectiva más general se ha observado, con la implementación del taller, y de acuerdo con los resultados antes referidos (apartado 5.4), el desarrollo de las competencias objeto de este trabajo. En la Tabla 5.31 se sintetizan y relacionan el conjunto de manifestaciones que tuvieron lugar en el taller, que informan sobre el desarrollo de tales competencias.

Tabla 5.31 *Evaluación del Taller TF-CDM*

Competencia	Subcompetencia	Instrumentos	Interpretación	Reflexiones esperadas en las respuestas	Interpretación del impacto del taller TF-CDM
Competencia Matemática	Análisis de prácticas para la resolución de problemas	Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas	Movilización de objetos matemáticos integrados en las tareas analizadas en el taller.	Declaraciones sobre la identificación de objetos matemáticos, relaciones y estructuras que antes no observaba.	El taller actúa como dispositivo de ampliación epistémica y de lectura matemática profunda de las tareas escolares.
			Habilidad para detectar matemática subyacente en el problema de la elipse.	Menciones a conexiones entre objetos, materiales, representaciones y contenidos matemáticos.	Se evidencia un desplazamiento desde una mirada superficial a una mirada estructural de la matemática presente en la práctica.
			Identificación de conceptos que requieren profundización.	Expresiones de duda, dificultad o reconocimiento de desconocimiento previo.	La reflexión sobre sus propios vacíos es indicador de reconstrucción del saber matemático y del impacto metacognitivo del taller.
			Relatos sobre aprendizajes, cambios de perspectiva y aspectos formativos.	Comentarios positivos sobre descubrimientos de conocimientos didáctico-matemáticos o profesionales.	Permite interpretar cómo los docentes integran el taller a su identidad profesional.
Análisis e intervención didáctica	Análisis y evaluación de la Idoneidad Didáctica	Pauta para la valoración de procesos de enseñanza aprendizaje	Percepciones sobre la propia manera de enseñar o de comprender la enseñanza.	Expresiones como “me hizo pensar”, “antes no veía...”, “ahora considero...”.	Evidencia de que el taller produjo transformación interpretativa y no solo instrumental.
			Relatos que dan cuenta de conflictos, cuestionamientos o rupturas con prácticas tradicionales.	Dudas, contradicciones, cuestionamientos sobre tareas que antes consideraban apropiadas.	Estas tensiones son clave porque evidencian procesos de reconstrucción profesional generados por el taller.

Fuente: Elaboración propia

En cuanto a la Competencia Matemática-Geométrica, el taller TF-CDM permitió una comprensión más profunda y relacional por parte de los profesores, acerca de su conocimiento matemático y como éste se manifestaba en el problema de la elipse. Los profesores reportan que antes del taller se dedicaban a desarrollar los problemas desde una mirada centrada en el procedimiento, sin explorar elementos epistémicos que subyacen en cada problema matemático. Lo anterior sugiere una ampliación de la estructura con las que los profesores leen y comprenden

el contenido matemático, pasando de una mirada instrumental hacia una mirada estructural-relacional de la matemática (Skemp, 1976), lo cual implica reconocer relaciones, propiedades, representaciones y elementos de la matemática que antes permanecían ocultos.

Particularmente, algunos profesores reconocen vacíos conceptuales, lo cual no se interpreta como una debilidad sino como indicador de conciencia metacognitiva: el taller permitió que identificaran aspectos que antes no sabían que desconocían. En la formación del profesor, este tipo de conciencia puede representar un avance sustantivo hacia el desarrollo de un conocimiento profesional y reflexivo. En síntesis, el taller permitió desde el desarrollo de la Competencia Matemática-Geométrica, enriquecer la lectura avanzada de los problemas matemáticos, en especial de la geometría de las cónicas, visibilizar relaciones y estructuras matemáticas, promover una reflexión sobre los propios límites de conocimientos y permitir reconfigurar la comprensión matemática desde una perspectiva más profunda y fundamentada.

En cuanto a la Competencia de Análisis e Intervención Didáctica, los resultados del taller TF-CDM permitió a los profesores, a partir del análisis de las planeaciones de otros profesores, reconocer las debilidades presentes en sus propias planeaciones, identificando con mayor claridad, las posibles carencias epistémicas, cognitivas, mediacionales, interaccionales y afectivas que inicialmente no eran consideradas para elaborar sus planeaciones. En síntesis, el desarrollo del taller se manifiesta en cambios interpretativos y reflexivos que permiten a los profesores leer de manera más detallada y profunda sus planeaciones, reconociendo sus propias limitaciones.

Es muy interesante que en este caso, se pueda observar la doble aportación que ha tenido el uso de la Pauta de Valoración de proceso de enseñanza aprendizaje en la formación del profesor, en cuanto a la actividad de planificación, a saber: (a) para la elaboración de las planeaciones en sí, las cuales en adelante podrían mejorar, (b) para el análisis de las planeaciones, puesto que realizan un análisis que les permite identificar las fallas de las planeaciones. Lo que se

debe tener presente para posteriores investigaciones, es que esto mismo se logre observar en relación con la primera competencia (Matemática-Geométrica), particularmente no se ha podido observar el posible avance de los profesores al resolver problemas, debido a que los problemas tratados en el taller no fueron resueltos por los profesores, las resoluciones fueron dadas. No obstante, se ha podido observar el desarrollo de su competencia de análisis, en la capacidad mostrada en el reconocimiento de objetos matemáticos y el proceso de significación de estos en el contexto de la resolución de problemas matemáticos. Lo relativo al desarrollo de la Subcompetencia de Resolución de Problemas queda como un asunto pendiente a incluir en nuevas ediciones del taller.

CAPÍTULO 6. DISCUSIÓN DE RESULTADOS

En este apartado se presenta la discusión de los resultados, en el cual se trata de convalidar, a la luz de los resultados presentados, la triangulación de estos y de la literatura consultada, el desarrollo competencial exhibido y logrado por los profesores participantes de las diferentes fases y momentos que tuvieron lugar en la realización de la investigación. En la búsqueda de esa convalidación, se hará la referencia ineludible al logro de los objetivos propuestos y las respuestas a las preguntas de investigación formuladas. Se centrará la atención en observar cómo, de manera transversal, a través de la aplicación de instrumentos y desarrollo del taller, se van presentando y desarrollando las competencias didáctico-matemáticas de los profesores participantes. Teniendo como referencia fundamental el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS), del cual se ha tomado el modelo de conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesor (CCDM) y buena parte de los instrumentos y herramientas (CCDM-GC, APDM-GC4, Protocolo para el Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas, Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje) utilizados para determinar el estado y el desarrollo de las competencias de los participantes. En este orden de ideas, con base en el EOS, según el cual, el desarrollo de competencias del profesor puede ser observado y fomentado por medio del desarrollo de dos tipos de competencias macro: (1) Competencia Matemática-Geométrica y (2) Competencia de Análisis e Intervención Didáctica, se trata de informar sobre el estado y desarrollo de estas.

6.1 Sobre el estudio de conocimientos y competencias del profesor

De acuerdo con los resultados de la revisión de la literatura y los antecedentes de investigación presentados en los capítulos 4 y 2, respectivamente, es necesario mejorar el conocimiento y competencia del profesor, tanto el conocimiento disciplinar como el didáctico. Tales resultados, junto a otros de carácter teórico, referidos en esos capítulos, que corresponden con el logro del objetivo OE1 y la pregunta de investigación PI2, condujeron a adoptar los lineamientos y herramientas del enfoque ontosemiótico, con el fin de desarrollar un conjunto de acciones conducentes a identificar y gestionar el desarrollo de competencias didáctico-matemáticas de profesores en servicio, lo cual fue denominado, en su momento, como competencias profesionales del profesor de matemáticas.

6.2 Competencia Matemática-Geométrica

El desarrollo de la Competencia Matemática-Geométrica se presenta a partir de la realización de acciones registradas en el estudio de la Subcompetencia de Resolución de problemas, la Subcompetencia Plantear problemas y la Subcompetencia Análisis de práctica para la resolución de problemas, a través de los instrumentos (1) Cuestionario CCDM-GC (Aplicación piloto), (2) Cuestionario APDM-GC4 (Aplicación del cuestionario validado), (3) Protocolo para el estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas.

La aplicación piloto del CCDM-GC (ver [Anexo 1](#)) ha permitido observar que las competencias evaluadas, desde el marco teórico del CCDM y niveles de logro (Pino Fan et al., 2023), según las respuestas de los profesores participantes, mostradas en la Sección B del cuestionario, evidencian un desarrollo adecuado y positivo de estas, según las autopercepciones emitidas por los profesores. No obstante, cuando los profesores completan la Sección C del cuestionario, destinada a evaluar la competencia matemático-geométrica, se observa que las

prácticas didáctico-matemáticas relacionadas con las subcompetencias de Resolver problemas, Plantear problemas, y Análisis de prácticas para la resolución de problemas, no se manifiestan de manera adecuada. Es decir, mientras el desempeño de los profesores observado en la Sección B del cuestionario es adecuado y tendiendo hacia niveles altos, (Pino Fan et al., 2023), en la Sección C el desempeño mostrado no es adecuado, tendiendo hacia niveles bajos de desempeño en al menos una de las tres subcompetencias evaluadas. Se observa, una falta de correspondencia entre las autopercepciones y las manifestaciones de esas subcompetencias. Este hecho muestra que el instrumento tiene con la Sección C un “control” en relación con la valoración de la Competencia Matemático-Geométrica, puesto que informa no únicamente de lo que el docente cree sobre su propio desarrollo competencial, sino que indaga sobre el nivel de su desarrollo real. Se debe reconocer que múltiples causas pueden estar incidiendo (falta de tiempo para dedicarse a hacerlo de manera detallada, considerar que respuestas parciales pueden ser suficientes, pensar que lo desarrollado es correcto...) para que los profesores no den una respuesta adecuada a la Sección C del cuestionario. No obstante, en el contexto de lo que objetivamente se ha podido observar, se debe concluir que el nivel competencial mostrado por los profesores participantes tiende a los niveles bajos de la escala de valoración. Este resultado es coincidente con lo referido en la literatura relativa a la insuficiencia de conocimiento matemático y didáctico mostrada por el profesorado en diversos estudios (Ng, 2012; Sunzuma y Maharaj, 2019, Kurt-Birela et al., 2020).

Con respecto a la aplicación del cuestionario APDM-GC4, este permitió dar cuenta de que las competencias evaluadas, en la Sección B del cuestionario, en la que se recogen las autopercepciones que tienen los profesores sobre el desarrollo de sus propias competencias, develan un desarrollo adecuado y optimista dado que el mayor valor porcentual se manifiesta en las categorías “Siempre”, “Con frecuencia” y “En ocasiones”. Sin embargo, cuando los profesores resuelven la Sección C del cuestionario, en la que se debe poner de manifiesto la

Competencia Matemático-Geométrica, se observa que las prácticas didáctico-matemáticas mostradas por la mayoría de los profesores en torno al desarrollo de las subcompetencias: “Plantear problemas” y “Análisis de prácticas de la resolución de problemas”, no son adecuadas o no se realizan. El desempeño de los profesores, observado en la Sección B del cuestionario, tiende hacia niveles medio altos según la perspectiva del desarrollo competencial propuesto por el modelo CCDM (Pino-Fan et al., 2023, pp. 9-16), mientras que la Sección C, la cual se refiere a una evaluación más precisa de la competencia en cuestión, el desempeño mostrado tiende hacia niveles bajos de los niveles de logro, en al menos dos de las tres subcompetencias evaluadas.

6.2.1 Subcompetencia Resolución de problemas

Como resultado del análisis del cuestionario CCDM-GC se evidencia que los profesores poseen un dominio común pero no ampliado del conocimiento matemático-geométrico al momento de resolver problemas, en especial porque se encontró evidencia de un manejo poco apropiado de los objetos matemáticos (representaciones, conceptos, procedimientos, propiedades y argumentos) en la *resolución de problemas* sobre las secciones cónicas, asimismo, conexiones débiles de la noción de cónica con problemas relacionados en contexto.

Algo similar ocurrió con los resultados del análisis del cuestionario APDM-GC4 en esta subcompetencia, donde los profesores mostraron una reducida movilización de los objetos matemáticos proveyendo de soluciones simplificadas y poco detalladas. Aunque los cuestionarios CCDM-GC y APDM-GC4 fueron resueltos por grupos diferentes de profesores en momentos distintos, los resultados conducen a una saturación (al menos local, no generalizable, lo cual tendrá que ser objeto de mayor investigación) debido a la aparición de patrones de desempeño matemático-geométrico similares, mostrando limitaciones en el dominio de los objetos matemáticos asociados a las secciones cónicas y confirmando que el conocimiento matemático

sobre las cónicas se mantiene en un nivel básico y poco desarrollado en ambos grupos, lo que confirma una interpretación lo suficientemente sustentada de las limitaciones en el dominio matemático-geométrico de los profesores participantes. En general, los resultados muestran que hay niveles predominantemente medios-bajos en la Subcompetencia Resolución de problemas en la aplicación de los cuestionarios en sus secciones B y C, con diferencias en la profundidad y el nivel de explicación.

Este análisis muestra que, en el marco de la Competencia Matemática-Geométrica y la Subcompetencia de Resolución de problemas, los profesores muestran ciertas bases epistémicas y cognitivas en relación con las cónicas. Sin embargo, se identifica la necesidad de profundizar en la explicación de los procedimientos, el uso explícito de las propiedades y argumentos que permitan fortalecer la capacidad para fundamentar la resolución de problemas de manera apropiada.

De acuerdo con lo planteado por Godino et al. (2017), el profesor debe tener un amplio conocimiento de las diferentes representaciones y diseñar actividades (resolver situaciones-problema) que favorezcan su articulación. Los resultados obtenidos en los dos instrumentos y grupos de profesores, confirman esta necesidad, coincidiendo con la literatura en torno a la necesidad de desarrollar del conocimiento ampliado/especializado de los profesores (Pino-Fan y Godino, 2015). Particularmente, de acuerdo con Pino-Fan y Godino (2015), el conocimiento ampliado del contenido es el que provee al profesor las bases matemáticas necesarias para plantear nuevos retos matemáticos en el aula y vincular el objeto matemático que se está estudiando con otras nociones matemáticas, es decir que el profesor debe poseer un conocimiento profundo del contenido. En este sentido puede afirmarse que existe saturación en la evidencia relacionada con la Subcompetencia Resolución de Problemas.

6.2.2 Subcompetencia Plantear problemas

El análisis de la Subcompetencia Plantear problemas ha presentado manifestaciones similares a las de la Subcompetencia Resolución de Problemas, así mientras la Sección B del cuestionario informa de un estado adecuado de esta subcompetencia, la Sección C de este señala un estado deficiente de la misma. Esto ha sido observado de manera similar en la aplicación de ambos cuestionarios (CCDM-GC y APDM-GC4).

Particularmente se encontró que los profesores muestran dificultades para plantear problemas contextualizados, de acuerdo con lo propuesto en los estándares curriculares (MEN, 2006), prevaleciendo la formulación de problemas en un contexto intra-matemático sobre el uso de un contexto relacionado con situaciones reales o con otras áreas de conocimiento. En este sentido, se pudo observar que el conocimiento didáctico-matemático de los profesores se muestra fragmentado puesto que logran identificar recursos y contextos, pero no articulan coherentemente los fenómenos reales, las representaciones matemáticas y los objetivos curriculares, al formular problemas. Estos hallazgos muestran que se requiere fortalecer en los profesores la subcompetencia del diseño de situaciones problema que se planteen en contextos reales, que integren distintos registros de representación (concreto, gráfico, algebraico) y que respondan a los objetivos curriculares de las cónicas (MEN, 2006).

De acuerdo con la literatura consultada el desarrollo de esta subcompetencia está en relación con el desarrollo de una comprensión integrada desde lo epistémico y lo cognitivo del conocimiento matemático (Giménez y Vanegas, 2013; Pino-Fan et al., 2023). Más aún, de acuerdo con el EOS, tal desarrollo no solo implica conocer las definiciones, propiedades, representaciones y relaciones del objeto matemático, sino que además, debe anticipar los

conflictos y errores que los estudiantes podrían enfrentar al abordarlo. Cuando el conocimiento del profesor no integra estos aspectos, el diseño de problemas pierde intencionalidad didáctica y se limita a situaciones que solo requieren del uso de procedimientos, sin conectar el contexto con las representaciones matemáticas y los objetivos curriculares.

El estado deficiente en que se manifiesta la Subcompetencia Plantear problemas, entendida como la capacidad del profesor para movilizar su conocimiento matemático especializado al momento de diseñar tareas vinculadas a un objeto matemático específico, requiere la realización de acciones formativas del profesorado, que en el contexto de este trabajo no ha sido posible desarrollar, lo cual se reconoce como una de sus limitaciones. Esta es una tarea pendiente para la continuidad del trabajo aquí iniciado.

6.2.3 Subcompetencia de Análisis de la práctica para la resolución de problemas

Tal y como se hizo en las dos subcompetencias anteriores, la aplicación de los dos cuestionarios (CCDM-GC y APDM-GC4) permitió identificar tensiones relevantes entre el dominio matemático que los profesores declaran tener y el que realmente movilizan al analizar, desde una perspectiva didáctica-matemática, la resolución de problemas. A continuación, se expone cómo se presentan estas tensiones en cada uno de los cuestionarios.

En relación con el cuestionario CCDM-GC, el hecho de que esta subcompetencia declarada en la sección B por los profesores se realice solo “en ocasiones” (24,5%) sugiere que existe una debilidad en la capacidad del profesor para examinar, comparar y valorar diferentes formas de resolver un problema matemático. Este indicador anticipa una tendencia que posteriormente se confirma en la tarea 3 de análisis didáctico-matemático en donde se evidencia la ausencia total de reflexión sobre los elementos didácticos de la tarea, confirmando que el interés

de los profesores es demostrar su competencia matemática y no en comprender cómo ese conocimiento se vincula con la enseñanza.

Esta carencia contrasta con los resultados declarativos del cuestionario APDM-GC4. En este, la subcompetencia de análisis de la práctica para la resolución de problemas aparece valorada en su sección B, por encima de la categoría media, lo que muestra que en su autopercepción, los profesores reportan realizar “con frecuencia” o “siempre” acciones docentes basadas en el uso de esta competencia. Esto revela una discrepancia entre la autoevaluación y la evidencia empírica obtenida en la tarea 3, que muestra vacíos en la articulación y análisis del conocimiento matemático. Únicamente dos de los siete profesores elaboran un análisis didáctico-matemático, los demás omiten por completo este componente de análisis, reproduciendo el patrón observado en el cuestionario CCDM-GC.

Basados en los resultados exhibidos por los profesores en la Sección C de ambos cuestionarios el nivel de la Subcompetencia de Análisis de la práctica de resolución de problemas de los profesores participantes se sitúan en un nivel deficiente, al no realizar un análisis didáctico-matemático y limitarse a descripciones básicas sin integrar reflexiones didácticas (Pino-Fan et al., 2023).

Lo anterior sugiere que los profesores poseen conocimientos matemáticos básicos que les permiten resolver problemas comunes, pero no logran analizar su resolución. Esto refuerza la necesidad de desarrollar procesos formativos que integren el análisis de la práctica de resolución de problemas, la reflexión sobre la enseñanza y el estudio del conocimiento matemático, de modo que el conocimiento didáctico-matemático se fortalezca en los profesores (Font, 2011; Giménez et al., 2013).

En relación con las respuestas de los profesores en el Protocolo para el Estudio de configuraciones Epistémicas/Cognitivas, los profesores han hecho una identificación entre aceptable y apropiada de los objetos matemáticos que se ponen en juego en la resolución del problema de la elipse. Y los significados asignados a los objetos reconocidos por la mayoría de los profesores (3 de 5), proveen de significados apropiados a los objetos identificados.

Los hallazgos referidos, por medio de la aplicación de los cuestionarios (que constituyen un ambiente aislado, que consienten una movilización flexible y personal del conocimiento), señalan un estado deficiente de la Subcompetencia de Análisis de la práctica de resolución de problemas. En cambio en la aplicación del protocolo, al ser una tarea más guiada, estructurada, colectiva, que permite a los profesores interactuar entre ellos, ha dado lugar a la manifestación de un desarrollo parcial de esa subcompetencia..

Por lo anterior, se observa que el instrumento aplicado en un ambiente de formación (taller), permite el desarrollo parcial de la Subcompetencia de Análisis de la práctica de resolución de problemas. Lo cual se ha reconocido como una de las aportaciones significativas de la realización del taller de formación TF-CDM. El logro de ese desarrollo parcial de esta subcompetencia coincide con lo que ha sido referido en la literatura al reconocer que la actividad de análisis involucrada constituye una acción compleja, a la cual profesores en formación inicial y en servicio no están habituados (Godino et al., 2012; Rivas y Godino, 2010).

6.3 Competencia de Análisis e Intervención Didáctica

El desarrollo de la competencia de análisis e intervención didáctica está en relación con las acciones registradas por medio del desarrollo de la Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica, valorada a través del uso del instrumento Pauta de Valoración de procesos de enseñanza-aprendizaje, aplicada a dos análisis realizados: uno hecho por los

profesores participantes a las planeaciones diseñados por ellos, otro realizado por la investigadora a las mismas planeaciones.

6.3.1 *Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica*

La valoración de las planeaciones, realizada tanto por los profesores como por la investigadora por medio de la Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza aprendizaje, muestra tensiones entre la intención declarada de las planeaciones y la calidad didáctica de las mismas. Cuando los profesores valoran las planeaciones de sus pares, sus reflexiones permiten identificar una comprensión incipiente, pero creciente de los criterios que sustentan la idoneidad didáctica. Este reconocimiento se evidencia en la capacidad de identificar que hay ausencias de los descriptores de las facetas cognitiva, mediacional, interaccional y afectiva, en donde los profesores resaltan, en sus reflexiones, que se debe tomar en cuenta la claridad en la enseñanza, la adaptación al contexto, el uso de la tecnología, el fomento del trabajo en grupo y la atención a la diversidad funcional de los estudiantes, entre algunas de las falencias de las planeaciones.

Estos hallazgos muestran que los profesores comienzan a movilizar criterios cognitivo, mediacional, interaccional y afectivo para evaluar la planificación de la práctica docente, aunque aún no lo hacen de forma articulada ni sistemática. El hecho de valorar planeaciones de otro profesor, provee objetividad al proceso de valoración, evidenciando en los profesores, la identificación de debilidades en los otros que no necesariamente logran superar en sus propias planeaciones.

Por su parte, la valoración realizada por la investigadora mediante la pauta presenta una tendencia clara hacia valoraciones bajas en todas las facetas de la idoneidad didáctica. La faceta de contenido resulta ser la más débil, mostrando que las planeaciones carecen de una estructuración conceptual sólida de las cónicas, omitiendo definiciones rigurosas, ejemplos

significativos y procedimientos articulados, lo cual afecta directamente la faceta epistémica y evidencia un nivel insuficiente de conocimiento ampliado y epistémico, situando el trabajo de planeación de los profesores en un nivel de conocimiento común según el modelo CDM.

En particular se ha observado la falta de problemas contextualizados y la poca integración de registros de representación, las cuales limitan la idoneidad didáctica de las propuestas de planeación. Estos resultados son consistentes con lo observado en los cuestionarios, donde los profesores mostraron dominio conceptual básico pero escaso desarrollo epistémico y limitada relación entre representaciones, contextos y objetos matemáticos. Estas limitaciones indican que la transformación de la teoría matemática en práctica efectiva requiere de una formación especializada del profesorado encaminada reforzar la actividad de planificación.

Al observar los resultados de la valoración de las planeaciones realizada por los profesores y la realizada por la investigadora se observa cierta coincidencia en que tales valoraciones tienden a niveles bajos de puntuación, asimismo, aunque con argumentaciones diversas, las reflexiones de los profesores y de la investigadora coinciden al identificar fallas específicas en las planeaciones analizadas. Estas coincidencias, aunque generalmente débiles, informan sobre cierto desarrollo de la Subcompetencia de Análisis y evaluación de la idoneidad didáctica mostrada por los profesores participantes. De esto se infiere que la Competencia de Análisis e intervención didáctica presenta un nivel incipiente en el grupo de profesores participantes, el cual ha sido logrado por medio del uso de la Pauta para la Valoración de procesos de enseñanza aprendizaje. Se debe señalar que los profesores han mostrado hacerse conscientes de la necesidad de confrontar las planeaciones con herramientas como estas para gestionar su mejora. Asimismo, se debe reconocer que el proceso formativo que ha tenido lugar por medio del taller sólo constituye un abreboca para gestionar el desarrollo de esta competencia,

que este requiere de un proceso de formación más extendido que permita avanzar en las capacidades de análisis y reflexión del profesorado.

Estos resultados coinciden con lo expuesto en la literatura en al menos dos aspectos, a saber: (a) se reconoce que el docente debe desarrollar habilidades de análisis y reflexión para anticipar, gestionar y mejorar los procesos de planificación de la enseñanza y con ello su propia práctica profesional, y (b) el uso de la herramienta de análisis de la idoneidad didáctica para lograr tal desarrollo (Breda et al., 2017; Pino-Fan et al., 2017).

6.4 Síntesis integradora del grado de cumplimiento de los objetivos

A continuación, se presenta una síntesis del grado de cumplimiento de los objetivos planteados, la cual se sustenta a partir del análisis de los resultados obtenidos de los distintos instrumentos aplicados y los efectos formativos del taller TF-CDM.

En el apartado 6.1 del presente capítulo se dio cuenta del logro del objetivo específico OE1 y con ello la respuesta a la pregunta de investigación PI2.

En relación con los objetivos OE2 y OE3, la identificación de las competencias didáctico-matemáticas de los profesores y las carencias en estas se logró mediante la aplicación de los cuestionarios CCDM-GC y APDM-GC4. De este modo se da también respuesta a la pregunta de investigación PI3, puesto que el uso de estos instrumentos ha permitido explorar el conocimiento y las competencias profesionales del profesor de matemáticas, dirigido a gestionar de manera idónea los aprendizajes de sus estudiantes en torno a las cónicas. Así, el instrumento no solo cumplió su función diagnóstica, sino que permitió describir las diferentes manifestaciones del conocimiento de los profesores, así como el estado de desarrollo de las competencias matemática y de análisis e intervención didáctica.

En relación con el OE4, los resultados muestran que el programa de formación profesional (TF-CDM) permitió incrementar conocimientos y competencias de los profesores. El

taller favoreció la comprensión más completa del objeto matemático involucrado, la capacidad para analizar la resolución de problemas y el avance desde una mirada correctiva hacia una mirada interpretativa de tal resolución. También fortaleció la competencia de análisis e intervención didáctica haciendo uso de la herramienta de análisis de la idoneidad didáctica

Respecto del objetivo OE5, los efectos del Taller de formación se identificaron tanto en los productos elaborados por los docentes al realizar las actividades propuestas en este como en sus valoraciones y reflexiones. Se observó que, a partir del taller, los profesores desarrollaron criterios más sólidos para juzgar la idoneidad didáctica de una planeación, reconocer debilidades epistémicas y mediacionales, y analizar de manera fundamentada los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En síntesis, el taller tuvo un impacto positivo en el desarrollo de las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos involucrados por parte de los profesores participantes. En este sentido, la realización de este taller responde al logro del objetivo general y a la pregunta de investigación PI1. Se debe reconocer que el desarrollo logrado es predominantemente parcial, no obstante, la realización del taller constituye una vía que potencialmente puede lograr un avance de un desarrollo más completo.

Asimismo, en función del diseño metodológico implementado se reconoce que la realización de este primer ciclo de la investigación de diseño constituye el sustento para llevar a cabo un segundo ciclo de estudio, en el cual el taller y su posible mejora (más sesiones, análisis de un número mayor de problemas y sus resoluciones, análisis de planeaciones elaboradas e implementadas...) constituye parte esencial de tal sustento.

CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES

7.1 Introducción

En este capítulo presentamos una síntesis de las principales conclusiones derivadas del proceso investigativo en relación con el problema, la pregunta y los objetivos de investigación. Las conclusiones emergen del desarrollo de las cuatro fases de una investigación de diseño (Bakker, 2018) realizado con distintos grupos de profesores en servicio, referidos en el capítulo 5. Aunque los resultados de este estudio no pueden ser generalizados, consideramos que puede dar la pauta para analizar las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos del profesor, a través del modelo CCDM y la propuesta de operacionalización expuesta por Pino-Fan et al. (2023). Somos conscientes que aún quedan cuestiones por responder y sobre las que, investigaciones centradas en la formación de profesores de matemática podrían interesarse y continuar indagando sobre modelos de conocimiento de profesor que permitan mejorar la calidad de los procesos de enseñanza-aprendizaje de la geometría y en particular del estudio de las cónicas en los grados de la educación media.

Este capítulo se compone de cuatro apartados. En el primero se describen las acciones que nos llevaron al cumplimiento de los objetivos específicos y, en consecuencia, del objetivo general. En el segundo apartado se mencionan las limitaciones y recomendaciones del estudio. En el tercero se describen las principales contribuciones de la investigación y en el cuarto apartado se presentan posibles ampliaciones de investigación que representan vías para dar continuidad a este trabajo.

7.2 Conclusiones

Para responder a las preguntas de investigación, se plantearon los objetivos (general y específicos) cuyo logro guio las acciones desarrolladas en este trabajo. A continuación, se presentan las principales conclusiones en relación con el cumplimiento de los objetivos propuestos.

Se puede concluir que la revisión de la literatura permitió establecer que las investigaciones sobre la enseñanza de la geometría en educación media, y en particular sobre las cónicas, son limitadas y se concentran principalmente en el “cómo enseñar” y en el uso de recursos metodológicos, dejando en un segundo plano el análisis del conocimiento matemático y didáctico del profesor. Este hallazgo confirma una brecha en la producción académica en relación con llevar a efecto iniciativas dirigidas al estudio y desarrollo del conocimiento y competencias didáctico-matemáticas del profesorado, lo cual ha justificado y orientado la investigación. La revisión sistemática de la literatura evidenció tendencias claras en torno al estudio del conocimiento profesional del profesor, así como avances teóricos relevantes – desde Shulman (1986) hasta Pino-Fan (2023) – que sustentan la necesidad de fortalecer las competencias didáctico-geométricas de los profesores.

Además, Los resultados de la revisión de la literatura (antecedentes y revisión sistemática) han permitido reconocer dos necesidades urgentes para la formación profesional del profesorado: (a) desarrollar instrumentos válidos y confiables para evaluar tales competencias y (b) diseñar programas de formación orientados a mejorar las competencias didáctico-geométricas del profesor de matemáticas.

Se puede concluir que la aplicación de los instrumentos diseñados y validados (CCDM-GC y APDM-GC4) permitió identificar en los profesores un desempeño adecuado en el

reconocimiento de conceptos y procedimientos (Sección B), pero deficiencias notables en tareas de resolución, planteamiento y análisis de problemas (Sección C). Esta discrepancia evidencia que el dominio declarativo no siempre se traduce en competencias didácticas aplicadas, lo que justifica la necesidad de mecanismos de control más sólidos para evaluar el conocimiento profesional del profesor.

La producción del instrumento inicial enfrentó las dificultades de constituir una iniciativa sin precedentes y realizada sobre la base de un planteamiento avanzado del desarrollo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticos del profesorado.

El proceso de validación realizado permitió obtener información relevante por parte de los jueces que condujeron a la reformulación de buena parte de los ítems del cuestionario inicial. No obstante, la rúbrica utilizada para guiar las valoraciones realizadas por los jueces puede ser mejorada si se da la oportunidad de que los jueces puedan emitir observaciones para cada ítem. De manera que aquellos ítems valorados con puntajes bajos de la escala incluyan observaciones específicas para su mejora.

Se concluye entonces, que los cuestionarios desarrollados no solo son herramientas válidas para reconocer fortalezas y debilidades, sino que también revelan la urgencia de fortalecer la *Competencia de Análisis e Intervención Didáctica* mediante prácticas que integren objetos matemáticos, procesos, representaciones y procedimientos diversos. El hallazgo confirma que el desarrollo profesional de los docentes de matemáticas desde la *Competencia Matemática-Geométrica* y la *Competencia de Análisis e Intervención Didáctica*, exige propuestas formativas que trasciendan la adquisición conceptual y avancen hacia la construcción de saberes prácticos y reflexivos, tal como lo sugieren Matos et al. (2015) y Ponte (1994).

Se concluye que los resultados obtenidos en la *Competencia Matemática-Geométrica* a partir del instrumento “Estudio de configuraciones epistémicas/cognitivas de las cónicas” mostraron avances en la comprensión de la estructura matemática de las cónicas y las subcompetencias *Resolución de tareas* y *Análisis de prácticas para la resolución de problemas*, aunque también revelaron limitaciones en la profundidad y organización conceptual, lo que confirma que el criterio de idoneidad epistémica sigue siendo un desafío en la práctica docente.

Asimismo, se concluye que los resultados obtenidos en la *Competencia de Análisis e intervención Didáctica*, desde la aplicación del instrumento “Valoración de procesos de enseñanza aprendizaje”, permitieron constatar que los profesores reconocen la relevancia de las seis facetas de la idoneidad didáctica y empiezan a integrarlas en la planificación, análisis y evaluación de sus clases.

En conclusión, el taller TF-CDM se convalidó como un espacio formativo que no solo aportó nuevos conocimientos matemáticos a los profesores, sino que también fortaleció su competencia de análisis e intervención didáctica, al promover el uso de herramientas que integran el modelo CCDM y los criterios de idoneidad didáctica. Así, el taller no se limitó a transmitir contenidos matemáticos, sino que generó procesos reflexivos y transformadores en los profesores participantes, confirmando la pertinencia de este tipo de intervenciones para el desarrollo profesional de los profesores en la enseñanza de la geometría, específicamente de las cónicas.

El desarrollo de esta investigación permitió responder de manera articulada a los cinco objetivos y, por ende, al objetivo general, aportando tanto a la comprensión del estado actual de la investigación en conocimiento profesional del profesor de matemáticas, como a la construcción y validación de instrumentos y a la implementación de un proceso formativo innovador.

En primer lugar, la revisión sistemática de la literatura evidenció que los estudios sobre enseñanza de la geometría en educación media son escasos y limitados en relación con el objeto

matemático estudiado. Se identificaron tendencias centradas en cómo enseñar contenidos de la matemática, prestando poca atención al análisis del conocimiento didáctico-matemático del profesor. Esta revisión confirmó la necesidad de fortalecer la formación docente y de desarrollar instrumentos válidos y confiables para evaluar sus competencias.

En segundo lugar, la elaboración y aplicación del cuestionario piloto CCDM-GC y el cuestionario APDM-GC4 permitió identificar tanto fortalezas como carencias en el conocimiento matemático y didáctico de los profesores. Los hallazgos mostraron desempeños aceptables en la competencia (Sección B), pero dificultades significativas en las tareas prácticas de resolución, planteamiento y análisis de problemas (Sección C). Los resultados de la aplicación permitieron llegar a la conclusión de que el uso aislado de la Sección B de los cuestionarios no parece dar garantía de la manifestación de prácticas correspondientes al desarrollo de los conocimientos y competencias didáctico-geométricas del profesor en esta subcompetencia. Esto evidenció que la sola posesión de conocimientos teóricos no garantiza prácticas didáctico-geométricas sólidas, y señaló la necesidad de contar con mecanismos de control que permitan evaluar y desarrollar las competencias de análisis e intervención didáctica de los profesores.

En tercer lugar, la implementación del taller TF-CDM demostró ser una estrategia eficaz para incrementar los conocimientos y competencias didáctico-matemáticas de los profesores y para generar efectos positivos en sus prácticas de análisis y reflexión. El uso de instrumentos permitió a los profesores confrontar sus propias planeaciones con una propuesta estructurada desde la idoneidad didáctica, lo que facilitó reconocer limitaciones en la interacción y el contexto, a la vez que logró destacar avances en la organización de contenidos, el uso de recursos y la reflexión sobre la enseñanza.

7.3 Limitaciones del estudio

En la reflexión crítica sobre el ejercicio investigativo, es importante identificar las limitaciones presentes en el proceso, esto para fortalecer nuevas propuestas de investigación. En este caso, se relacionan las siguientes.

La primera limitación tiene que ver con la poca investigación científica que hay en Colombia en el campo de la educación y con profesores en servicio, sobre enseñanza de la geometría en especial de las cónicas en los grados de la educación media. La limitación se asumió para dar cuenta de la novedad de la investigación y la generación de elementos teóricos que aportan el campo de la enseñanza de las matemáticas.

La segunda limitación está en relación con la aplicación del cuestionario CCDM-CG y el cuestionario APDM-GC4 a profesores de matemáticas, pues, aunque fue satisfactoria, se esperaba que cumplieran con todo lo requerido en el mismo, lo cual no ocurrió en ambos momentos de la aplicación. Para el análisis de los resultados, se optó por tener en cuenta principalmente los datos de los profesores que respondieron a todos los ítems y tareas de ambos cuestionarios. Asimismo, la convocatoria realizada para responder a estos cuestionarios constituye un proceso complicado puesto que no permitió una mayor participación de profesores. A pesar de haberse difundido por diversos medios de comunicación (llamadas telefónicas, mensajes de WhatsApp y correos electrónicos), la participación fue menor a la esperada.

La tercera limitación tiene que ver con la imposibilidad de llevar a cabo más sesiones con los profesores en el taller TF-CDM, su dificultad para disponer de los tiempos en jornada contraria a la laboral para poder ampliar el número de sesiones y llegar así a más resultados. Esto se intentó remediar, solicitando a las instituciones públicas, a través de los rectores y la Secretaría de Educación Municipal, que permitieran a los profesores participar del taller en jornada laboral.

Con lo cual, el tiempo destinado para cada sesión fue aprovechada al máximo logrando de esta forma los objetivos propuestos para el taller.

7.4 Recomendaciones del estudio

A partir de las conclusiones alcanzadas y las limitaciones identificadas, se plantean las siguientes recomendaciones para futuras investigaciones sobre formación de profesores de matemáticas:

Dada la escasez de investigaciones realizadas sobre formación de profesores en matemáticas en el contexto colombiano, se recomienda continuar con la investigación en programas de formación de profesores centrada en contenidos geométricos específicos, integrando perspectivas teóricas.

En virtud de la escasa literatura científica disponible sobre el tema, se sugiere el desarrollo de nuevos estudios que exploren la enseñanza de las cónicas en distintos escenarios académicos con investigaciones que incluyan muestras más amplias y diversas de profesores en servicio, esto con el fin de ampliar y diversificar la investigación sobre enseñanza de geometría en educación media.

Se recomienda diseñar estrategias de convocatoria a profesores, más efectiva, como establecer alianzas con instituciones educativas y entidades territoriales para formalizar la participación. Asimismo, programar las actividades en periodos de menor duración y explorar la posibilidad de incentivos académicos o certificaciones que motiven la participación de los profesores.

En cuanto a la limitación del tiempo destinado al taller TF-CDM, se recomienda que futuras experiencias formativas sean reconocidas institucionalmente dentro de la jornada laboral del profesor, para facilitar la asistencia y el compromiso, incorporando, además, actividades de seguimiento y acompañamiento para fortalecer los aprendizajes logrados.

Como recomendación final, se sugiere realizar estudios relacionados que permitan observar la evolución de estas competencias en el tiempo, así como investigaciones que relacionen la formación de profesores recibida y su transformación en la práctica de aula.

7.5 Contribución a la comunidad de investigación

En este apartado, se describen las aportaciones que hemos realizado al campo de investigación en Educación Matemática a partir del desarrollo y resultados obtenidos a lo largo de este estudio.

Mora, C. y Rivas, M. (Manuscrito en prensa). Tendencias sobre el conocimiento profesional de los profesores de geometría, en la educación básica y media: Una revisión sistemática de la literatura. *Revista Colombiana de educación*.

Mora, C. (2022). Concepções do professor de matemática sobre a geometria y su enseñanza. *IX Congresso Ibero-Americano de Educação Matemática - IX CIBEM. Formação de professores que ensinam Matemática*. Sao Paulo, Brasil.

Mora, C. (2023). El Conocimiento profesional de los profesores de matemática para enseñar geometría en la educación básica y media: estado del arte. *Trigésima Conferencia Internacional sobre Aprendizaje. Alfabetización y cambios educativos: Rediscutiendo el aprendizaje digital, el neoliberalismo y las políticas pospandémicas*, Sao Paulo, Brasil.
<https://sobreaprendizaje.com/acerca-de/historia/congreso-2023>

Mora, C. (2023). Conocimientos profesionales del profesor en la enseñanza de la geometría de educación media. *Seminario Latinoamericano de Colaboración sobre el Enfoque Ontosemiótico*. Grupo de Investigación en Educación Matemática de la Universidad de los Lagos. Osorno, Chile.

7.6 Posibles ampliaciones

En esta investigación exploramos y analizamos las competencias y conocimientos didáctico-matemáticos de un grupo de profesores, mediante la aplicación de un cuestionario y un taller de formación cuyos sustentos teóricos principales son el modelo de conocimiento CCDM (Godino, et al., 2017) y la macro herramienta propuesta por Pino-Fan et al. (2023). Su aplicación permitió a los profesores participantes, identificar y reflexionar acerca de sus conocimientos en geometría a través del desarrollo del concepto de cónicas y sus conocimientos didáctico-matemáticos para la enseñanza de este objeto matemático en los grados de la educación media. Sobre la base de las conclusiones expuestas en este capítulo, vemos que una manera de ampliar esta investigación sería dar a conocer ambos instrumentos a cursos de formación de profesores de matemática (Universidades, Escuelas Normales, Institutos, etc.) y dar a conocer a la comunidad académica, cómo el proceso de diseño y análisis de una secuencia de tareas profesionales desarrolladas por los profesores, influye en el desarrollo de competencias didácticas y matemáticas, justificados en el uso adecuado de las herramientas teóricas mencionadas y su contribución en el proceso de formación de futuros profesores.

Por lo anterior, una posible ampliación consistiría en profundizar en el proceso de validación de los cuestionarios utilizados (CCDM-CG y APDM-GC4), así como en el diseño de nuevas tareas que permitan evaluar de manera más amplia y fina las competencias del profesor.

Otra ampliación sería estudiar las dinámicas discursivas, argumentativas y colaborativas que emergen entre los profesores en el espacio formativo, lo cual podría aportar información relevante sobre los procesos de apropiación conceptual y didáctica.

El estudio evidenció el potencial del enfoque en geometría; por tanto, una línea futura es su aplicación en álgebra, estadística, cálculo u otros dominios para examinar su impacto en la formación de profesores de matemáticas.

Otra posible ampliación se puede dar tras realizar comparaciones entre profesores en formación inicial y profesores en servicio, identificando diferencias en sus competencias didáctico-matemáticas, así como las necesidades particulares de formación para cada grupo de profesores.

Finalmente y dado que la participación docente fue limitada, una ampliación sería realizar el estudio con un número mayor de profesores y en distintos contextos (rurales, urbanos, privados y públicos) para fortalecer la validez externa de los resultados y comparar realidades diversas.

ANEXOS

Anexo 1. Cuestionario CCDM-GC

https://drive.google.com/file/d/1pF83Wgaa6Q_3uNWJRXvonYKafyxJ2LCa/view?usp=share_link

Anexo 2. Rúbrica validez de contenido CCDM-GC: sección B

https://drive.google.com/file/d/193xGIIoizQpOticsG6u9YI1B3KAr243i/view?usp=share_link

Anexo 3. Rúbrica validez de contenido CCDM-GC: sección C

https://drive.google.com/file/d/1b6cfDv29_fTsW6JRr2znAT_GlQ7Hl794/view?usp=share_link

Anexo 4. Cuestionario APDM-GC versión validada

https://drive.google.com/file/d/161arvf9GA2qAZmRPpvqfgfRw_nhqD5aC/view?usp=share_link

Anexo 5. Cuestionario APDM-GC4

<https://drive.google.com/file/d/1HYuY4cTskWcumiUhmBArdk4IPcDmb18b/view?usp=sharing>

Anexo 6. Estudio de configuraciones Epistémicas/cognitivas

https://drive.google.com/file/d/1CmTiteuQJ6alUpT9F5JbaBQzCXrTeQX/view?usp=share_link

Anexo 7. Planeación. Propuesta de idoneidad didáctica

https://drive.google.com/file/d/16fyrCbTsMscZ5KoXOIrW7QACOhSovUE9/view?usp=share_link

Anexo 8. Valoración de procesos de enseñanza y aprendizaje

https://drive.google.com/file/d/1hl94opuu0AHO29mldMRbc5o6fo-70wWs/view?usp=share_link

Anexo 9. Evaluación del taller TF-CDM

https://drive.google.com/file/d/1DIoLzDzV26wp_rJTBhKYFK9X-RHD56RM/view?usp=share_link

Anexo 10. Entrevista semi estructurada 1 sobre el CCDM-GC

https://drive.google.com/file/d/1efLPj0W2_mNuczXg6M06ahX6X9YDIBQY/view?usp=share_link

Anexo 11. Entrevista semi estructurada 2 sobre TF-CDM

https://drive.google.com/file/d/1FWniya60-Szh5WmMXHP-YdJMD2ziZcv7/view?usp=share_link

Anexo 12. Respuesta a las tareas propuestas en la sección C del CCDM-GC

https://drive.google.com/file/d/1EenEvTBLmWznzJr9UHIXvfgIHdXyp1S/view?usp=share_link

Anexo 13. Respuestas a la sección C del cuestionario APDM-GC4.

https://drive.google.com/file/d/1tqwfYj0ikdVV1TOOp19MzFNVBCJfAz/view?usp=share_link

Anexo 14. Respuestas de los jueces a la rúbrica de evaluación en la sección B del cuestionario CCDM-GC.

https://drive.google.com/drive/folders/1X09gGrhWgocKWmU6y_c8FgVM2QFCWHPI?usp=share_link

Anexo 15. Respuestas de los jueces a la rúbrica de evaluación en la sección C al cuestionario CCDM-GC.

https://drive.google.com/drive/folders/15wCK2w4UohTwNh0ljbu3OrimbgxYI-Og?usp=share_link

Anexo 16. Protocolo de Entrevista semiestructurada 1 sobre el CCDM-GC

https://drive.google.com/file/d/1orxF86O-Pqf4grU-z75MkBayDNB0qrQH/view?usp=share_link

Anexo 17. Respuestas sobre el cuestionario CCDM-GC

https://drive.google.com/file/d/1gr6JxRALoJ_8nklsxQnvfdms26ZohSZr/view?usp=share_link

Anexo 18. Respuestas sobre el cuestionario APDM-GC4 Sección B

https://docs.google.com/spreadsheets/d/1zE49xNEH1MejexDlQRxoy0JHtpSzWQOV/edit?usp=share_link&oid=101870021497918042155&rtpof=true&sd=true

Anexo 19. Respuestas sobre el cuestionario APDM-GC4 sección C

https://drive.google.com/drive/folders/1Z0tM4Jk9wbStqFU3mURp58S2OHdcvTCA?usp=share_link

Anexo 20. Protocolo para el Estudio de configuraciones Epistémicas/cognitivas

https://drive.google.com/file/d/1j1vd3N5BaI6D3M6YNJtnjSpuBVnS0jg-/view?usp=share_link

Anexo 21. Estudio de configuraciones epistémico/cognitivas elaboradas por los profesores

https://drive.google.com/drive/folders/1_wrzeESGrRfmzNbVvacV7VG3u9lGnxyZ?usp=share_link

Anexo 22. Respuestas a la Valoración de los Procesos de enseñanza Aprendizaje de las planeaciones de los profesores

https://drive.google.com/drive/folders/1FEWHp20NOilNEZGkN5zuQh6CidbfyIb0?usp=share_link

Anexo 23. Respuestas a la Valoración de los Procesos de enseñanza aprendizaje de la planeación de la investigadora.

https://drive.google.com/drive/folders/1eJDty_aMPvyW8Z7sVZ-N8FS7o1DKAYzD?usp=share_link

Anexo 24. Valoración de procesos de la ID.

https://drive.google.com/drive/folders/1bQ97CX46x73XOriiDfFyxOS_DLT6Xt-F?usp=sharing

Anexo 25. Análisis de las planeaciones de los profesores

https://drive.google.com/drive/folders/1rTlDgv1uT5qSGIqJ6vwCeKw_g_4wYJBI?usp=share_link

Anexo 26. Valoración de procesos por parte de la investigadora a las planeaciones de los profesores.

https://drive.google.com/drive/folders/1z9sODEqRZhNfmYXTk0rQ9Gw_LaMEYlod?usp=share_link

Anexo 27. Enunciado y resolución del problema de la parábola y la elipse.

https://drive.google.com/file/d/1RWijccDf8bIBMiKMWHPge_7SjDQwPyIs/view?usp=share_link

Anexo 28. Análisis de resultados de la aplicación de la planeación.

https://drive.google.com/file/d/1V60kG73Ms_XDcrWHqLv9vN2BkS9RjdVM/view?usp=share_link

Anexos



REFERENCIAS

- Almouloud, S., Coulibaly, B., & Keita, M. (2014). Study of the mathematical and didactic organizations of the conics in the curriculum of secondary schools in the Republic of Mali. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (RIPEM)*, 4(3), 48–69.
- Anderson, T., & Shattuck, J. (2012). Design-based research: A decade of progress in education research?. *Educational researcher*, 41(1), 16-25.
<https://doi.org/10.3102/0013189X11428813>
- Aparicio, E., Sosa M., L., & Cabanas, G. (2021). Conversación reflexiva y desarrollo de conocimientos en docentes en formación: el caso de la generalización matemática. *Revista Internacional de Educación en Matemáticas, Ciencias y Tecnología (IJEMST)*, 9(1), 40-62.
- Artigue, M., & Perrin-Glorian, M. J. (1991). Didactic engineering, research and development tool: some theoretical problems linked to this duality. *For the learning of Mathematics*, 11(1), 13-18. <https://www.jstor.org/stable/40248001>
- Azcarate, P. (1998). La formación inicial del profesor de matemáticas : análisis desde la perspectiva del conocimiento práctico profesional. *Revista interuniversitaria de formación del profesorado*, V. 12(2), 32. <http://hdl.handle.net/10201/131891>
- Badillo, E.; Climent, N.; Fernández, C., & González, M. (eds.). (2019). *Investigación sobre el profesor de Matemáticas: práctica de aula, conocimiento, competencia y desarrollo profesional*. Ediciones Universidad de Salamanca, 357-351.
- Bakker, A. (2018). *Design research in education: A practical guide for early career researchers*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9780203701010>

- Ball, D.L. (2000). Bridging practices: Intertwining content and pedagogy in teaching and learning to teach. *Journal of Teacher Education*, 51(3), 241-247.
<https://doi.org/10.1177/0022487100051003013>
- Ball, D. L., Lubienski, S. T., & Mewborn, D. S. (2001). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. In V. Richardson (Ed.), *Handbook of research on teaching*, (4^a ed, pp. 433-456).
<https://doi.org/10.4236/ce.2020.115059>
- Ball, D. L., Hill, H. C., & Bass, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide?. *American Educator*, 29(1), 14-17, 20-22, 43 46. <http://dx.doi.org/10.4236/ce.2015.610101>
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389–407.
<https://hdl.handle.net/20.500.12365/17679>
- Benito, A. (2019). *Construção de um percurso de estudo e pesquisa para formação de professores: O ensino de cônicas* [Tesis doctoral, Universidade Católica de São Paulo]. Repositorio PUCSP. <https://repositorio.pucsp.br/jspui/handle/handle/22544>
- Beltrán, J. C. 2019. *Propuesta de actividades para la enseñanza de las cónicas desde el diseño de una ingeniería didáctica*. [Tesis de maestría: Universidad Distrital Francisco José de Caldas]. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
<http://hdl.handle.net/11349/15277>
- Berguer, J. (2010). *Conic sections: A unified approach to circles, ellipses, parabolas and hyperbolas*. (pp. 181-245). Mathematical Association of America.

- Bonilla, D., Parraguez, M., & Solanilla, L. (2014). Las cónicas: una propuesta didáctica desde la teoría de los modos de pensamiento. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 27, 779-786. <https://funes.uniandes.edu.co/formato-de-archivo/pdf/>
- Bravo, A. (2023). *Diferentes nociones de excentricidad de las cónicas: Concepciones y conocimientos de profesores de bachillerato*. [Tesis doctoral, Instituto Politécnico Nacional]. Repositorio Digital Institucional (RDI). <https://www.repositoriodigital.ipn.mx>
- Breda, A., Pino-Fan, L., & Font, V. (2017). Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 13(6), 1893-1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>
- Brousseau, G. (1986). Fondaments et méthodes de la didactique des Mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques*, 7(2), 33-115. <https://revue-rdm.com/1986/fondements-et-methodes-de-la/>
- Burgos, M., Beltrán-Pellicer, P., Giacomone, B., & Godino, J. (2018). Conocimientos y Competencias de futuros profesores de matemáticas en tareas de proporcionalidad. *Educação e Pesquisa* 44, e182013. <http://dx.doi.org/10.1590/S1678-4634201844182013>.
- Carmona, E., & Climent, N. (2012). Comprensión del conocimiento matemático para la enseñanza que sustenta el diseño de una actividad sobre las ecuaciones de la recta en 1º de bachillerato. En A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M.C. Penalva, F.J. García, y L. Ordóñez (ed.), *Investigación en Educación Matemática XVI. XVI Simposio de la SEIEM*. (pp. 165-175). Jaén, España. <http://www.seiem.es>
- Carrillo, J., Contreras-González, L., Climent, N., & Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge For Mathematics Teaching. *CERME 8: Working Group 18*. Huelva, Spain.

- Carrillo-Yañez, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-González, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, M. C., (2018): The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.
<https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1479981>
- Castro, W. (2011). *Evaluación y desarrollo de competencias de análisis didáctico de tareas sobre razonamiento algebraico elemental en futuros profesores*. [Tesis doctoral, Universidad de Granada]. Digibug-UGR <http://0-hera.ugr.es.adrastea.ugr.es/tesisugr/19656257>
- Chen, W-H. (2013). Applying problem-based learning model and creative design to conic-sections teaching. *International Journal of Education and Information Technologies*, 7(3).
<http://www.naun.org/main/NAUN/educationinformation/c012008-099.pdf>
- Chevallard, Y., & Johsua, M. A. (1982). Un exemple d'analyse de la transposition didactique: la notion de distance. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(2), 1-83.
<http://pascal-francis.inist.fr/vibad/index.php?action=getRecordDetail&idt=12383292>
- Chevallard, Y., & Johsua, M. A. (1985). *La transposition didactique: du savoir savant au savoir enseigné*. La Pensée Sauvage. <http://eduq.info/xmlui/handle/11515/5615>
- Climent, N. (2002). *El desarrollo profesional del maestro de primaria respecto de enseñanza de la matemática: un estudio de caso*. [Tesis de doctorado, Universidad de Huelva] Arias Montano Repositorio Institucional de la Universidad de Huelva.
<http://hdl.handle.net/10272/2742>
- Climent, N. (2019). El conocimiento del profesor. En E. Badillo, N. Climent, C. Fernández y M.T. González (Eds.), *Investigación sobre el profesor de matemáticas: formación,*

práctica de aula, conocimiento y competencia profesional (pp. 107-110). Salamanca:

Ediciones Universidad Salamanca.

Collins, A. Joseph, D., & Bielaczyc, K. (2004) Design Research: Theoretical and Methodological Issues. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 15-42.

http://dx.doi.org/10.1207/s15327809jls1301_2

Conde, M., Sánchez, E., Rico, R., Fruto, E., Bolaño, J., Ramos, L., Yubran, N., & Camacho, J. (2021). Geometry Teaching in Colombia: an Overview from Emerging Didactics for Elementary School Education. *Advances in Mechanics*, 9(3), 1335-1349).

Congreso de la República de Colombia. (1994, 8 de febrero). *Ley 115 de 1994: Por la cual se expide la ley general de educación*. Diario Oficial No.

41.214. https://www.mineduacion.gov.co/1621/articles-85906_archivo_pdf.pdf

Creswell, J. W., & Creswell, J. D. (2018). *Research design: Qualitative, quantitative, and mixed methods approaches*. Sage publications. <https://doi.org/10.1080/15424065.2022.2046231>

Creswell, J. W., & Creswell J. D. (2023). *Research Design: Qualitative, Quantitative, and Mixed Methods Approaches*. Sage Publications. Sixth edition.

Cronbach, L. J. (1951). Coefficient alpha and the internal structure of tests. *Psychometrika*, 16, 297–334. <https://doi.org/10.1007/BF02310555>

Cruz, A., & Gamboa, M. E. (2020). Medios de enseñanza y aprendizaje para la Geometría en la formación de profesores de Matemática. *Didáctica y educación*, 11(2), 289-313.

<https://revistas.ult.edu.cu/index.php/didascalía/article/view/967>

Dávila, M. De Alba D., A., Hernández S., & Antolín F., A. (2013). Secuencia didáctica para el aprendizaje de las figuras cónicas y sus diferentes representaciones. *Culcyt: Cultura Científica y Tecnológica*, (50).

- Design-Based Research Collective. (2003). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. *Educational researcher*, 32(1), 5-8.
<https://doi.org/10.3102/0013189X032001005>
- Díaz, V., & Poblete A. (2016). Modelo de Competencias Profesionales de Matemáticas (MCPM) y su Implementación en Profesores de Enseñanza Primaria en Chile. *Bolema*, 30 (55).
<http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v30n55a23>
- Carrillo de Albornoz, A., & de León, M. *Cónicas, historia de su independencia del cono*. Los libros de la catarata.
- Duval R. (1998). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitive de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, 5, 37-65 (IREM de Strasbourg).
- Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Grupo de Educación Matemática.
- Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*. 61 (1): 103-131.
<https://doi.org/10.1007/s10649-006-0400-z>
- Esendemir, O., & Bindak, R. (2019). Adaptation of the test developed to measure Mathematical knowledge of teaching Geometry in Turkey. *International Journal of Educational Methodology*, 5(4), 547-565. <https://doi.org/10.12973/ijem.5.4.547>
- Escobar-Pérez, J., & Cuervo-Martínez, Á. (2008). *Validez de contenido y juicio de expertos: una aproximación a su utilización*. Avances en Medición, 6, 57–82.
- Etchepare, G. C., Pérez, C., Bolaños, J. A. C., & Ruiz, R. O. (2017). Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas: La necesidad de un análisis multidisciplinar. *Psychology, Society & Education*, 9(1), 1-10. <http://repositorio.ual.es/bitstream/handle/10835/5346/428-1646-1-PB.pdf?sequence=1>

- Fernandes-Maia-Pereira, S., & Kaiber, C.T. (2022). Didactic-Mathematical Knowledge and Teacher Education: An Investigation with Pre-Service and In-Service Mathematics Teachers. *Acta Scientiae*, 24(6), 606-633. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.6243>
- Font, V., Breda, A., Giacomone, B., & Godino, J. D. (2018). Análisis de narrativas de futuros profesores con el modelo de conocimientos y competencias didáctico-matemáticas (CCDM). En L. J. Rodríguez-Muñiz, L. Muñiz-Rodríguez, A. Aguilar-González, P. Alonso, F. J. García García y A. Bruno (ed.), *Investigación en Educación Matemática XXII* (pp. 23-38). Gijón, España. <http://www.seiem.es>
- Font, V. (2011). *Competencias profesionales en la formación de profesores de matemáticas de secundaria*. Avances de Investigación en Educación Matemática, 1, 5-25. <https://union.fespm.es/index.php/UNION/article/view/924>
- Florio, E. (2022). The parabola: Section of a cone or locus of points of a plane? Tips for teaching geometry from some writings by Mydorge and Wallis. *Mathematics*, 10(974). <https://doi.org/10.3390/math10060974>
- Fried, M. N., & Unguru, S. (2001). *Apollonius of Perga's Conica: Text, context, subtext*. (pp. 1-109). Brill.
- Gambini, A., & Lénárt, I. (2021). Basic Geometric Concepts in the Thinking of In-Service and Pre-Service Mathematics Teachers. *Education Sciences*, 11, 1-12. <https://doi.org/10.3390/educsci11070350>
- Galicia, L. A.; Balderrama, J. A., & Edel, R. (2017). Validez de contenido por juicio de expertos: propuesta de una herramienta virtual. *Apertura*, 9 (2), 42-53. <http://dx.doi.org/10.32870/Ap.v9n2.993>
- Garzón, C. (2020). *Situaciones didácticas para el aprendizaje de las cónicas desde el concepto de métrica*. [Tesis de maestría, Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia].

Repositorio.uptc.edu.co:

<https://repositorio.uptc.edu.co/server/api/core/bitstreams/2a4fcae-c7d2-4956-953a-3de71d6b5e98/content>

Giménez, J., & Vanegas, Y. (2020). Miradas iniciales de futuros maestros de Educación Primaria sobre Geometría. *Números*, 105, 25-35. <http://hdl.handle.net/2445/175828>

Giménez, J., Font, V., & Vanegas, Y. (2013). Designing professional tasks for didactic analysis in preservice teacher training. *Journal of Research in Mathematics Education REDIMAT*, 2(2), 119-136. <https://doi.org/10.4471/redimat.2013.25>

Godino, J.D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31. <http://hdl.handle.net/20.500.12799/3098>

Godino, J. D. (2013). Diseño y análisis de tareas para el desarrollo del conocimiento didáctico-matemático de profesores. En J. M. Contreras, G. R. Cañadas, M. M. Gea y P. Arteaga (Eds.), *Actas de las Jornadas Virtuales en Didáctica de la Estadística, Probabilidad y Combinatoria* (pp. 1-15).

Godino, J. D., Rivas, M., Castro, W. F., & Konic, P. (2012). *Desarrollo de competencias para el análisis didáctico del profesor de matemáticas*. *Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática*, 7(2), 1–21. <https://doi.org/10.5007/1981-1322.2012v7n2p1>

Godino, J. D., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2013). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico-semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. *Recherches en didactique des Mathématiques*, 34(2-3), 167-200.

Godino, J D., Batanero, C., Font, V., & Giacomone, B. (2016). Articulando conocimientos y competencias del profesor de matemáticas: el modelo CCDM. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, F. J. Ruiz, T.

- Fernández y A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 285-294). Málaga: SEIEM. <https://funes.uniandes.edu.co/formato-de-archivo/pdf/>
- Godino, J., Giacomone, M. B., Font Moll, V., & Pino-Fan, L. R. (2018). Conocimientos profesionales en el diseño y gestión de una clase sobre semejanza de triángulos: análisis con herramientas del modelo CCDM. *Avances de investigación en Educación Matemática (AIEM)* (13), 63-83. <http://hdl.handle.net/11162/175367>
- Godino, J. D., Batanero, C., Burgos, M., & Gea, M. M. (2021). Una perspectiva ontosemiótica de los problemas y métodos de investigación en educación matemática. *Revista de educação matemática da universidade Ouro Preto (REVEMOP)*, 3, 1-30. <http://dx.doi.org/10.33532/revemop.e202107>
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2019). The onto-semiotic approach. *For the learning of mathematics*, 39(1), 38-43. <https://www.jstor.org/stable/26742011>
- Godino, J.D., Giacomone, B., Batanero, C., & Font, V. (2017). Enfoque ontosemiótico de los conocimientos y competencias del profesor de matemáticas. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 31, 90-113. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v31n57a05>
- Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135. <https://doi.org/10.1007/s11858-006-0004-1>
- Grossman, P.L. (1990). *The making of a teacher: teacher knowledge and teacher education*. Teachers College Press Columbia University.
- Guacaneme, E. A., Obando, G., Garzón, D., & Villa-Ochoa, J. A. (2013). Informe sobre la Formación inicial y continua de Profesores de Matemáticas: El caso de Colombia. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 8, 11-49. <https://funes.uniandes.edu.co/formato-de-archivo/pdf/>

- Hair, J. F., Black, W. C., Babin, B. J., & Anderson, R. E. (2010). *Multivariate data analysis* (7th ed.). Pearson Prentice Hall. <https://elibrary.pearson.de/book/99.150005/9781292035116>
- Herbst, P., Cheah, U. H., Jones, K., & Richard, P. R. (2018). International Perspectives on Secondary Geometry Education: An Introduction. *[ICME-13 Monographs] International Perspectives on the Teaching and Learning of Geometry in Secondary Schools*, cap 1. 1-4. https://doi.org/10.1007/978-3-319-77476-3_1
- Hernández-Sampieri, R., Fernández-Collado, C., & Baptista-Lucio, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª ed.). McGraw-Hill Education.
- Hill, H., Schilling, S., & Ball, D. (2004). Developing measures of teachers' mathematics knowledge for teaching. *The elementary school journal*, 105(1), 11-30.
<https://www.journals.uchicago.edu/doi/abs/10.1086/428763>
- Hill, H., Rowan, B., & Ball, D. (2005). Effects of Teachers' Mathematical Knowledge for Teaching on Student Achievement. *American Educational Research Journal*, 42(2), 371-406. <https://doi.org/10.3102/00028312042002371>
- Hill, H. C., Ball, D. L., & Schilling, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 39(4), 372-400.
DOI: <https://doi.org/10.5951/jresmetheduc.39.4.0372>
- Horsman, R. (2019). International perspectives on the teaching and learning of geometry in secondary schools. *Research in Mathematics Education*, 21(1), 96-100.
DOI: [10.1080/14794802.2018.1531055](https://doi.org/10.1080/14794802.2018.1531055)
- Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES). (2022). Informe nacional de resultados del examen Saber 11° 2021. (cap. 3, pp. 23-37).

https://www.ices.gov.co/documents/39286/1689945/Informe_nacional_de+resultados_Saber11_2021.pdf/68ccc718-dc51-71de-5693-bb907477fa87?t=1655481600171

- Kelle, U., & Nils, C. (2015). The integration of qualitative and quantitative methods in empirical research. *International Journal of Social Research Methodology*, 18(5), 581-585. <https://doi.org/10.1080/13645579.2015.1064463>
- Kilpatrick, J., Blume, G., & Allen, B. (2006). *Theoretical framework for secondary mathematical knowledge for teaching* [Manuscrito no publicado]. University of Georgia y Pennsylvania State University. <http://jwilson.coe.uga.edu/Situations/ProposalDocs/ProposDocs.html>
- Konic, P. M. (2011). *Evaluación de conocimientos de futuros profesores para la enseñanza de los números decimales*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Digibug-UGR. <https://digibug.ugr.es/handle/10481/20318>
- Krippendorff, K. (2018). *Content Analysis. An Introduction to Its Methodology (4th ed.)*. Sage.
- Krippendorff, K. (1990). *Metodología del análisis de contenido. Teoría y Práctica*. Ediciones Paidós.
- Kurt-Birel, G., Deniz, S., & Önel, F. (2020). Analysis of Primary School Teachers' Knowledge of Geometry. *International Electronic Journal of Elementary Education*, 12(4), 303-309. <http://dx.doi.org/10.26822/iejee.2020459459>
- Leton, S.I., Djong, K.D., Uskono, I.V., Dosinaeng, W.B.N., & Lakapu, M. (2020). Profile of elementary school teacher in concept understanding of geometry. *Infinity*, 9(2), 133-146. <https://doi.org/10.22460/infinity.v9i2.p133-146>
- Li, Z. (2022). Problem-solving teaching strategies from the perspective of dividing the core literacy of mathematical operations. *BCP Education & Psychology*, 6, 207-213. <https://doi.org/10.54691/bcpep.v6i.1791>

- Llinares, S. (2012). Construcción de conocimiento y desarrollo de una mirada profesional para la práctica de enseñanza matemáticas en entornos en línea. *AIEM. Avances de Investigación en educación Matemática*, 2, 53-70. <https://doi.org/10.35763/aiem.v1i2.18>
- Martín-Martín, A., Orduna-Malea, E., Thelwall, M., & López-Cózar, E.D. (2018). Google Scholar, Web of Science, and Scopus: A systematic comparison of citations in 252 subject categories. *Journal of informetrics*, 12(4), 1160-1177. <https://doi.org/10.1016/j.joi.2018.09.002>
- May, T. (ed.) (2002) *Qualitative Research in Action*. Londres: Sage Publications.
- Matos, J. F., Powell, A., & Sztajn, P. (2015). *Lesson study as a professional development process: Contributions to teachers' mathematical knowledge for teaching*. *Journal of Research in Mathematics Education REDIMAT*, 4(2), 110-134. <https://doi.org/10.4471/redimat.2015.56>
- McKenney, S., & Reeves, T. (2018). *Conducting educational design research*. Routledge. <https://doi.org/10.4324/9781315105642>
- Mesa, H. (2013). *Propuesta metodológica para la enseñanza-aprendizaje de las cónicas en la educación media con énfasis la hipérbola*. [Tesis de maestría: Universidad Nacional de Colombia]. Universidad Nacional de Colombia.
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2020). *Informe nacional de resultados del examen Saber 11°* (vol. I). MEN
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2006). Estándares básicos de competencias matemáticas. En MEN (Ed.), *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas* (pp. 46-95).
- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares: Matemáticas*.

- Ministerio de Educación Nacional (MEN). (2023). Pruebas PISA 2022: Colombia, un sistema educativo resiliente que requiere cambios estructurales para mejorar su calidad.
<https://www.mineducacion.gov.co/portal/salaprensa/Comunicados/417751:Pruebas-PISA-2022-Colombia-un-sistema-educativo-resiliente-que-requiere-cambios-estructurales-para-mejorar-su-calidad>
- Montes, M., Climent, N., & Contreras, L. (2022). Construyendo conocimiento especializado en geometría: un experimento de enseñanza en formación inicial de maestros. *Aula Abierta*, 51(1), 27-36. <https://doi.org/10.17811/rifie.51.1.2022.27-36>
- Mora, C., & Rivas, M. (Manuscrito en prensa). Tendencias sobre el conocimiento profesional de los profesores de geometría, en la educación básica y media: Una revisión sistemática de la literatura. *Revista Colombiana de educación*.
- Neuendorf, K. A. (2012). *The Content Analysis Guidebook* (2nd ed.). SAGE Publications.
- Newman, M., & Gough, D. (2020). Systematic reviews in educational research: Methodology, perspectives and application. In O. Zawacki-Richter, M. Kerres, S. Bedenlier, M. Bond, & K. Buntins (Eds.), *Systematic reviews in educational research: Methodology, perspectives and application* (pp. 3-22). Springer. https://doi.org/10.1007/978-3-658-27602-7_1
- Ng, D. (2012). Using the MKT measures to reveal Indonesian teachers' mathematical knowledge: challenges and potentials. *ZDM Mathematics Education* 44, 401-413.
<https://doi.org/10.1007/s11858-011-0375-9>
- OECD (2024). *PISA 2022 Results in Focus*. Disponible en: <https://www.oecd.org/pisa/pisa-2015-results-in-focus.pdf>

- Padilla, I., & Acevedo, J. (2022). Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas en la enseñanza de la modelación de la elipse a través de recursos tecnológicos. *Revista Lasallista de Investigación*, 19(1), 67-83. <https://doi.org/10.22507/rli.v19n1a4>
- Pérez, I., (2012). *Estudio de las aplicaciones de las cónicas mediado por la modelación desde una visión analítica*. [Tesis de maestría, Universidad Nacional de Colombia]. Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10032>
- Pincheira, N., & Vásquez, C. (2018). Conocimiento didáctico-matemático para la enseñanza de la matemática elemental en futuros profesores de educación básica: diseño, construcción y validación de un instrumento de evaluación. *Revista Estudios Pedagógicos*, 44(1), 25-48. <http://dx.doi.org/10.4067/S0718-07052018000100025>
- Pino-Fan, L.R., & Godino, J.D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109. <https://doi.org/10.37618/PARADIGMA.1011-2251.2015.p87-109.id552>
- Pino-Fan, L. R., Assis, A., & Castro, W. F. (2015). Towards a methodology for the characterization of teachers' didactic-mathematical knowledge. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 11(6), 1429-1456. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2015.1403a>
- Pino-Fan, L. R., Castro, W. F., & Font, V. (2023). A Macro Tool to Characterize and Develop Key Competencies for the Mathematics Teacher' Practice. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21, 1407-1432. <https://doi.org/10.1007/s10763-022-10301-6>
- Pino-Fan, L., Godino, J. D., & Font, V. (2017). *Meta didactic-mathematical knowledge of teachers: Criteria for the reflection and assessment on teaching practice*. *EURASIA*

Journal of Mathematics, Science and Technology Education, 13(6), 1893-

1918. <https://doi.org/10.12973/eurasia.2017.01207a>

Pino-Fan, L. (2014). *Evaluación de la faceta epistémica del conocimiento didáctico matemático de futuros profesores de bachillerato sobre la derivada*. Granada: Universidad de Granada.

Planchar, E., Garbin Dall'Alba, S., & Gómez Chacón, I. M. (2005). La formación del profesorado en educación matemática: cooperación entre Europa y América Latina. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas*, 38, 45-69.

<http://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=1143100>

Ponte, J. P. (1994). O Desenvolvimento Profissional do Professor de Matemática. *Educação e Matemática*, 31, 9-12. <http://hdl.handle.net/10451/4474>

Proctor, C. (2020). Supporting Critical Computational Literacies Through Interactive Storytelling. [Tesis de doctorado] Stanford University.

<http://purl.stanford.edu/zz662yq7005>

Ribeiro, C.M. & Carrillo, J. (2011). Relaciones en la práctica entre el conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) y las creencias del profesor. En M. Marín, G. Fernández, L.J. Blanco & M. Palarea (ed.), *Investigación en Educación Matemática XV* (513-521). Ciudad Real, España. <http://hdl.handle.net/11162/44442>

Rivas, M. R., & Godino, J. D. (2010). Desarrollo del conocimiento del profesor mediante el estudio de configuraciones epistémicas y cognitivas de la proporcionalidad. *Educere, La Revista Venezolana de Educación*, 14(48), 188-205.

<http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=35616720018>

Robbins, J.B. (2001). ERIC: Mission, structure, and resources. *Government Information Quarterly*, 18(1), 5-17. [https://doi.org/10.1016/S0740-624X\(00\)00062-9](https://doi.org/10.1016/S0740-624X(00)00062-9)

- Rojas, N. (2014). *Caracterización del conocimiento especializado del profesor de matemáticas: un estudio de casos*. [Tesis de doctorado, Universidad de Granada]. Digibug - UGR: <https://digibug.ugr.es/handle/10481/35199>
- Rowland, T., Huckstep, P., & Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281. <https://doi.org/10.1007/s10857-005-0853-5>
- Ryu, S. (2020). The role of mixed methods in conducting design-based research. *Educational psychologist*, 55(4), 232-243. <https://doi.org/10.1080/00461520.2020.1794871>
- Sánchez, N., Sosa, L., & Contreras, L. (2024). Conocimiento especializado del profesor de matemáticas evidenciado en la selección y uso de ejemplos en la enseñanza de la ecuación cuadrática. *Bolema*, 38, 1-34. <http://dx.doi.org/10.1590/1980-4415v38a220140>
- Santa, Z. M., & Jaramillo, C. M. (2014). Entrevista socrática para la comprensión del concepto de elipse como lugar geométrico. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 41, 45-60. Fundación Universitaria Católica del Norte. <https://revistavirtual.ucn.edu.co/index.php/RevistaUCN/index>
- Segal, R., Oxman, V., & Stupel, M. (2021). Using Dynamic Geometry Software to Enhance Specialized Content Knowledge: Pre-Service Mathematics Teachers' Perceptions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 16(3). <https://doi.org/10.29333/iejme/11065>.
- Smith, C. R., Julie, C., & Gierdien, F. (2020). The integration of semiotic resources and modalities in the teaching of geometry in a Grade 9 class in a South African high school: The four cases of congruency. *South African Journal of Education*, 40(2), 1-12. <https://doi.org/10.15700/saje.v40n2a1682>

- Scheiner, T. (2015). Lessons we have (not) learned from past and current conceptualizations of mathematics teachers' knowledge. En K. Krainer & N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 3248-3253). European Society for Research in Mathematics Education. <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-01289875>
- Schleicher, A. (2019). *PISA 2018: Insights and Interpretations*. OECD Publishing. <https://www.oecd.org/pisa/PISA%202018%20Insights%20and%20Interpretations%20FINALE%20PDF.pdf>
- Schoenfeld, A. H., & Kilpatrick, J. (2008). Toward a theory of proficiency in teaching mathematics. In T. Wood, & D. Tirosh, (ed.), *International handbook of mathematics teacher education* (pp. 321-354). Sense Publishers.
- Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4-14. <https://doi.org/10.3102/0013189X015002004>
- Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22. <https://doi.org/10.17763/haer.57.1.j463w79r56455411>
- Sierpinska, A. (2000). On some aspects of students thinking in linear algebra. En J-L. Dorier (Ed.), *On the Teaching of Linear Algebra* (pp. 209-246). Dordrecht/Boston/London: Kluwer Academic Publishers.
- Skemp, R. R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching*, 77, 20-26.
- Sosa, L., & Carrillo, L. (2010). Caracterización del conocimiento matemático para la enseñanza (MKT) de matrices en bachillerato. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo & T.A. Sierra (ed.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 569-580). Lleida, España.

- Stupel, M., & Ben-Chaim, D. (2017). Using multiple solutions to mathematical problems to develop pedagogical and mathematical thinking: A case study in a teacher education program. *Investigations in Mathematics Learning*, 9(2), 86–108.
<https://doi.org/10.1080/19477503.2017.1283179>
- Sunzuma, G., & Maharaj, A. (2019). In-service teachers' geometry content knowledge: Implications for how geometry is taught in teacher training institutions. *International Electronic Journal of Mathematics Education*, 14(3), 633-646.
<https://doi.org/10.29333/iejme/5776>
- Sunzuma, G., Chando, C., Gwizangwe, I., Zezekwa, N., & Zinyeka, G. (2020). In-Service Zimbabwean Teachers' Views on the Utility Value of Diagrams in the Teaching and Learning of Geometry. *LUMAT: International Journal on Math, Science and Technology Education*, 8(1), 1-18. <https://doi.org/10.31129/LUMAT.8.1.1316>
- Tefera, A., Atnafu, M., & Michael, K. (2021). The Relevance of Current Ethiopian Primary School Teacher Education Program for Pre-Service Mathematics Teacher's Knowledge and Teacher Educator's Awareness about Mathematics Knowledge for Teaching. *EURASIA Journal of Mathematics, Science and Technology Education*, 17(5), 1-17.
<https://doi.org/10.29333/ejmste/10858>
- Uribe Calad, C. (2004). *Las cónicas: su historia y aplicaciones* (2a ed.). Editorial Universidad de Antioquia.
- Valbuena-Duarte, S., Tamara-Gutiérrez, Y., & Berrio-Valbuena, J. D. (2021). Technological didactic intervention for the study of conical sections based on semiotic potential. *Formación Universitaria*, 14(1), 181-194. <https://doi.org/10.4067/S0718-50062021000100181>

- Vargas, J. P., Giménez, J., & Vanegas, Y. (2021). Ideas iniciales del pensamiento geométrico de futuros maestros de educación primaria. Initial ideas of geometric thinking of prospective elementary school teachers. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. 34 (2), 438-448. https://funes.uniandes.edu.co/wp-content/uploads/tainacan-items/32454/1770461/1806601406322430_Vargas2021Ideas.pdf
- Villamizar, N. L. H., Velandia, W. M., & Jaimes, S. P. (2012). Revisión teórica sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Revista virtual universidad católica del norte*, (35), 254-287. <http://revistavirtual.ucn.edu.co/>
- Yarihuamán, W. S. (2023). Análisis de la producción académica de Secciones Cónicas en la Maestría en Enseñanza de las Matemáticas de la Pontificia Universidad Católica del Perú en el período del 2014 al 2020. [Tesis de maestría, Pontificia Universidad Católica del Perú]. PUCP: <http://hdl.handle.net/20.500.12404/26077>
- Zakaryan, D., Estrella, S., Espinoza-Vásquez, G., Morales, S., Olfos, R., Flores-Medrano, E., & Carrillo J. (2018). Relaciones entre el conocimiento de la enseñanza y el conocimiento de las características del aprendizaje de las matemáticas: caso de una profesora 105 de secundaria. *Enseñanza de las ciencias*, 36(2), 105-123. <https://doi.org/10.5565/rev/ensciencias.2260>
- Zhu, J., & Liu, W. (2020). A tale of two databases: the use of Web of Science and Scopus in academic papers. *Scientometrics*, 123, 321-335. <https://doi.org/10.1007/s11192-020-03387-8>