

ARTICULANDO CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS: EL MODELO CCDM^{vii}

Articulating mathematics teachers' knowledge and competences: the DMKC model

Godino, J. D.^a, Batanero, C.^a, Font, V.^b y Giacomone, B.^a

^aUniversidad de Granada, ^bUniversidad de Barcelona

Resumen

En esta comunicación describimos un modelo teórico que articula las nociones de competencia de análisis didáctico y conocimiento didáctico-matemático del profesor de matemáticas. Nos basamos en la conexión entre las prácticas matemáticas y los objetos implicados en su realización, asumida por el enfoque ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. Las facetas que caracterizan los procesos de estudio aportan criterios para categorizar los conocimientos didácticos que el profesor necesita para la realización de prácticas matemáticas y didácticas. Adicionalmente dicho sistema teórico proporciona herramientas que permiten distinguir cinco sub-competencias, dentro de la competencia general de análisis e intervención didáctica propia del profesor de matemáticas. Por último, se refieren algunos trabajos empíricos en los cuales se está aplicando este modelo.

Palabras clave: conocimientos y competencias didáctico-matemáticas, formación de profesores, enfoque ontosemiótico

Abstract

In this paper, we describe a theoretical model that articulates mathematics teacher's didactical analysis competence and didactic-mathematical knowledge. We rely on the connection between mathematics practices and the objects involved in these practices, which is assumed by the onto-semiotic approach to mathematical knowledge and instruction. The facets that characterize the teaching and learning processes provide criteria for categorizing the didactic knowledge that the teacher needs to perform these processes. Additionally, this theoretical system provides tools that serve to distinguish five sub-competencies within the mathematics' teacher general competence of didactic analysis and intervention. Finally, we refer some empirical work in which this model is being applied.

Keywords: didactic-mathematics knowledge and competences, teachers' training, onto-semiotic approach

INTRODUCCIÓN

Dentro del programa de investigación sobre formación de profesores de matemáticas, se proponen actualmente diferentes modelos teóricos que permiten analizar, mediante sistemas de categorías, el conocimiento requerido en la enseñanza de las matemáticas. Dichos modelos, (véase, por ejemplo, los propuestos por Ball, Lubienski y Mewborn, 2002; Pino-Fan y Godino, 2015; Rowland, Huckstep y Thwaite, 2005; Schoenfeld y Kilpatrick, 2008; Silverman y Thompson, 2008) permiten analizar la actuación del profesor, describir la práctica docente, evaluar los conocimientos requeridos para una buena enseñanza de las matemáticas y, consecuentemente, elaborar planes de formación de profesores. Desde el punto de vista de la investigación, la caracterización del conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, es un tema relevante, entre otras

razones, debido a que nuestro conocimiento sobre el mismo es todavía limitado (Silverman y Thompson, 2008, p. 499). Dicho conocimiento se viene gestando a la luz de diversas orientaciones teóricas.

Es bien reconocido que un cierto nivel de competencia matemática es un pilar fundamental en una buena enseñanza de las matemáticas. Es claro que el profesor de matemática ha de conocer y ser capaz de realizar correctamente las prácticas matemáticas necesarias para resolver los problemas matemáticos que propone o podría proponer a sus alumnos, es decir, los correspondientes a un cierto nivel educativo donde imparte su docencia. Además, el profesor debe saber articular las prácticas y problemas de un cierto contenido o nivel escolar, con los correspondientes a otros bloques temáticos o niveles educativos posteriores.

Hay también un acuerdo generalizado en que el profesor debe tener un *conocimiento especializado* del propio contenido, que incluye las transformaciones que se deben aplicar al mismo en los procesos de enseñanza y aprendizaje y las interacciones del contenido matemático a enseñar con diversos factores (psicológicos, sociológicos, pedagógicos, tecnológicos, etc.) que condicionan dichos procesos. No es tan usual tomar consciencia de la dialéctica compleja que existe entre los conocimientos y competencias del profesor; esta dialéctica, a su vez, viene matizada en los diferentes sistemas teóricos elaborados para la formación profesional del profesor.

El término competencia se ha utilizado de diferentes maneras en el campo de la educación matemática, generando un gran impacto en el desarrollo curricular, la práctica de la enseñanza y la evaluación, que se basa con frecuencia en el desarrollo de competencias (Lupiáñez y Rico, 2006; Puig, 2006; Font, 2011).

Schoenfeld y Kilpatrick (2008) introducen la idea de ‘proficiencia’ (*proficiency*) en la enseñanza de las matemáticas razonando sobre cómo ciertas formas de entender la competencia, pueden establecer el escenario para una discusión sobre una teoría de ‘proficiencia’ para la enseñanza de las matemáticas: “Una teoría de la *proficiency* (en la enseñanza) dice lo que es importante – qué destrezas necesitan desarrollar las personas para llegar a ser proficientes” (Schoenfeld y Kilpatrick, 2008, p. 350). Los autores tratan de extender la noción de *proficiency* (introducida en Kilpatrick, Swafford y Findell, 2001 en la matemática escolar), que incluye: comprensión conceptual, fluidez procedimental, competencia estratégica, razonamiento adaptativo, y disposición productiva. Nosotros interpretamos el trabajo de Schoenfeld y Kilpatrick como una referencia a los conocimientos (y competencias) que deberían tener los profesores para que su enseñanza se pueda considerar de calidad (Godino, 2002, p. 18).

Desde el punto de vista del Enfoque Ontosemiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007), el profesor debe ser capaz de analizar la actividad matemática al resolver los problemas, identificando las prácticas, objetos y procesos puestos en juego, y las variables que intervienen en los enunciados, a fin de formular nuevos problemas y adaptarlos a cada circunstancia educativa. El desarrollo de dicha competencia es un desafío para los formadores de profesores, debido a la diversidad de dimensiones y componentes a tener en cuenta.

Basándonos en los desarrollos teóricos del EOS y sus diversos aportes al campo de la formación de profesores, en este trabajo se propone un modelo que trata de articular diversas categorías de conocimientos y competencias didácticas del profesor de matemáticas. Se toma como indicador de competencia “una acción eficaz realizada en un determinado contexto con una determinada finalidad” (Font, 2011, p.18).

A continuación sintetizamos los fundamentos teóricos que apoyan el trabajo, seguido por un resumen de las distintas facetas y componentes que caracterizan los procesos de enseñanza y aprendizaje, y el sistema de competencias asociadas. Todo ello permite describir el mencionado modelo, que denominamos “conocimientos y competencias didáctico – matemáticas” (CCDM). Se

finaliza con unas reflexiones sobre la utilidad que tiene el desarrollo de este tipo de herramientas y su puesta en acción en diversas investigaciones.

FUNDAMENTOS TEÓRICOS

El enfoque ontosemiótico (EOS) es un sistema teórico que trata de integrar diversas aproximaciones y modelos teóricos usados en la investigación en Educación Matemática. Se asumen presupuestos antropológicos y semióticos sobre las matemáticas, y se adoptan principios didácticos de tipo socio-constructivista e interaccionista para el estudio de los procesos de enseñanza y aprendizaje (Godino et al., 2007). A continuación se presenta una breve descripción de las principales herramientas teóricas incluidas en este enfoque, que servirán de base para establecer un modelo específico de “conocimientos y competencias didáctico- matemáticas para el profesor de matemática”, el cual denominaremos CCDM.

- *Sistema de prácticas* (operativas y discursivas): el EOS adopta como elemento central la actividad de resolución de problemas en la construcción del conocimiento matemático. La noción de sistema de prácticas (institucionales y personales) aporta la visión antropológica y pragmatista de las matemáticas e introduce el significado institucional y personal de los objetos matemáticos, distinguiendo diversos tipos de los mismos. La idea de significado institucional de referencia de un objeto o tema de estudio orienta el análisis sistemático de la literatura hacia la identificación de los diversos significados contextuales de los objetos y su articulación en un significado global u holístico. Este significado global se considera como la población de referencia (de situaciones – problemas) de la cual se seleccionarán muestras adecuadas a las circunstancias particulares de los procesos que se pretenden diseñar.
- *Configuración de objetos y procesos matemáticos, emergentes e intervinientes en las prácticas matemáticas*. La configuración ontosemiótica (de prácticas, objetos y procesos) responde a la necesidad de identificar los objetos y procesos implicados en las prácticas matemáticas que se realizan para la resolución de las situaciones - problemas cuya resolución competente se trata de desarrollar en los estudiantes. El reconocimiento explícito de tales objetos y procesos permite prever conflictos potenciales y efectivos de aprendizaje, evaluar las competencias matemáticas de los estudiantes e identificar objetos (conceptos, proposiciones, procedimientos, argumentos) que deben ser recordados e institucionalizados en los momentos oportunos de los procesos de estudio.
- *Configuración didáctica*, o sistema articulado de roles docentes y discentes, a propósito de una configuración de objetos y procesos matemáticos ligados a una situación – problema. Constituye la principal herramienta para el análisis de la instrucción matemática (Godino, Contreras y Font, 2006). Las configuraciones didácticas y su secuencia en trayectorias didácticas tienen en cuenta las facetas epistémica (conocimientos institucionales), cognitiva (conocimientos personales), afectiva, mediacional (recursos tecnológicos y temporales), interaccional y ecológica que caracterizan los procesos de estudio matemático.
- La *dimensión normativa*, o sistema de reglas, hábitos, normas que restringen y soportan las prácticas matemáticas y didácticas, que generaliza las nociones de contrato didáctico y normas socio-matemáticas. El reconocimiento del efecto de las normas y meta-normas que intervienen en las diversas facetas que caracterizan los procesos de estudio matemático es uno de los factores explicativo de los fenómenos didácticos.
- La *idoneidad didáctica*, como criterio general, relativo a las circunstancias contextuales, de adecuación y pertinencia de las acciones de los agentes educativos, de los conocimientos puestos en juego y de los recursos usados en un proceso de estudio matemático (Godino, 2013). El sistema de indicadores empíricos identificados en cada una de las facetas

constituye una guía para el análisis y reflexión sistemática que aporta criterios para la mejora progresiva de los procesos de enseñanza y aprendizaje.

En el marco del EOS las nociones de *conocimiento* y *competencia* se relacionan teniendo en cuenta las conexiones entre práctica y objeto. La práctica, como acción orientada al fin de resolver un problema o realizar una tarea, conlleva una capacidad o competencia por parte del sujeto que la realiza. Pero la realización competente de una práctica implica la intervención de objetos interconectados que regulan y emergen de la misma, los cuales constituyen el conocimiento declarativo o discursivo correspondiente. La dialéctica entre práctica y objeto, entre competencia y conocimiento, se puede mostrar mediante el *análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas puestas en juego para la resolución de un problema matemático.

MODELO DE CONOCIMIENTOS DIDÁCTICO-MATEMÁTICOS DEL PROFESOR

En trabajos previos, se ha hecho un esfuerzo por reorganizar las dimensiones, facetas y componentes que caracterizan el conocimiento necesario para la enseñanza de las matemáticas, considerando los aportes teóricos de diversos modelos y proponiendo el denominado *conocimiento didáctico-matemático* (Godino, 2009; Pino-Fan y Godino, 2015).

Como se ha indicado en la introducción, el profesor de matemáticas tiene que conocer las matemáticas escolares del nivel educativo donde imparte, pero también debe poder articular esos conocimientos con los correspondientes a algunos niveles posteriores. Estos conocimientos constituyen el “conocimiento del contenido matemático *per se*” (Scheiner, 2015), que en el modelo propuesto desde el EOS constituyen, los conocimientos común (correspondiente al nivel en que se enseña) y ampliado (relativos a niveles superiores).

De acuerdo con la literatura en el campo de la formación de profesores citada en la introducción, los conocimientos puramente matemáticos no son suficientes para que el profesor organice, implemente y evalúe los procesos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. Los factores que influyen en dichos procesos son complejos, y es necesario tener también, un conocimiento más profundo de la matemática y su enseñanza, diferente del que adquieren los estudiantes, y que llamaremos *conocimiento didáctico-matemático*.

En la Figura 1 se presenta el modelo de conocimiento didáctico-matemático, que se superpone al conocimiento matemático *per-se* (común y ampliado), e incluye las siguientes facetas y componentes:

- *Faceta epistémica*: es el conocimiento de la pluralidad de los significados institucionales de cualquier objeto matemático, dependiendo de los diferentes contextos de uso, y el reconocimiento del sistema de prácticas, objetos y procesos implicados en cada significado parcial. Sería equivalente a lo que Ball, Lubienski y Mewborn (2002) denominan conocimiento especializado del contenido matemático, aunque en nuestro caso el EOS aporta un desglose analítico de sus elementos constituyentes.
- *Faceta cognitiva*: implica el conocimiento de cómo lo estudiantes aprenden, razonan y entienden las matemáticas y como progresan en su aprendizaje.
- *Faceta afectiva*: incluye los conocimientos sobre los aspectos afectivos, emocionales, actitudinales y creencias de los estudiantes con relación a los objetos matemáticos y al proceso de estudio seguido.
- *Faceta instruccional*: conocimiento sobre la enseñanza de las matemáticas, organización de las tareas, resolución de dificultades de los estudiantes, e interacciones que se puede establecer en el aula.

- *Faceta mediacional*: conocimiento de los recursos (tecnológicos, materiales y temporales) apropiados para potenciar el aprendizaje de los estudiantes.
- *Faceta ecológica*: implica las relaciones del contenido matemático con otras disciplinas, y los factores curriculares, socio-profesionales, políticos, económicos que condicionan los procesos de instrucción matemática.

En realidad, todas estas facetas forman parte del conocimiento especializado del profesor de matemáticas (línea punteada en la Figura 1), en la medida en que tales procesos ponen en juego algún contenido matemático, sea común o ampliado. Además, todas ellas se relacionan entre sí; por ejemplo, dada una tarea matemática determinada, el profesor debe ser capaz de movilizar la diversidad de significados que se ponen en juego (faceta epistémica) y también debe poder resolver la tarea utilizando distintos procedimientos, mostrar diversas justificaciones y explicaciones, o bien variarla para adaptarla a los conocimientos de los alumnos (facetas instruccional y cognitiva).

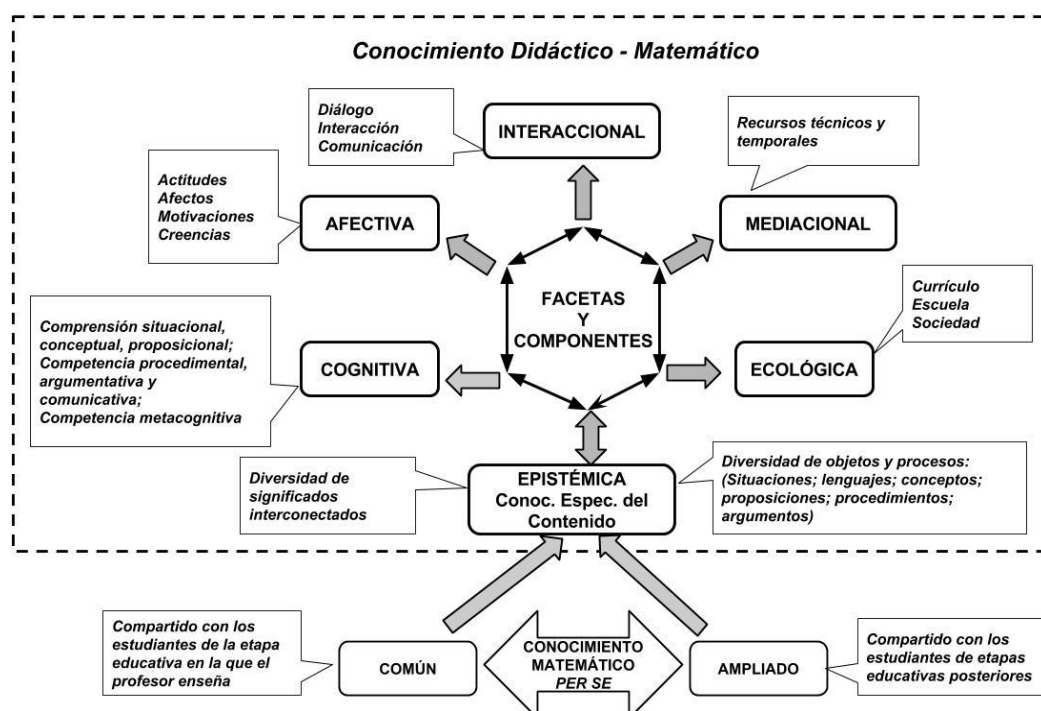


Figura 1. Facetas y componentes del conocimiento del profesor

El modelo de los conocimientos del profesor de matemáticas esquematizado en la Figura 1, puede proporcionar otro modelo sobre los conocimientos del formador de profesores de matemáticas. Si lo aplicamos al profesor, se supone que los conocimientos se refieren a un proceso de estudio matemático en que él está implicado, y por tanto, la faceta cognitiva y afectiva se refieren a estudiantes de matemáticas. En el caso del formador de profesores, se trata de un proceso de estudio de “didáctica de la matemática”, donde los estudiantes son profesores de matemáticas en formación, a los cuáles se refieren las faceta afectivas y cognitiva. En la primera de dichas facetas se tienen en cuenta las creencias y en la segunda los procesos meta-cognitivos del profesor de matemáticas, las cuales deben ser conocidas y tenidas en cuenta por el formador. La formación de los profesores debe tener también en cuenta el conocimiento matemático *per se*, ya que los conocimientos didácticos involucran, así mismo, al contenido matemático.

A continuación, articulamos la noción de competencia con la de conocimiento didáctico – matemático y proponemos un desglose operativo de la competencia general de análisis e intervención didáctica utilizando las herramientas teóricas escritas en la sección 2.

HACIA UN MODELO QUE ARTICULE CONOCIMIENTOS Y COMPETENCIAS DIDÁCTICO-MATEMÁTICAS DEL PROFESOR

Se espera que el profesor de matemáticas esté capacitado para abordar los problemas didácticos básicos que están presentes en la enseñanza. Además, en las prácticas didácticas puestas en juego en la resolución de problemas didácticos también intervienen objetos matemáticos y didácticos específicos (conocimientos) que deben ser conocidos por el profesor.

Para desarrollar estas competencias y conocimientos, en el EOS se aportan determinadas herramientas teóricas y metodológicas, dando lugar a una *competencia general de diseño e intervención didáctica*, propia del profesor de matemáticas; dicha competencia general se compone de cinco sub-competencias, que se describen a continuación.

Competencia de análisis de significados globales

El conocimiento de la noción “sistemas de prácticas matemáticas operativas y discursivas”, y sus diversos tipos (Godino et al., 2007), se corresponde con una *competencia de análisis de significados parciales de un objeto matemático y su articulación en un significado global*. El foco de atención ahora es la identificación de las situaciones – problemas que aportan los significados parciales o sentidos para los objetos, o temas matemáticos bajo estudio, y las prácticas operativas y discursivas que se deben poner en juego en su resolución. Esta competencia se requiere cuando el profesor trata de dar respuesta a las cuestiones:

- ¿Cuáles son los significados del objeto matemático (por ejemplo, cuáles son los diferentes significados de la probabilidad)? ¿Cómo se articulan entre sí?

Esta competencia será necesaria en la fase preliminar del proceso de diseño instruccional, donde el objetivo es construir un modelo de referencia que delimite, para el contenido abordado, los tipos de problemas y las prácticas operativas y discursivas requeridas para su resolución (p.e., qué significados de la probabilidad se considerarán). Los profesores deberán ser formados en el uso competente de esta herramienta para que este artefacto pase a ser un instrumento de su equipamiento profesional como docentes idóneos, implicando además la asunción de los presupuestos antropológicos subyacentes hacia las matemáticas.

Competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas

En la resolución de los problemas o tareas matemáticas fijados en la primera fase del diseño, intervienen diferentes tipos objetos y procesos que hacen posible la realización de las prácticas correspondientes, los cuales debería conocer el profesor o tenerlos disponibles en su espacio de trabajo. Además, en las prácticas que se realizan en la resolución de problema emergen nuevos objetos que deben ser reconocidos de manera explícita por el estudiante para progresar en la construcción del conocimiento.

El profesor de matemáticas debe conocer y comprender la idea de configuración de objetos y procesos y usarla de manera competente en los procesos de diseño didáctico. Además, debe tener competencia para identificar dichos objetos y procesos intervinientes en las prácticas matemáticas; esta competencia le permitirá comprender la progresión de los aprendizajes, gestionar los necesarios procesos de institucionalización y evaluar las competencias matemáticas de los alumnos. Debe ser capaz de responder a las cuestiones:

- ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos matemáticos implicados en la resolución que son característicos de los diversos significados de los contenidos pretendidos? (configuraciones epistémicas).
- ¿Cuáles son las configuraciones de objetos y procesos puestas en juego por los alumnos en la resolución de los citados problemas? (configuraciones cognitivas).

Se trata de la *competencia de análisis ontosemiótico* de las prácticas matemáticas implicadas en la solución de las tareas instruccionales.

Competencia de análisis y gestión de configuraciones didácticas

El profesor de matemáticas debe conocer y comprender la noción de configuración didáctica (Godino et al., 2006), introducido como una herramienta para el análisis de las interacciones personales y materiales en los procesos de estudio matemático. Es decir, debe conocer los diversos tipos de configuraciones didácticas que se pueden implementar y sus efectos sobre el aprendizaje de los estudiantes. Además, ha de tener competencia para su uso pertinente en la implementación de los diseños instruccionales, la cual se puede describir como *competencia de gestión de configuraciones didácticas*. Debe poder responder al problema docente de cómo enseñar un contenido específico, que en el marco del EOS se concreta del siguiente modo:

- ¿Qué tipos de interacciones entre personas y recursos se implementan en los procesos instruccionales y cuáles son sus consecuencias sobre el aprendizaje?
- ¿Cómo gestionar las interacciones para optimizar el aprendizaje?

Gestionar la secuencia de momentos de exploración, comunicación, validación, institucionalización, sin adoptar posiciones transmisivas o constructivistas ingenuas, es una competencia clave para optimizar los aprendizajes (Godino, Batanero, Contreras y Cañadas, 2015).

Competencia de análisis normativo

Las distintas fases del diseño didáctico están apoyadas y son dependientes de una trama compleja de normas de distinto origen y naturaleza (Godino, Font, Wilhelmi y Castro, 2009) y meta-normas (D'Amore, Font y Godino, 2007), cuyo reconocimiento explícito es necesario para poder comprender el desarrollo de los procesos de estudio matemático y encauzarlos hacia niveles óptimos de idoneidad. Por ejemplo, al estudiar las fracciones aparecen normas sobre su escritura o su forma de representación gráfica. También hay normas no matemáticas, como el tiempo dedicado al tema de las fracciones, libro que tiene el alumno o fechas en que se realiza la evaluación.

El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar la dimensión normativa y usarla de manera competente, siendo necesario, por tanto, diseñar acciones formativas para un uso instrumental de la misma. Se trata ahora de desarrollar la *competencia de análisis normativo* de los procesos de estudio matemático para responder a las cuestiones:

- ¿Qué normas condicionan el desarrollo de los procesos instruccionales?
- ¿Quién, cómo y cuándo se establecen las normas?
- ¿Cuáles y cómo se pueden cambiar para optimizar el aprendizaje matemático?

Competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica

Las cuestiones profesionales mencionadas anteriormente implican una mirada a nivel microscópico de la práctica docente, esto es, implican realizar análisis pormenorizados de actividades de resolución de problemas o de actividades de enseñanza y aprendizaje puntuales. En el marco del EOS se ha introducido la noción de idoneidad didáctica que orienta el análisis a nivel macroscópico de los procesos de estudio matemático. La idoneidad didáctica de un proceso de instrucción se define como el grado en que dicho proceso (o una parte del mismo) reúne ciertas características que permiten calificarlo como *idóneo* (óptimo o adecuado) para conseguir la adaptación entre los significados personales logrados por los estudiantes (*aprendizaje*) y los significados institucionales pretendidos o implementados (*enseñanza*), teniendo en cuenta las circunstancias y recursos disponibles (*entorno*).

Fijado un tema específico en un contexto educativo determinado, por ejemplo, el estudio de las ecuaciones de segundo grado en educación secundaria, la noción de idoneidad didáctica (Godino, 2013) lleva a plantear las cuestiones,

- ¿Cuál es el grado de idoneidad didáctica del proceso de enseñanza – aprendizaje implementado sobre las ecuaciones de segundo grado?
- ¿Qué cambios se deberían introducir en el diseño e implementación del proceso de estudio para incrementar su idoneidad didáctica en un próximo ciclo de experimentación?

Para poder emitir un juicio fundamentado sobre la idoneidad didáctica de un proceso de estudio matemático es imprescindible que se conozcan los resultados asumidos en la investigación didáctica del tema correspondiente. Sería necesario proporcionar a los profesores revisiones sistemáticas de los resultados de las investigaciones e innovaciones realizadas en educación matemática sobre los aspectos epistémicos, ecológicos, cognitivos, afectivos, interaccionales y mediacionales. Esto lleva a plantear una cuestión previa:

- ¿Cuáles son los conocimientos didáctico–matemáticos resultados de las investigaciones e innovaciones previas realizadas sobre la enseñanza - aprendizaje de las ecuaciones de segundo grado?

La noción de idoneidad didáctica se ha introducido como una herramienta de apoyo para la reflexión global sobre la práctica didáctica, su valoración y mejora progresiva. El profesor de matemáticas debe conocer, comprender y valorar esta herramienta y adquirir competencia para su uso pertinente. Se trata de la *competencia de análisis de la idoneidad didáctica* de los procesos de estudio matemáticos.

Competencia general de análisis e intervención didáctica y conocimientos didácticos

Las competencias descritas anteriormente se pueden considerar como sub-competencias de una más amplia, propia del profesor de matemáticas, que es la de análisis e intervención didáctica, como se representa en la Figura 2.

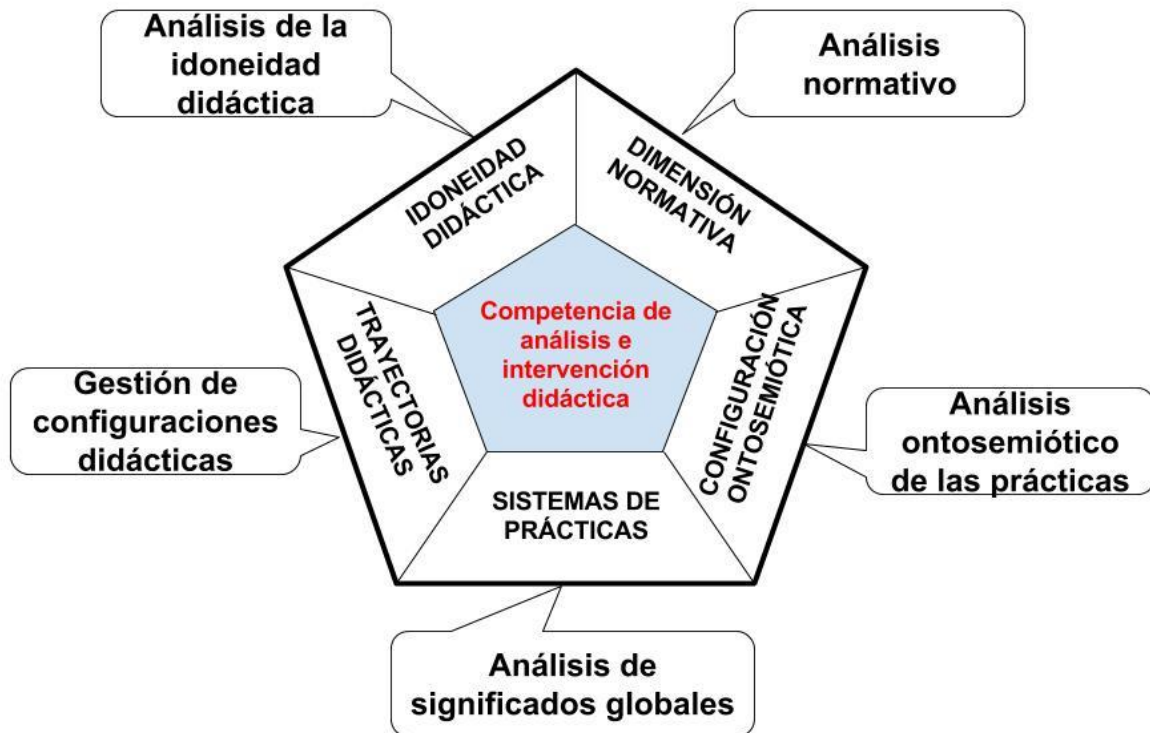


Figura 2. Componentes de la competencia de análisis e intervención didáctica

La articulación de las competencias y conocimientos didácticos se puede hacer de manera natural en el marco del EOS. En efecto, las prácticas matemáticas y didácticas son entendidas como acciones del sujeto orientadas hacia el fin de resolver un problema o realizar una tarea (no son meras conductas o comportamientos). Estas prácticas pueden ser de tipo discursivo - declarativo, indicando la posesión de conocimientos, o de tipo operatorio – procedimental, indicando la posesión de una capacidad o competencia. Ambos tipos de prácticas están imbricados, de manera que la realización eficiente de prácticas operatorias conlleva la puesta en acción de conocimientos declarativos, los cuales se pueden referir a la descripción de los instrumentos usados o a resultados previamente obtenidos que deben ser activados. A su vez la comprensión de los conocimientos declarativos requiere que el sujeto esté enfrentado a las situaciones que proporcionan la razón de ser de tales conocimientos e *implicado* (*disposición* para la acción) en su resolución eficiente.

REFLEXIONES FINALES

En este trabajo, hemos ampliado el modelo de “conocimientos didáctico – matemáticos” descrito en Godino (2009) y Pino-Fan y Godino (2015) incluyendo la noción de competencia didáctica del profesor de matemáticas, mostrando la relación estrecha y cooperativa entre las nociones de conocimiento y competencia. Las facetas, componentes y herramientas teóricas del EOS proporcionan criterios para categorizar tanto los conocimientos como las competencias, así como orientaciones para el diseño de acciones formativas, tanto para la evaluación como para el desarrollo de las mismas.

Aunque el planteamiento que hemos hecho en el artículo es básicamente teórico, destacamos que se vienen realizando numerosas investigaciones experimentales sobre los diversos componentes de este modelo CCDM. Por ejemplo, el trabajo reciente de Seckel y Font (2015) se centra en desarrollar la competencia de análisis y valoración de la idoneidad didáctica en la formación inicial de profesores de matemáticas; en el trabajo de Godino, Giacomone, Wilhelmi, Blanco y Contreras (2015) se diseñan e implementan acciones formativas para desarrollar la competencia de análisis ontosemiótico de prácticas matemáticas de futuros profesores de matemática de educación secundaria. Asimismo, se vienen aplicando numerosos talleres y seminarios como parte de cursos de máster de formación, como así también diversas publicaciones en actas de congresos. Para un mayor conocimiento sobre el tipo de implementaciones que se están realizando, se pueden consultar los trabajos en la web, *enfoqueontosemiótico.ugr.es.*, en el apartado de “formación de profesores”.

En consecuencia, el modelo CCDM abre un programa de investigación y desarrollo focalizado en el diseño, experimentación y evaluación de intervenciones formativas que promuevan el desarrollo profesional del profesor de matemáticas, teniendo en cuenta las distintas categorías de conocimientos y competencias didácticas descritas en este trabajo.

Referencias

- Ball, D., Lubienski, S. y Mewborn, D. (2002). Research on teaching mathematics: The unsolved problem of teachers' mathematical knowledge. En V. Richardson (Ed.), *Handbook of Research on Teaching* (4ª ed., pp. 433-456). Washington, DC: American Educational Research Association.
- D'Amore, B., Font, V. y Godino, J. D. (2007). La dimensión metadidáctica en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Paradigma*, 28(2), 49-77.
- Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión*, 26, 9-25.
- Godino, J. D. (2002). Perspectiva ontosemiótica de la competencia y comprensión matemática. *La matemática e la sua didattica*, 4, 434-450.
- Godino J. D. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *UNIÓN: Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.

- Godino J. D. (2013). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. *Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática*, 11, 111-132.
- Godino, J. D., Batanero, C., Cañadas, G. R. y Contreras, J. M. (2015, febrero). Linking inquiry and transmission in teaching and learning mathematics. *Trabajo presentado en el Noveno Congreso de Investigación Europea en Educación Matemática (CERME 9)*, (pp. 77-86). Praga, República Checa.
- Godino, J. D. Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39(1-2), 127-135.
- Godino, J. D., Contreras, A. y Font, V. (2006). Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. *Recherches en Didactiques des Mathematiques*, 26(1), 39-88.
- Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Castro, C. (2009). Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. *Enseñanza de las Ciencias*, 27(1), 59-76.
- Godino, J. D., Giacomone, B., Wilhelmi, M. R., Blanco, T. F. y Contreras, A. (2015, noviembre). *Diseño formativo para desarrollar la competencia de análisis epistémico y cognitivo de profesores de matematica*. Trabajo presentado XIX Jornadas Nacionales de Educación Matemática. Villarrica, Chile. Recuperado de <http://villarrica.uc.cl/files/matematica/RI01RI19/RI%2001.pdf>
- Kilpatrick, J., Swafford, J. y Findell, B. (Eds.) (2001). *Adding it up: Helping children learn mathematics*. Washington, DC: National Academy Press.
- Lupiañez, J. L. y Rico, L. (2006). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencia y capacidades en el aprendizaje de los escolares. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (p. 454-467). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses/ Universidad de Zaragoza.
- Pino-Fan, L. y Godino, J. D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, 36(1), 87-109.
- Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M^a González y M. Moreno (Eds.). *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses/Universidad de Zaragoza.
- Rowland, T., Huckstep, P. y Thwaites, A. (2005). Elementary teachers' mathematics subject knowledge: The knowledge quartet and the case of Naomi. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 8(3), 255-281.
- Scheiner, T. (2015). Lessons we have (not) learned from past and current conceptualizations of mathematics teachers' knowledge. En, K. Krainer y N. Vondrová (Eds.), *Proceedings of the CERME 9 - Ninth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp.3248-3253). Prague, Czech Republic.
- Schoenfeld, A. y Kilpatrick, J. (2008). Towards a theory of proficiency in teaching mathematics. En D. Tirosh y T. L. Wood (Eds.), *Tools and processes in mathematics teacher education* (pp. 321-354). Rotterdam: Sense Publishers.
- Seckel, M. J. y Font, V. (2015). Competencia de reflexión en la formación inicial de profesores de matemática en Chile. *Praxis Educativa*, 11 (19), 55-75.
- Silverman, J. y Thompson, P. (2008). Toward a framework for the development of mathematical knowledge for teaching. *Journal of mathematics teacher education*, 11(6), 499-511.

^{vii} Trabajo realizado en el marco de los proyectos de investigación EDU2012-31869, EDU2013- 41141-P y EDU2015-64646-P, Ministerio de Economía y Competitividad (MINECO).