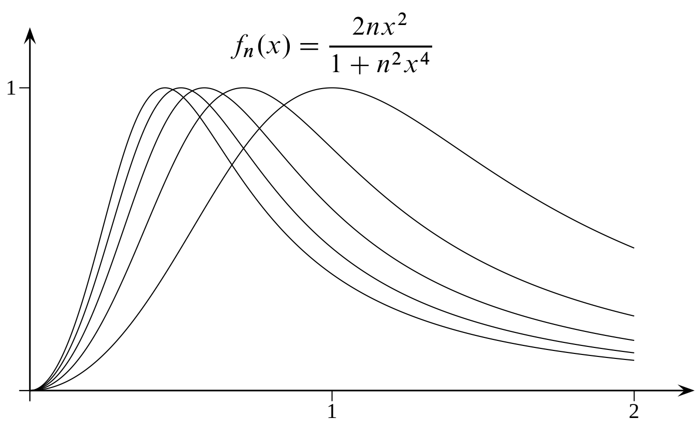
Ejercicios de Análisis Matemático
Sucesiones y series de funciones

1. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0, a]$ y $[a, +\infty[$ donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \geqslant 0$ por:

$$f_n(x) = \frac{2nx^2}{1 + n^2x^4}.$$

Solución. Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = 0$. Como $f_n'(x) = 4nx \dfrac{1 - n^2x^4}{(1 + n^2x^4)^2}$, tenemos que $f_n'(1/\sqrt{n}) = 0$, $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < 1/\sqrt{n}$ y $f_n'(x) < 0$ para $x > 1/\sqrt{n}$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0, 1/\sqrt{n}]$ y estrictamente decreciente en $[1/\sqrt{n}, +\infty[$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $\mathbb{R}_o^+$ en el punto $x_n = 1/\sqrt{n}$.



Dado un número $a > 0$ sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < a$, y por tanto:

$$\text{máx}\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} = f_n(x_n) = 1, \quad \text{máx}\{f_n(x) : x \geqslant a\} = f_n(a)$$

Como $\lim\{f_n(a)\} = 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, +\infty[$ pero, evidentemente, no converge uniformemente en $[0, a]$. ☺

2. Estudia la convergencia uniforme en $[0, 1]$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para $x \in]0, 1]$ por $f_n(x) = x^n \log(1/x)$, y $f_n(0) = 0$.

Solución. Es evidente que $\lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = 0$. Como $f_n'(x) = -\big(n \log x + 1\big)x^{n-1}$ tenemos que $f_n'(x) = 0$ si, y sólo si, $\log x = -1/n$, es decir, $x = \mathrm{e}^{-1/n}$. Además $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < \mathrm{e}^{-1/n}$ y $f_n'(x) < 0$ para $\mathrm{e}^{-1/n} < x \leqslant 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $]0, \mathrm{e}^{-1/n}]$ y estrictamente decreciente en $[\mathrm{e}^{-1/n}, 1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0, 1]$ en el punto $x_n = \mathrm{e}^{-1/n}$. Por tanto:

$$\text{máx}\{f_n(x) : x \in]0, 1]\} = f_n(\mathrm{e}^{-1/n}) = \frac{1}{\mathrm{e}}\,\frac{1}{n}$$

y, deducimos que la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0, 1]$. ☺

3. Dado $\alpha \in \mathbb{R}$, consideremos la sucesión de funciones $\{f_n\}$, donde $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la función definida para todo $x \in [0,1]$ por:

$$f_n(x) = n^\alpha x(1-x^2)^n.$$

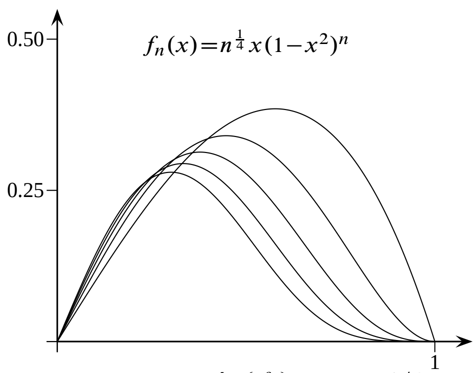
¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[0,1]$? ¿Para qué valores de α hay convergencia uniforme en $[\rho, 1]$, donde $0 < \rho < 1$?

Solución. Observa que $f_n(0) = f_n(1) = 0$ y, si $0 < x < 1$, la sucesión $\{n^\alpha(1-x^2)^n\}$ es de la forma $\{n^\alpha \lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = 0$. Por tanto, en el intervalo $[0,1]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero.

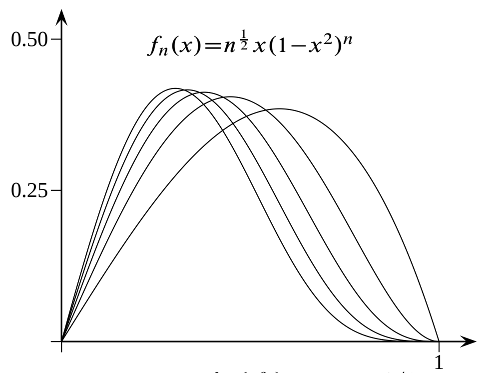
Tenemos que

$$f_n'(x) = n^\alpha(1-x^2)^{n-1}(1-(1+2n)x^2)$$

Pongamos $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{1+2n}}$. Entonces $f_n'(x_n) = 0$, $f_n'(x) > 0$ para $0 < x < x_n$ y $f_n'(x) < 0$ para $x_n < x < 1$. Deducimos que la función f_n es estrictamente creciente en $[0, x_n]$ y estrictamente decreciente en $[x_n, 1]$, por lo que f_n alcanza un máximo valor en $[0,1]$ en el punto x_n.



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/4$



La sucesión $\{f_n\}$ para $\alpha = 1/2$

Como

$$f_n(x_n) = \frac{n^\alpha}{\sqrt{1+2n}}\left(1 - \frac{1}{1+2n}\right)^n$$

se deduce que $\lim\{f_n(x_n)\} = 0$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$. Pot tanto, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[0,1]$ si, y sólo si, $\alpha < 1/2$.

Dado $0 < \rho < 1$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < \rho$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < \rho$ y por tanto $\max\{f_n(x) : \rho \leqslant x \leqslant 1\} = f_n(\rho) \to 0$ por lo que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[\rho, 1]$ para todo $\alpha \in \mathbb{R}$.

4. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ y la convergencia uniforme en los intervalos $[0,a]$ y $[a, \pi/2]$ donde $0 < a < \pi/2$.

Solución. Es claro que $f_n(0) = f_n(\pi/2) = 0$ y para $0 < x < \pi/2$ la sucesión $\{n(\cos x)^n\}$ es de la forma $\{n\lambda^n\}$ con $0 < \lambda < 1$ por lo que $\lim\limits_{n\to\infty} \{f_n(x)\} = 0$. Por tanto, en el intervalo $[0, \pi/2]$ la sucesión $\{f_n\}$ converge puntualmente a cero. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in [0, \pi/2]$.

Intentemos calcular el máximo absoluto de $f_n(x)$ en $[0, \pi/2]$. Tenemos que:

$$f_n'(x) = n(\cos x)^{n-1}(\cos^2(x) - n \operatorname{sen}^2(x)).$$

Sea $x_n \in]0, \pi/2[$ tal que $\cos^2(x_n) - n \operatorname{sen}^2(x_n) = 0$. Como f_n es positiva y se anula en los extremos del intervalo, es evidente que f_n alcanza su mayor valor en $[0, \pi/2]$ en el punto x_n. Observa que $x_n = \sqrt{\operatorname{arc\,tg}(1/n)} \to 0$.

Tenemos que:

$$f_n(x_n) = n(\cos(x_n))^n \operatorname{sen}(x_n).$$

Estudiar la convergencia de esta sucesión no es del todo inmediato. Pongamos $f_n(x_n) = y_n z_n$ donde $y_n = n \operatorname{sen}(x_n)$, $z_n = (\cos(x_n))^n$. Entonces:

$$y_n = n x_n \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} = \sqrt{n}\sqrt{n \operatorname{arc\,tg}(1/n)} \frac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n},$$

y como $\dfrac{\operatorname{sen}(x_n)}{x_n} \to 1$ y $n \operatorname{arc\,tg}(1/n) \to 1$, se sigue que $y_n \to +\infty$ (de hecho, se tiene que y_n es asintóticamente equivalente a $\sqrt{n}$, esto es, $y_n \sim \sqrt{n}$).

Por otra parte, tenemos que:

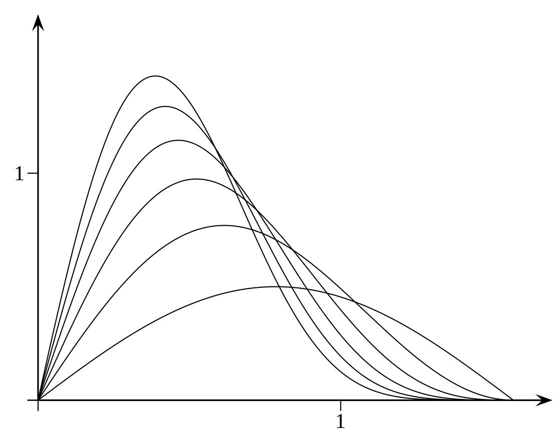
$$\log(z_n) = n \log(\cos x_n) \sim n(\cos(x_n) - 1) \sim n\frac{-1}{2}x_n^2 = \frac{-1}{2} n \operatorname{arc\,tg}(1/n) \to \frac{-1}{2}.$$

Por tanto $z_n \to \mathrm{e}^{-1/2}$. Deducimos así que $f_n(x_n) = y_n z_n \to +\infty$.

Dado un número $0 < a < \pi/2$, sea n_0 tal que $x_{n_0} < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ tenemos que $x_n < a$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es:

$$\text{máx}\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} = f_n(x_n) \quad \text{máx}\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant \pi/2\} = f_n(a).$$

Como $\{f_n(x_n)\}$ no converge a 0 se sigue que $\{f_n\}$ no converge uniformemente en $[0, a]$. Como $\{f_n(a)\} \to 0$ se sigue que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[a, \pi/2]$.



La sucesión $f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x$

Hagamos este mismo ejercicio sin calcular el valor máximo de f_n, acotando de forma conveniente.

Lo primero que nos damos cuenta es de que es muy fácil probar que hay convergencia uniforme en $[a, \pi/2]$, pues como la función coseno es decreciente en $[0, \pi/2]$ y $\operatorname{sen} x \leqslant 1$, se tiene que:

$$0 \leqslant f_n(x) = n(\cos x)^n \operatorname{sen} x \leqslant n(\cos a)^n$$

para todo $x \in [a, \pi/2]$. Puesto que la sucesión $\{n(\cos a)^n\} \to 0$ (es de la forma $n\lambda^n$ con $0 < \lambda < 1$) concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, \pi/2]$.

La situación es distinta en el intervalo $[0, a]$. Podemos sospechar que no hay convergencia uniforme en dicho intervalo. Para ello, tomemos $u_n = 1/n$. Tenemos que:

$$f_n(1/n) = n \operatorname{sen}(1/n)(\cos(1/n))^n,$$

y como $\{n \operatorname{sen}(1/n)\} \to 1$ y

$$\text{lím}\,\{(\cos(1/n))^n\} = \exp\big(\text{lím}\,\{n(\cos(1/n) - 1)\}\big) = \exp(0) = 1,$$

obtenemos que $\{f_n(1/n)\} \to 1$. Como, para todo $n > 1/a$ se verifica que $0 < 1/n < a$, resulta que:

$$\text{máx}\,\{f_n(x) : 0 \leqslant x \leqslant a\} \geqslant f_n(1/n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[0, a]$. ☺

5. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea $f_n :]0, \pi[\to \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x} \qquad 0 < x < \pi.$$

Estudia la convergencia puntual de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ así como la convergencia uniforme en intervalos del tipo $]0, a]$, $[a, \pi[$ y $[a, b]$ donde $0 < a < b < \pi$.

Solución. Evidentemente $\text{lím}\{f_n(x)\} = 0$. Observa también que $f_n(x) \geqslant 0$ para todo $x \in]0, \pi[$. Para estudiar la convergencia uniforme en un intervalo de la forma $]0, a]$ tomemos $x_n = 1/n$. Como

$$f_n(1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(1)}{n \operatorname{sen}(1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1)$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $]0, a]$.

Análogamente, como

$$f_n(\pi - 1/n) = \frac{\operatorname{sen}^2(n\pi - 1)}{n \operatorname{sen}(\pi - 1/n)} \to \operatorname{sen}^2(1),$$

deducimos que no hay convergencia uniforme en $[a, \pi[$.

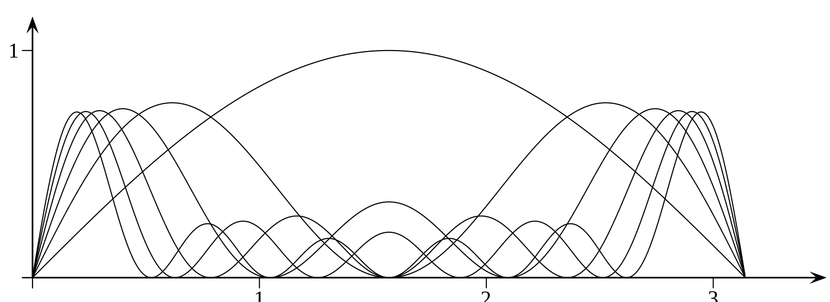
Finalmente, sea $0 < a < b < \pi$. Como $\operatorname{sen} x > 0$ para todo $x \in [a, b]$ y por el teorema de Weierstrass sabemos que tiene que haber un punto $x_0 \in [a, b]$ tal que $\operatorname{sen} x_0 \leqslant \operatorname{sen} x$ para todo $x \in [a, b]$, deducimos que:

$$0 \leqslant f_n(x) = \frac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x} \leqslant \frac{1}{n \operatorname{sen}(x_0)},$$

y por tanto:

$$\text{máx}\,\{f_n(x) : a \leqslant x \leqslant b\} \leqslant \frac{1}{n \operatorname{sen}(x_0)}.$$

Ya que, evidentemente, $\{1/n \operatorname{sen}(x_0)\} \to 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[a, b]$.



La sucesión $f_n(x) = \dfrac{\operatorname{sen}^2(nx)}{n \operatorname{sen} x}$

6. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ donde $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por:

$$f_n(x) = \sqrt[n]{1 + x^{2n}} \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Solución. Para calcular la función límite puntual hay que distinguir dos casos:

• Si $|x| < 1$, entonces $1 \leqslant \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leqslant 1 + x^{2n}$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\} = 1$.

• Si $|x| \geqslant 1$, entonces $x^2 \leqslant \sqrt[n]{1+x^{2n}} \leqslant 2^{1/n}x^2$ y por tanto $\lim\{f_n(x_n)\} = x^2$.

La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \begin{cases} 1, & \text{si } |x| < 1 \\ x^2, & \text{si } |x| \geqslant 1 \end{cases}$$

Tenemos que:

• Si $|x| < 1$ es:

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - 1 \leqslant 2^{1/n} - 1.$$

• Si $|x| \geqslant 1$ es:

$$0 \leqslant f_n(x) - f(x) = \sqrt[n]{1+x^{2n}} - x^2 = x^2\left(\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1\right). \tag{1}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $h(t) = \sqrt[n]{1+t}$ en el intervalo $[0,s]$ obtenemos que $\dfrac{h(s)-h(0)}{s} = h'(c)$ donde c es algún punto del intervalo $]0,s[$. Como:

$$h'(c) = \frac{1}{n}(1+c)^{1/n-1} \leqslant \frac{1}{n},$$

se sigue que $h(s) - h(0) = sh'(c) \leqslant \dfrac{s}{n}$. Tomando $s = \dfrac{1}{x^{2n}}$ resulta que

$$\sqrt[n]{1 + \frac{1}{x^{2n}}} - 1 = h(1/x^{2n}) - h(0) \leqslant \frac{1}{nx^{2n}} \leqslant \frac{1}{nx^2}$$

Deducimos ahora de (1) que $0 \leqslant f_n(x) - f(x) \leqslant \dfrac{1}{n}$.

Finalmente:

$$\max\{|f_n(x) - f(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \max\left\{2^{1/n} - 1, \frac{1}{n}\right\} \to 0$$

y concluimos que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Observa que, aunque la convergencia es uniforme y todas las funciones f_n son derivables en $\mathbb{R}$, la función límite, f, no es derivable en $x = 1$. ☺

7. Estudia la convergencia uniforme en intervalos de la forma $]-\infty, -a]$, $[-a, a]$ y $[a, +\infty[$ donde $a > 0$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas por $f_n(x) = n\ \mathrm{sen}(x/n)$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

Solución. Definamos la función

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \varphi(t) = \frac{\mathrm{sen}\, t}{t} \quad (t \neq 0), \quad \varphi(0) = 1$$

Con ello, tenemos que $f_n(x) = x\varphi(x/n)$ y, como $\lim\limits_{t\to 0}\varphi(t) = 1$, deducimos que la función límite puntual de la sucesión viene dada por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = x \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Dado $a > 0$, es fácil comprobar que no hay convergencia uniforme en $[a, +\infty[$, pues para todo $n \geqslant a$ se tiene que:

$$\text{máx}\{|f(x) - f_n(x)| : x \geqslant a\} \geqslant f(n) - f_n(n) = n(1 - \operatorname{sen}(1)) \to +\infty.$$

Análogamente se prueba que no hay convergencia uniforme en $]-\infty, -a]$.

Estudiemos si hay convergencia uniforme en $[-a, a]$. Para todo $x \in [-a, a]$ tenemos que:

$$|f(x) - f_n(x)| = |x - x\varphi(x/n)| = |x||1 - \varphi(x/n)| \leqslant a|1 - \varphi(x/n)|.$$

Dado $\varepsilon > 0$, sea $\delta > 0$ tal que $|1 - \varphi(t)| < \varepsilon/a$ siempre que $|t| < \delta$. Tomemos un número natural n_0 tal que $1/n_0 < \delta/a$. Entonces, para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in [-a, a]$ se tiene que $|x/n| \leqslant a/n \leqslant a/n_0 < \delta$, por lo que:

$$|f(x) - f_n(x)| \leqslant a|1 - \varphi(x/n)| < \varepsilon,$$

y por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ es $\text{máx}\{|f(x) - f_n(x)| : x \in [-a, a]\} < \varepsilon$. Hemos probado así que $\{f_n\}$ converge uniformemente en $[-a, a]$. ☺

8. Estudia la convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$, de la sucesión de funciones $\{f_n\}$ definidas para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ por:

$$f_n(x) = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{n + x}{1 + nx}\right).$$

Solución. Como $f_n(0) = \operatorname{arc\,tg} n$, y $\lim\limits_{t \to +\infty} \operatorname{arc\,tg} t = \pi/2$, la función límite viene dada por:

$$f(x) = \lim\{f_n(x)\} = \begin{cases} \operatorname{arc\,tg}(1/x), & \text{si } x > 0 \\ \pi/2, & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Observa que se trata de una función continua en $\mathbb{R}_o^+$. Estudiemos si hay convergencia uniforme en $\mathbb{R}_o^+$. Para ello es conveniente conocer el signo de la función $f_n(x) - f(x)$. Teniendo en cuenta que la función arcotangente es inyectiva, se deduce que $f_n(x) - f(x) = 0$ si, y sólo si, $(n + x)/(1 + nx) = 1/x$ lo que equivale a $x = 1$ (la otra posibilidad $x = -1$ se descarta porque suponemos que $x > 0$). En consecuencia, la función $f_n(x) - f(x)$ debe tener signo constante en cada intervalo $[0, 1[$ y en $]1, +\infty[$. Como:

$$f_n(0) - f(0) = \operatorname{arc\,tg} n - \pi/2 < 0, \quad \text{y} \quad \lim_{x \to +\infty}(f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arc\,tg}(1/n) > 0,$$

se sigue que $f_n(x) - f(x) < 0$ para $x \in [0, 1[$, y $f_n(x) - f(x) > 0$ para $x > 1$.

Estudiemos ahora la derivada de $f_n(x) - f(x)$. Un cálculo sencillo nos da:

$$f_n'(x) - f'(x) = 2\frac{1 + 2nx + x^2}{(1 + x^2)((1 + n^2)x^2 + 4nx + 1 + n^2)}.$$

Por tanto $f_n'(x) - f'(x) > 0$ para todo $x > 0$. En consecuencia $f_n - f$ es una función creciente en $\mathbb{R}_o^+$. Como

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f(x) - f_n(x), & \text{si } x \in [0, 1] \\ f_n(x) - f(x), & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Resulta que la función $|f_n - f|$ es decreciente en $[0, 1]$ y creciente en $[1, +\infty[$. Concluimos que

$$|f_n(x) - f(x)| = \begin{cases} f(x) - f_n(x) \leqslant f(0) - f_n(0) = \pi/2 - \operatorname{arc\,tg} n, & \text{si } x \in [0, 1] \\ f_n(x) - f(x) \leqslant \lim\limits_{x \to +\infty}(f_n(x) - f(x)) = \operatorname{arc\,tg}(1/n), & \text{si } x \in [1, +\infty[\end{cases}$$

Por tanto, *para todo* $x \geqslant 0$, es:

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \beta_n = \text{máx}\{\pi/2 - \operatorname{arc\,tg} n, \operatorname{arc\,tg}(1/n)\},$$

y como $\{\beta_n\} \to 0$, la sucesión $\{f_n\}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ☺

9. Para cada $n \in \mathbb{N}$ sea
$$f_n(x) = \frac{x}{n^a(1+nx^2)} \qquad (x \geqslant 0).$$
Prueba que la serie $\sum f_n$:

a) Converge puntualmente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a > 0$, y la convergencia es uniforme en semirrectas cerradas que no contienen al cero.

b) Converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$ si $a > 1/2$.

Solución. a) Como se pide estudiar la convergencia en $\mathbb{R}_o^+$, consideraremos en lo que sigue que $x \geqslant 0$. La serie $\sum_{n \geqslant 1} \dfrac{x}{n^a(1+nx^2)}$ es de términos positivos y, para $x > 0$, tenemos que:
$$\lim_{n\to\infty} n^{1+a} \frac{x}{n^a(1+nx^2)} = \frac{1}{x}.$$
Por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera), se sigue que la serie converge si, y sólo, si $1 + a > 1$, es decir $a > 0$.

Estudiemos la convergencia uniforme en una semirrecta del tipo $[\rho, +\infty[$, $(\rho > 0)$. Como:
$$f_n'(x) = \frac{1}{n^a} \frac{1 - x^2 n}{(1+nx^2)^2},$$
se deduce fácilmente que f_n es creciente en $[0, 1/\sqrt{n}]$ y decreciente en $[1/\sqrt{n}, +\infty[$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/\sqrt{n_0} < \rho$. Para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $1/\sqrt{n} < \rho$ por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, por tanto, $f_n(x) \leqslant f_n(\rho)$ para todo $x \geqslant \rho$. Puesto que, para $a > 0$, la serie $\sum f_n(\rho)$ converge, se sigue, por el criterio de Weierstrass, que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho, +\infty[$.

b) Si $a > 1/2$ entonces la serie $\sum_{n\geqslant 1} f_n(1/\sqrt{n}) = \dfrac{1}{2} \sum_{n \geqslant 1} \dfrac{1}{n^{a+1/2}}$ es convergente (es una serie de Riemann con exponente $a + 1/2 > 1$). Como para todo $x \geqslant 0$ se tiene que $f_n(x) \leqslant f_n(1/\sqrt{n})$, el criterio de Weierstrass implica que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}_o^+$. ☺

10. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie de funciones $\sum f_n$ donde, $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es la función dada por:
$$f_n(x) = \frac{x}{1+n^2x^2} \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$
Sea $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$, la función suma de la serie. Calcula $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} F(x)$ y $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} F(x)$.

Sugerencia. Para $x > 0$ se tiene que
$$\int_k^{k+1} \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt \leqslant f_k(x) = \int_k^{k+1} \frac{x}{1+k^2x^2}\,dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{x}{1+t^2x^2}\,dt$$

Solución. Puesto que, para $x \neq 0$:
$$\lim_{n\to\infty} n^2 \frac{|x|}{1+n^2x^2} = \frac{1}{|x|},$$
se sigue, por el criterio límite de comparación (o por el criterio de Prinsheim, como se prefiera) que la serie $\sum_{n\geqslant 1} \dfrac{|x|}{1+n^2x^2}$ es convergente. También converge, evidentemente, para $x = 0$.

Para estudiar la convergencia uniforme veamos qué información nos da el criterio de Weierstrass. Tenemos que:

$$f_n'(x) = \frac{1 - n^2x^2}{(1 + n^2x^2)^2}.$$

Deducimos que f_n es creciente en $[0, 1/n]$ y decreciente en $[1/n, +\infty[$. Como $f_n(-x) = -f_n(x)$, deducimos que $|f_n(x)| \leqslant f_n(1/n) = 1/2n$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Como la serie $\sum 1/2n$ no es convergente el criterio de Weierstrass *no nos dice nada* acerca de la convergencia uniforme de la serie *en todo* $\mathbb{R}$ (observa que el criterio de Weierstrass da condiciones *suficientes* pero no *necesarias* para la convergencia uniforme). Sin embargo, dicho criterio sí nos proporciona información cuando consideramos un conjunto de la forma: $A_\rho = \{x \in \mathbb{R} : |x| \geqslant \rho\}$, donde $\rho > 0$. Pues, tomando n_0 tal que $1/n_0 < \rho$, para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $1/n < \rho$, por lo que f_n es decreciente en $[\rho, +\infty[$ y, en consecuencia $|f_n(x)| \leqslant f_n(\rho)$ para todo $x \in A_\rho$. Puesto que la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, el criterio de Weierstrass nos dice que $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ.

La única duda que queda por resolver es si la serie converge uniformemente en algún intervalo de la forma $[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ (en cuyo caso sería uniformemente convergente en todo $\mathbb{R}$). Pronto saldremos de dudas.

Calculemos los límites laterales en $x = 0$ de la función suma de la serie. Usando la sugerencia del enunciado tenemos, supuesto $x > 0$, que

$$\begin{aligned}
\int_0^{n+1} \frac{x}{1 + t^2x^2}\,\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x}{1 + t^2x^2}\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{k=0}^{n} \int_k^{k+1} \frac{x}{1 + k^2x^2}\,\mathrm{d}t = \\
&= \sum_{k=0}^{n} f_k(x) = x + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{1 + k^2x^2} \leqslant \\
&\leqslant x + \sum_{k=0}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{x}{1 + t^2x^2}\,\mathrm{d}t = x + \int_0^{n} \frac{x}{1 + t^2x^2}\,\mathrm{d}t
\end{aligned}$$

deducimos que:

$$\operatorname{arc\,tg}((n + 1)x) \leqslant \sum_{k=0}^{n} f_k(x) \leqslant x + \operatorname{arc\,tg}(nx).$$

Tomando límites para $n \to \infty$ en esta desigualdad obtenemos $\pi/2 \leqslant F(x) \leqslant \pi/2 + x$. Como esta desigualdad es válida para todo $x > 0$, se sigue que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x > 0}} F(x) = \pi/2$. Como $F(-x) = -F(x)$, se deduce que $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x < 0}} F(x) = -\pi/2$. Por tanto, la función F tiene una discontinuidad de salto en $x = 0$.

Como las funciones f_n son continuas en $\mathbb{R}$ deducimos que la serie $\sum f_n$ no puede ser uniformemente convergente en ningún intervalo de la forma $[-\rho, \rho]$ con $\rho > 0$ pues, si así ocurriera, la función suma habría de ser continua en dicho intervalo y, por tanto sería continua en $x = 0$ lo que acabamos de probar que no es cierto.

Fíjate en que la función F sí es continua en $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Pues cualquier número $a \neq 0$ podemos meterlo dentro de un conveniente conjunto A_ρ, sin más que tomar $\rho < |a|$, y como la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en A_ρ, la función suma, F, es continua en A_ρ y, por la propiedad local de la continuidad, se sigue que F es continua en a. ☺

11. Estudia la convergencia puntual y uniforme de la serie $\sum f_n$ donde

$$f_n(x) = \frac{n^{n+1}}{n!} x^n \,\mathrm{e}^{-nx} \quad (x \geqslant 0).$$

Solución. Estudiemos la convergencia puntual. Para $x > 0$ la serie $\sum f_n(x)$ es de términos positivos y podemos aplicar el criterio del cociente. Tenemos que:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n + 1)^{n+2}}{(n + 1)!} \frac{n!}{n^{n+1}} x\,\mathrm{e}^{-x} = \left(\frac{n + 1}{n}\right)^{n+1} x\,\mathrm{e}^{-x} \to x\,\mathrm{e}^{1-x}.$$

Consideremos la función $\varphi(x) = x\,\mathrm{e}^{1-x}$. Se tiene que $\varphi'(x) = \mathrm{e}^{1-x}(1-x)$ y, fácilmente, se deduce que φ es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$. Luego para $x \geqslant 0$, $x \neq 1$ se tiene que $\varphi(x) < \varphi(1) = 1$. Por tanto, el criterio del cociente implica que la serie converge para todo número $x \geqslant 0$, $x \neq 1$.

En este caso el criterio del cociente también proporciona información para $x = 1$, pues aunque

$$\text{lím}\,\frac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} = \text{lím}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}\mathrm{e}^{-1} = 1,$$

como la sucesión $(1+1/n)^{n+1}$ es decreciente, se tiene que dicho límite se acerca a 1 *por valores mayores que* 1, es decir $\dfrac{f_{n+1}(1)}{f_n(1)} \geqslant 1$, lo que claramente implica que $\{f_n(1)\}$ no converge a cero y, por tanto, la serie $\sum f_n(1)$ no converge por no cumplir la condición necesaria básica de convergencia para series.

Estudiemos la convergencia uniforme. Tenemos que:

$$f_n'(x) = \frac{n^{n+1}}{n!}nx^{n-1}\,\mathrm{e}^{-nx}(1-x).$$

Y, al igual que antes, se sigue que f_n es estrictamente creciente en $[0,1]$ y estrictamente decreciente en $[1,+\infty[$. Dado $\rho > 1$, para todo $x \geqslant \rho$ es $f_n(x) \leqslant f_n(\rho)$ y como la serie $\sum f_n(\rho)$ es convergente, deducimos, por el criterio de Weierstrass, que $\sum f_n$ converge uniformemente en $[\rho,+\infty[$. Análogamente se comprueba que hay convergencia uniforme en intervalos de la forma $[0,\rho]$ donde $0 < \rho < 1$. ☺

12. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega \subset \mathbb{R}$ y, para cada $n \in \mathbb{N}$, se define una función $f_n : \Omega \to \mathbb{R}$. Se pide estudiar la convergencia puntual en Ω de la sucesión de funciones, $\{f_n\}$, así como la convergencia uniforme en los conjuntos $A \subset \Omega$ que se indican en cada caso.

a) $\Omega =]0,\frac{\pi}{2}[$, $\ f_n(x) = n^2(\operatorname{tg} x)^n(1+\cos 4x)$, $\ A = [0,a]$, $\ A = [a,\frac{\pi}{4}]$, $\ 0 < a < \frac{\pi}{4}$.

b) $\Omega = \mathbb{R}$, $\ f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, $\ A = [a,b]$, $\ a < b$.

c) $\Omega =]-1,+\infty[$, $\ f_n(x) = n\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$, $\ A =]-1,a]$, $\ A = [a,+\infty[$, $\ a > -1$.

Solución. a) Se tiene que $f_n(0) = 0$ y $f_n(\pi/4) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $0 < x < \pi/4$ entonces $\{f_n(x)\} \to 0$ porque es una sucesión de la forma $n^2\lambda^n$ donde $0 < \lambda = \operatorname{tg} x < 1$. Para $\pi/4 < x < \pi/2$ la sucesión $\{f_n(x)\} \to +\infty$. El campo de convergencia puntual es $C = [0,\pi/4]$ y la función límite puntual es la función nula. Sea $0 < a < \pi/4$. Como la tangente es creciente en $[0,\frac{\pi}{2}[$, tenemos que:

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in [0,a]\} \leqslant 2n^2(\operatorname{tg} a)^n$$

y, como $\{2n^2(\operatorname{tg} a)^n\} \to 0$, concluimos que hay convergencia uniforme en $[0,a]$. Hay que sospechar que no hay convergencia uniforme en $[a,\pi/4]$. Para ello sea $x_n = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{n}$ y pongamos $u_n = \operatorname{tg}(x_n)$, $v_n = n$. Tenemos que $\{u_n\} \to 1$ y $v_n \to +\infty$. Tenemos que:

$$v_n(u_n - 1) = n\big(\operatorname{tg}(x_n) - 1\big) = -\frac{\operatorname{tg}(x_n) - 1}{-\frac{1}{n}} = -\frac{\operatorname{tg}(x_n) - 1}{x_n - \frac{\pi}{4}} \to -2$$

Donde hemos usado que $\displaystyle\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\operatorname{tg} x - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = 2$ porque es la derivada de la tangente en $x = \pi/4$. Deducimos que $\big(\operatorname{tg}(x_n)\big)^n \to \mathrm{e}^{-2}$ lo que implica que $f_n(x_n) \to +\infty$. Como $\{x_n\} \to \pi/4$ y $0 < x - n < \pi/4$, dado a con $0 < a < \pi/4$ hay un $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < x_n < \pi/4$ para todo $n \geqslant n_0$. Por tanto, para $n \geqslant n_0$ se tiene que:

$$\sup\{|f_n(x)| : x \in [a,\pi/4]\} \geqslant f_n(x_n)$$

y concluimos que no hay convergencia uniforme en $[a, \frac{\pi}{4}]$.

b) La función límite puntual viene dada por:

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \mathrm{e}^x \,.$$

El campo de convergencia puntual es $\mathbb{R}$ y la función límite es la función exponencial. Probaremos que hay convergencia uniforme en todo intervalo de la forma $[-\alpha, \alpha]$ donde $\alpha > 0$. Dado $\alpha > 0$, sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 > \alpha$. Para todo $x \in [-\alpha, \alpha]$ y para todo $n \geqslant n_0$ se tiene que $\frac{x}{n} \in [-\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n}] \subset]-1, 1[$, luego $1 + \frac{x}{n} > 0$. En lo que sigue supondremos que $x \in [-\alpha, \alpha]$ y $n \geqslant n_0$.

$$\left|\mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| = \mathrm{e}^x \left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right| \leqslant \mathrm{e}^\alpha \left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right| .$$

Donde:

$$\varphi(t) = \frac{\log(1+t)}{t}, \quad t > -1,\ \varphi(0) = 1.$$

Se verifica que $\lim\limits_{t\to 1} \varphi(t) = 1$ por lo que φ es una función continua. Dado $\varepsilon > 0$, por la continuidad de la exponencial en 0 hay un $\delta_1 > 0$ tal que para $|u| < \delta_1$ se verifica que $|1 - \mathrm{e}^u| < \varepsilon\, \mathrm{e}^{-\alpha}$. Por la continuidad de φ en 0 hay un número $\delta_2 > 0$ tal que para $|t| < \delta_2$ se verifica que $|\varphi(t) - 1| < \delta_1/\alpha$. Tomemos $n_1 \geqslant n_0$ tal que $\frac{\alpha}{n_1} < \delta_2$. Entonces para todo $x \in [-\alpha, \alpha]$ y para todo $n \geqslant n_1$ se tiene que:

$$\frac{|x|}{n} < \delta_2 \Longrightarrow |1 - \varphi(x/n)| < \frac{\delta_1}{\alpha} \Longrightarrow \big|x\big(\varphi(x/n) - 1\big)\big| < \delta_1 \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \left|1 - \exp\big(x(\varphi(x/n) - 1)\big)\right| < \varepsilon\, \mathrm{e}^{-\alpha} \Longrightarrow \left|\mathrm{e}^x - \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n\right| < \varepsilon.$$

Lo que prueba que para todo $\alpha > 0$ hay convergencia uniforme en $[-\alpha, \alpha]$ y, por tanto hay convergencia uniforme en todo intervalo acotado.

c) Tenemos que para todo $x \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{n\to\infty} n \log\left(1 + \frac{x}{n}\right) = x.$$

En el ejercicio se supone que $x > -1$ para que todas las funciones f_n estén definidas en el intervalo $]-1, +\infty[$. Por tanto, el campo de convergencia puntual es $]-1, +\infty[$ y la función límite puntual es la función identidad $f(x) = x$. Definamos $h_n(x) = x - f_n(x)$. Tenemos que:

$$h'(x) = 1 - n\frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{x}{n}} = 1 - \frac{n}{n+x} = \frac{x}{n+x}$$

Deducimos que $h_n'(x) < 0$ para $-1 < x < 0$ y $h_n'(x) > 0$ para $x > 0$. Por tanto h_n tiene en el intervalo $]-1, +\infty[$ un mínimo absoluto en $x = 0$, por lo que $h_n(x) \geqslant h_n(0) = 0$. Observa que, para $n \geqslant 2$, $h_n(-1)$ está definido y las funciones h_n son continuas en $[-1, +\infty[$. Como h_n decrece en $[-1, 0]$ y crece en $[0, +\infty[$, para todo $n \geqslant 2$ y todo $a > -1$ se tiene que:

$$\text{máx}\,\{|h_n(x)| : -1 \leqslant x \leqslant a\} = \text{máx}\,\{h_n(-1), h_n(a)\} \to 0.$$

Por tanto hay convergencia uniforme en $]-1, a]$. Por otra parte se tiene que:

$$h_n(n) = n - n\log 2 = n(1 - \log 2) \to +\infty.$$

Lo que implica que no hay convergencia uniforme en ningún intervalo de la forma $[a, +\infty[$. ☺

13. Sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ una función continua, no idénticamente nula con $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $f(0) = 0$. Sean $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ las sucesiones de funciones definidas por $f_n(x) = f(nx)$, $g_n(x) = f(x/n)$, para todo $x \in \mathbb{R}_o^+$ y todo $n \in \mathbb{N}$. Prueba que:

a) $\{f_n\}$ y $\{g_n\}$ convergen puntualmente a cero en $\mathbb{R}_o^+$ pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}_o^+$.

b) La sucesión $\{f_n g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}_o^+$.

Solución. El apartado a) es inmediato. Haremos el apartado b). Observa que en las hipótesis hechas para f la función $|f|$ está acotada, de hecho alcanza un máximo absoluto en $\mathbb{R}_o^+$. Sea $M > 1$ tal que $|f(x)| \leqslant M$. Dado $\varepsilon > 0$, por hipótesis hay números $0 < a < b$ tales que para $0 \leqslant x \leqslant a$ y para $x \geqslant b$ se verifica que $|f(x)| \leqslant \varepsilon/M$. Sea $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $b/n_0 < a$. Para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in [a,b]$ se tiene que $x/n < a$ y por tanto $|g_n(x)| < \varepsilon/M$, lo que implica que $|f_n(x)g_n(x)| = |f_n(x)||g_n(x)| \leqslant M\frac{\varepsilon}{M} = \varepsilon$. Si $0 \leqslant x \leqslant a$ entonces también $0 \leqslant x/n \leqslant a$ y si $b \leqslant x$ también es $b \leqslant nx$, en cualquier caso, se sigue que $|f_n(x)g_n(x)| < \varepsilon$. Por tanto, para todo $n \geqslant n_0$ y para todo $x \in \mathbb{R}$ es $|f_n(x)g_n(x)| < \varepsilon$, lo que prueba que la convergencia es uniforme en $\mathbb{R}$. ☺

Observacion. El producto de dos sucesiones de funciones uniformemente convergentes puede no ser uniformemente convergente. Considera el ejmplo trivial en que las sucesiones son $f_n(x) = 1/n$ (una sucesión de funciones constantes que converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$) y $g_n(x) = x$ (una sucesión constante, formada por una sola función, que evidentemente converge uniformemente a dicha función en $\mathbb{R}$). El producto es la sucesión de funciones $f_n(x)g_n(x) = x/n$ que converge puntualmente a cero pero la convergencia no es uniforme en $\mathbb{R}$.

El ejercicio anterior proporciona un ejemplo de dos sucesiones de funciones que no convergen uniformemente y cuyo producto converge uniformemente.

Puedes probar como fácil ejercicio que si $\{f_n\}$ converge uniformemente a f en un conjunto A, y g es una función *acotada* en A entonces la sucesión $\{gf_n\}$ converge uniformemente a gf en A.

14. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 e $I = [a,b]$ un intervalo cerrado y acotado.

a) Prueba que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que cualesquiera sean $x, y \in I$ con $0 < |x-y| < \delta$ se verifica que $\left|\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} - f'(y)\right| \leqslant \varepsilon$.

b) Para cada $n \in \mathbb{N}$ definamos:

$$f_n(x) = \frac{n}{2}\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (x \in \mathbb{R}).$$

Justifica que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' en I.

Solución. El apartado a) es consecuencia fácil de la continuidad uniforme de f' en $[a,b]$ y del teorema del valor medio. Haremos el apartado b). Tenemos que:

$$f_n'(x) = 2n\big(f\big(x+\frac{1}{n}\big) - f\big(x+\frac{1}{n}\big)\big) = \frac{f\big(x+\frac{1}{n}\big) - f\big(x-\frac{1}{n}\big)}{x-\frac{1}{n}-\big(x-\frac{1}{n}\big)}.$$

Ahora basta escribir:

$$\left|f_n'(x) - f'(x)\right| \leqslant \left|\frac{f\big(x+\frac{1}{n}\big) - f\big(x-\frac{1}{n}\big)}{x+\frac{1}{n}-\big(x-\frac{1}{n}\big)} - f'\left(x-\frac{1}{n}\right)\right| + \left|f'\left(x-\frac{1}{n}\right) - f'(x)\right|$$

y usando el apartado a) y la continuidad uniforme de f' en $[a,b]$ se sigue que $\{f_n'\}$ converge uniformemente a f' en $[a,b]$.

15. Supongamos que f es una función continua en $[a,b]$ y que para todo $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se verifica que:

$$\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Prueba que $f(x)=0$ para todo $x\in[a,b]$.

Sugerencia. Usa el teorema de aproximación de Weierstrass.

Solución. La hipótesis hecha implica que para toda función polinómica $p(x)$ se verifica que $\int_a^b p(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0$. Por el teorema de aproximación de Weierstrass hay una sucesión $\{p_n\}$ de funciones polinómicas que converge uniformemente e f en $[a,b]$. Como f es continua, está acotada en $[a,b]$ por lo que la sucesión $\{p_n f\}$ converge uniformemente a f^2 en $[a,b]$. Por tanto:

$$\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \lim_{n\to\infty} p_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b p_n(x)f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

Como f^2 es continua y positiva, deducimos que para todo $x\in[a,b]$ debe ser $f^2(x)=0$, esto es, $f(x)=0$. ☺

16. Sea $\{f_n\}$ una sucesión de funciones que converge uniformemente a una función f en un intervalo $[a,+\infty[$. Supongamos que, para cada $n\in\mathbb{N}$, existe $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=a_n\in\mathbb{R}$. Prueba que la sucesión $\{a_n\}$ es convergente y que f tiene límite en $+\infty$, siendo $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\{a_n\}$.

    Sugerencia. La condición de Cauchy permite probar la convergencia de $\{a_n\}$.

    Solución. Dado $\varepsilon>0$, por la condición de Cauchy para la convergencia uniforme, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todos $n,m\geqslant n_0$ y para todo $x\geqslant a$ se tiene que $|f_n(x)-f_m(x)|\leqslant\varepsilon$. Tomando límites en esta desigualdad para $x\to+\infty$ se deduce que $|a_n-a_m|\leqslant\varepsilon$. Por tanto la sucesión $\{a_n\}$ cumple la condición de Cauchy y, por tanto, es convergente. Sea $a=\lim\{a_n\}$.

    Dado $\varepsilon>0$, hay un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todo $n\geqslant n_0$ y para todo $x\geqslant a$ es $|f(x)-f_n(x)|<\varepsilon/3$ y también $|a_n-a|<\varepsilon/3$. Pongamos:

$$|f(x)-a|\leqslant\left|f(x)-f_{n_0}(x)\right|+\left|f_{n_0}(x)-a_{n_0}\right|+\left|a_{n_0}-a\right|<\frac{2\varepsilon}{3}+\left|f_{n_0}(x)-a_{n_0}\right|.$$

    Como $\lim\limits_{x\to+\infty} f_{n_0}(x)=a_{n_0}$, existe $K>a$ tal que para todo $x\geqslant K$ se verifica que $\left|f_{n_0}(x)-a_{n_0}\right|<\varepsilon/3$. Concluimos, a la vista de la anterior desigualdad, que para todo $x\geqslant K$ se verifica que $|f(x)-a|<\varepsilon$. Hemos probado así que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=a$. ☺

17. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega\subset\mathbb{R}$ y, para cada $n\in\mathbb{N}$, se define una función $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$. Se pide estudiar, en cada caso, la convergencia puntual en Ω de la serie de funciones, $\sum f_n$, y la continuidad de la función suma $F=\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n$.

    a) $\Omega=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\mathrm{e}^{-nx}$.

    b) $\Omega=\mathbb{R}$, $f_n(x)=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{x^2+n}$.

    c) $\Omega=\mathbb{R}\setminus\{-1,1\}$, $f_n(x)=\dfrac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}$.

    Solución. a) Se trata de una serie geométrica de razón e^{-x}, por tanto, dicha serie converge si, y sólo si, $\mathrm{e}^{-x}<1$, esto es, $x>0$. El campo de convergencia puntual es $\mathbb{R}^+$. En este caso podemos calcular la función suma de la serie:

$$F(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-nx}=\frac{\mathrm{e}^{-x}}{1-\mathrm{e}^{-x}}\qquad x>0.$$

    Es una función continua en $\mathbb{R}^+$. Este resultado también puede obtenerse sin necesidad de calcular la función suma. Para ello, observamos que la serie converge uniformemente en semirrectas de la forma $[a,+\infty[$ donde $a>0$, pues para todo $x\geqslant a$ se verifica que $\mathrm{e}^{-nx}\leqslant e^{-na}$ y, como la serie $\sum \mathrm{e}^{-na}$ es convergente, el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass nos dice que la serie converge uniformemente en toda semirrecta del tipo $[a,+\infty[$ con $a>0$ y, en consecuencia, como es una serie de funciones continuas, la función suma es continua en toda semirrecta del tipo indicado. Por el carácter local de la continuidad, concluimos que la función suma es continua en $\mathbb{R}^+$.

b) Sea $a>0$. Para todo $x\in[-a,a]$ se tiene que:

$$f_n(x)=\frac{1}{n}-\frac{1}{x^2+n}=\frac{x^2}{n(x^2+n)}\leqslant\frac{x^2}{n^2}\leqslant\frac{a^2}{n^2}.$$

Como la serie $\sum\frac{1}{n^2}$ es convergente, deducimos por el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass, que la serie converge uniformemente en todo intervalo del tipo $[-a,a]$ y, por tanto, en todo intervalo acotado. Deducimos también que el campo de convergencia puntual es todo $\mathbb{R}$ y que la función suma es continua en $\mathbb{R}$.

Observa que $\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x)=\dfrac{1}{n}$. Esto nos dice que no hay convergencia uniforme en semirrectas de la forma $[a,+\infty[$, porque el resultado visto en el ejercicio resuelto 16 implica que, si hubiera convergencia uniforme, la serie $\sum\frac{1}{n}$ debería ser convergente, cosa que no es cierto.

c) Sea $0<a<1$. Para $-a\leqslant x<a$ se tiene que $0\leqslant x^{2^{n+1}}\leqslant a^{2^{n+1}}$ lo que implica que:

$$0\leqslant\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}\leqslant\frac{a^{2^n}}{1-a^{2^{n+1}}}.$$

Como la sucesión $\{a^{2^{n+1}}\}$ es decreciente, se tiene que $1-a^{2^{n+1}}\geqslant 1-a^4>0$ y deducimos que:

$$0\leqslant\frac{x^{2^n}}{1-x^{2^{n+1}}}\leqslant\frac{a^{2^n}}{1-a^4}.$$

Como $a^{2^n}\leqslant a^{2n}$ y la serie $\sum a^{2n}$ es convergente por ser una serie geométrica de razón $0<a^2<1$, se sigue, por el criterio de comparación, que la serie $\sum a^{2^n}$ es convergente. El criterio de convergencia uniforme de Weierstrass implica que la serie dada converge uniformemente en $[-a,a]$. Deducimos que la serie converge puntualmente en $]-1,1[$ y que la función suma es continua en dicho intervalo.

Análogamente, usando que $f_n(1/x)=-f_n(x)$, se prueba que la serie converge uniformemente en conjuntos de la forma $\{x\in\mathbb{R}:|x|\geqslant a\}$ donde $a>1$. Por tanto el campo de convergencia puntual es todo Ω y la función suma es continua en Ω. ☺

18. Sea $\sum f_n$ una serie de funciones que converge uniformemente en un conjunto A. Sea $F_n=\sum\limits_{k=1}^{n} f_k$.

    Prueba que para toda sucesión $\{x_n\}$ de puntos de A se verifica que la sucesión $\{F_{2n}(x_n)-F_n(x_n)\}$ converge a cero.

    Solución. Dado $\varepsilon>0$, por la condición da Cauchy para la convergencia uniforme, hay un $n_0\in\mathbb{N}$ tal que para todos $q>n\geqslant n_0$ y para todo $x\in A$ se verifica que $\left|F_q(x)-F_n(x)\right|\leqslant\varepsilon$. Haciendo en esta desigualdad $q=2n$ resulta que para todo $x\in A$ es $|F_{2n}(x)-F_n(x)|\leqslant\varepsilon$. En particular para $x=x_n\in A$ se tiene que $|F_{2n}(x_n)-F_n(x_n)|\leqslant\varepsilon$, desigualdad que es válida para todo $n\geqslant n_0$. ☺

19. En cada uno de los siguientes ejercicios se especifica un conjunto $\Omega\subset\mathbb{R}$ y, para cada $n\in\mathbb{N}$, se define una función $f_n:\Omega\to\mathbb{R}$. Se pide estudiar, haciendo uso de los criterios de Dirichlet o de Abel, la convergencia puntual y uniforme en Ω de la serie de funciones $\sum f_n$.

    a) $\Omega=\mathbb{R},\quad f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{x^2+n}$.

    b) $\Omega=[2,+\infty[,\quad f_n(x)=\dfrac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}$.

c) $\Omega=[0,\pi]$, $\quad f_n(x)=\dfrac{\operatorname{sen}(nx)}{\sqrt{n}}$.

Solución. a) Pongamos $g_n(x)=\dfrac{1}{x^2+n}$. Para cada $x\in\mathbb{R}$ la sucesión $\{f_n(x)\}$ es monótona decreciente. Además como para todo $x\in\mathbb{R}$ es $0<g_n(x)\leqslant\frac{1}{n}$, se verifica que $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $\mathbb{R}$. El criterio de convergencia uniforme de Leibniz nos dice que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Observa que no hay convergencia absoluta en ningún punto. ☺

b) Pongamos:

$$f_n(x)=\frac{(-1)^n}{nx+(-1)^n}=\frac{(-1)^n\big(nx-(-1)^n\big)}{n^2x^2-1}=(-1)^n\frac{nx}{n^2x^2-1}-\frac{1}{n^2x^2-1}.$$

Como para todo $n\in\mathbb{N}$ y todo $x\geqslant 2$ se verifica que $0<\dfrac{1}{n^2x^2-1}\leqslant\dfrac{1}{4n^2-1}$ y la serie $\sum\frac{1}{4n^2-1}$ es convergente, se sigue, por el criterio de Weierstrass que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n^2x^2-1}{}_n$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$.

Pongamos $g_n(x)=\dfrac{nx}{n^2x^2-1}$. Se comprueba enseguida que $g_{n+1}(x)\leqslant g_n(x)$. Además:

$$g_n'(x)=-\frac{n+x^2n^3}{(n^2x^2-1)^2}$$

Por lo que g_n es decreciente. En consecuencia, para todo $x\geqslant 2$ se verifica que $0<g_n(x)\leqslant g_n(2)$. Puesto que $\{g_n(2)\}\to 0$, deducimos que la sucesión $\{g_n\}$ converge uniformemente a cero en $[2,+\infty[$. El criterio de convergencia uniforme de Leibniz nos dice que la serie $\sum(-1)^n g_n$ converge uniformemente en $[2,+\infty[$.

Hemos probado así que $\sum f_n$ es la suma de dos series uniformemente convergentes en $[2,+\infty[$ y, por tanto, ella misma es uniformemente convergente en dicho intervalo. Observa que no hay convergencia absoluta en ningún punto del intervalo. ☺

c) Como la sucesión $\{1/\sqrt{n}\}$ es decreciente y converge a 0, parece apropiado aplicar el criterio de Dirichlet. Hemos visto en el ejercicio resuelto **??** que:

$$G_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\operatorname{sen}(kx)=\operatorname{sen}\left(\frac{n}{2}x\right)\frac{\operatorname{sen}\left(\dfrac{n+1}{2}x\right)}{\operatorname{sen}\left(\dfrac{x}{2}\right)}$$

Por lo que, para cada $0<x\leqslant\pi$ y para todo $n\in\mathbb{N}$ se verifica que $|G_n(x)|\leqslant\dfrac{1}{\operatorname{sen}(x/2)}$. El criterio de Dirichlet **??** nos dice que la serie $\sum f_n(x)$ es convergente. Puesto que para $x=0$ la serie es trivialmente convergente, concluimos que el campo de convergencia puntual en $[0,\pi]$. Supongamos que $0<a<\pi$. Entonces como la función seno es positiva y creciente en $[0,\pi/2]$ se verificará que $0<\operatorname{sen}(a/2)\leqslant\operatorname{sen}(x/2)$ para todo $x\in[a,\pi]$. Resulta así que:

$$|G_n(x)|\leqslant\frac{1}{\operatorname{sen}(a/2)}.$$

Desigualdad que es válida para todo $n\in\mathbb{N}$ y para todo $x\in[a,\pi]$. Por tanto, la sucesión $\{G_n\}$ está uniformemente acotada en $[a,\pi]$. El criterio de Dirichlet **??** nos dice que la serie $\sum f_n$ converge uniformemente en $[a,\pi]$.

Queda por estudiar si hay convergencia uniforme en $[0,a]$ donde $0<a<\pi$. Observamos que:

$$G_n(2/n)=\operatorname{sen}(1)\frac{\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)}{\operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)}\sim n\operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)\to+\infty.$$

Esto nos indica que no va a haber convergencia uniforme en $[0, a]$. De hecho, podemos usar el resultado del ejercicio resuelto 18 con $x_n = 2/n$. Observa que $x_n \in [0, a]$ para todo n suficientemente grande. Tenemos que:

$$G_{2n}(x_n) - G_n(x_n) \sim n\left(\operatorname{sen}(2)\operatorname{sen}\left(\frac{2n+1}{n}\right) - \operatorname{sen}(1)\operatorname{sen}\left(\frac{n+1}{n}\right)\right) \to +\infty.$$

Lo que implica, por el citado ejercicio, que no hay convergencia uniforme en $[0, a]$. ☺

20. Calcula el radio de convergencia de cada una de las series de potencias $\sum c_n x^n$, y estudia el comportamiento de la serie en los extremos del intervalo de convergencia, en los siguientes casos:

$$a)\ c_n = \frac{n-\sqrt{n}}{n^2+n+1}, \qquad b)\ c_n = (n+1)^{\log(n+1)}, \qquad c)\ c_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$d)\ c_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)}, \qquad e)\ c_n = a^{\sqrt{n}}\ (a>0), \qquad f)\ c_n = \frac{n!}{(n+1)^n}$$

Solución. a) Aplicando el criterio del cociente o de la raíz es muy fácil probar que $\dfrac{c_{n+1}}{c_n} \to 1$ o que $\sqrt[n]{c_n} \to 1$. Por tanto el radio de convergencia es 1. Como $c_n > 0$ y $c_n \sim \frac{1}{n}$ la serie $\sum c_n x^n$ no converge para $x = 1$. Se comprueba fácilmente que para $n \geqslant 5$ es $c_{n+1} < c_n$ y como, además, $\{c_n\} \to 0$. el criterio de Leibniz implica que la serie $\sum c_n x^n$ converge para $x = -1$. ☺

b) El criterio de la raíz nos da:

$$\sqrt[n]{(n+1)^{\log n}} = \sqrt[n]{\exp{(\log n)^2}} = \exp\left(\frac{(\log n)^2}{n}\right) \to \exp(0) = 1.$$

Por tanto, el radio de convergencia es 1. No hay convergencia en 1 ni tampoco en -1 porque $\{c_n\}$ no converge a 0.

c) No es inmediato en este caso aplicar el criterio del cociente ni el de la raíz. Pero sabemos que:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\mathrm{e} - (1+x)^{\frac{1}{x}}}{x} = \frac{\mathrm{e}}{2}.$$

Por tanto $\mathrm{e} - (1+x_n)^{\frac{1}{x_n}} \sim \dfrac{\mathrm{e}}{2}x_n$ siempre que $\{x_n\} \to 0$. En particular, tenemos que:

$$c_n = \mathrm{e} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sim \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}.$$

Por tanto, recordando las observaciones **??**, se sigue que la serie dada tiene el mismo radio de convergencia que la serie $\sum \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}x^n$. Pero esta serie tiene, evidentemente, radio de convergencia $R = 1$. Para $x = 1$ la serie dada no converge porque $0 < c_n \sim \frac{\mathrm{e}}{2}\frac{1}{n}$ y se aplica el criterio límite de comparación con la serie armónica. Para $x = -1$ la serie $\sum(-1)^n c_n$ es una serie alternada y $\{c_n\}$ es decreciente y convergente a 0, luego dicha serie converge en virtud del criterio de Leibniz. ☺

d) Se aplica el criterio del cociente.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = c_n = \frac{2n+3}{2n+4} \to 1.$$

El radio de convergencia es $R = 1$. Para estudiar la convergencia para $x = 1$ se aplica el criterio de Raabe y para $x = -1$ el criterio de Leibniz. ☺

f) Aplicamos el criterio del cociente.

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{(n+1)!}{(n+2)^{n+1}}\frac{(n+1)^n}{n!} = \left(\frac{n+1}{n+2}\right)^{n+1} = \left(1 - \frac{1}{n+2}\right)^{n+1} \to \frac{1}{\mathrm{e}}.$$

El radio de convergencia es $R = \mathrm{e}$. La serie no converge para $x = \pm\,\mathrm{e}$ porque la sucesión $\{c_n\,\mathrm{e}^n_n\}$ no converge a cero. De hecho, usando la fórmula de Stirling (**??**) se tiene que:

$$c_n\,\mathrm{e}^n = \frac{n!}{(n+1)^n}\,\mathrm{e}^n \sim \frac{\sqrt{2\pi n}\,n^n\,\mathrm{e}^{-n}}{(n+1)^n}\,\mathrm{e}^n = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n \to +\infty.$$

☺

21. Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)}$.

Solución. Empezamos viendo para qué valores de x la serie dada converge absolutamente. Para ello, aplicamos el criterio del cociente a la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$. Pongamos $a_n = \dfrac{|x|^{2n}}{n(2n-1)}$. Puesto que:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{|x|^{2(n+1)}}{(n+1)(2n+1)}\frac{n(2n-1)}{|x|^{2n}} = |x|^2\frac{n(2n-1)}{(n+1)(2n+1)} \to |x|^2,$$

deducimos que la serie dada converge absolutamente si $|x|^2 < 1$, es decir, si $|x| < 1$. Deducimos así que $]-1,1[$ es el intervalo de convergencia de la serie. Sea $f:]-1,1[\to\mathbb{R}$ la función suma de la serie:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{2n}}{n(2n-1)} \qquad -1 < x < 1.$$

Recuerda que las series de potencias pueden derivarse e integrarse término a término en su intervalo de convergencia. Por tanto, para $-1 < x < 1$ tenemos que:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}$$
$$f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty}2x^{2n-2} = \sum_{n=0}^{\infty}2(x^2)^n = \frac{2}{1-x^2}.$$

Puesto que $f(0) = f'(0) = 0$, deducimos que:

$$f'(x) = \int_0^x \frac{2}{1-t^2}dt = \log(1+x) - \log(1-x).$$

Por tanto:

$$f(x) = \int_0^x (\log(1+t) - \log(1-t))\,\mathrm{d}t = (1+x)\log(1+x) + (1-x)\log(1-x) \qquad (x \in]-1,1[).$$

☺

22. Calcula la función suma de las series de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n}$ y $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{n(x+3)^n}{2^n}$.

Solución. Sea

$$f(t) = \frac{1}{1-t} = \sum_{n=0}^{\infty}t^n \qquad (-1 < t < 1).$$

Tenemos que:

$$tf'(t) = \frac{t}{(1-t)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}nt^n \qquad (-1 < t < 1).$$

Haciendo en estas igualdades $t = x^3/2$, supuesto que $-1 < x^3/2 < 1$, deducimos que:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)\frac{x^{3n}}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x^3}{2}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x^3}{2}\right)^n = \frac{1}{1-x^3/2} + \frac{x^3/2}{(1-x^3/2)^2} = \frac{4}{(x^3-2)^2}$$

Análogamente, haciendo $t = (x+3)/2$, supuesto que $-1 < (x+3)/2 < 1$, obtenemos:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(x+3)^n}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} n\left(\frac{x+3}{2}\right)^n = \frac{x+3}{2(1+(x+3)/2)^2} = 2\frac{3+x}{(5+x)^2}.$$

☺

23. Dado un número natural $q \in \mathbb{N}$, prueba la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}.$$

Calcula el valor de la suma de las series correspondientes a los valores de $q = 1, 2, 3$.

Solución. Podemos hacer este ejercicio directamente, con un sencillo cálculo. Como sigue a continuación.

En la igualdad:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u^k = \frac{1-(-1)^{n+1}u^{n+1}}{1+u},$$

hagamos $u = x^q$ para obtener:

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k x^{qk} = \frac{1-(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}.$$

Integrando esta igualdad en el intervalo $[0,1]$, obtenemos

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{qk+1} + \int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\,.$$

Tomando ahora límites para $n \to \infty$, y teniendo en cuenta que:

$$\left|\int_0^1 \frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 \left|\frac{(-1)^{n+1}x^{qn+q}}{1+x^q}\right|\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x^{qn+q}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{qn+q+1},$$

obtenemos la igualdad:

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{qn+1}.$$

Finalmente

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x = \log 2 = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}$$
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}$$
$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^3}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{3\sqrt{3}} + \frac{\log 2}{3} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}$$

También podemos hacer este ejercicio teniendo en cuenta que:

$$\frac{1}{1+x^q}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(x^q)^n \qquad (|x|<1).$$

Como las series de potencias pueden integrarse término a término en su intervalo de convergencia, se sigue que para todo $0<t<1$ es

$$\int_0^t \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^t x^{qn}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{qn+1}}{qn+1}$$

Ahora, la serie $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{t^{qn+1}}{qn+1}$, es una serie de potencias cuyo intervalo de convergencia es $]-1,1[$ y que, en virtud del criterio de Leibniz para series alternadas, converge para $t=1$. En consecuencia, por el teorema de Abel, se verifica que dicha serie converge uniformemente en $[0,1]$ y por tanto

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ t<1}}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{qn+1}}{qn+1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{qn+1}.$$

Como, evidentemente, se verifica que

$$\lim_{t\to 1}\int_0^t \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x=\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}\,\mathrm{d}x$$

Deducimos que

$$\int_0^1 \frac{1}{1+x^q}dx=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{qn+1}.$$

☺

24. Expresa la función suma de las series de potencias $\sum_{n\geqslant 1}nx^{n-1}$, y $\sum_{n\geqslant 1}\frac{n}{n+1}x^n$ por medio de funciones elementales y calcula el valor de $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n(n+1)}$.

Solución. Sea $f(x)=\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$, donde $-1<x<1$. Entonces

$$f'(x)=\frac{1}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1} \qquad (-1<x<1).$$

También

$$\frac{x}{(1-x)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}nx^n \qquad (-1<x<1).$$

Integrando esta igualdad obtenemos:

$$\int_0^x \frac{t}{(1-t)^2}dx=\frac{x}{1-x}+\log(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^{n+1} \quad (-1<x<1).$$

Deducimos que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n+1}x^n=\frac{1}{1-x}+\frac{\log(1-x)}{x} \qquad (-1<x<1).$$

En particular, haciendo $x = \frac{1}{2}$ resulta que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^n(n+1)} = 2 - 2\log 2.$ ☺

25. Calcula el radio de convergencia y la suma de las series:

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n; \quad \sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3}{n!} x^n; \quad \sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{1+2+\cdots+n} x^n.$$

Solución. Cualquier serie de potencias del tipo $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n, es decir, $R(n) = \dfrac{P(n)}{Q(n)}$ donde P y Q son funciones polinómicas, tiene radio de convergencia 1. Pues:

$$\frac{R(n+1)}{R(n)} = \frac{P(n+1)Q(n)}{P(n)Q(n+1)}$$

es cociente de dos funciones polinómicas en n que tienen el mismo grado y el mismo coeficiente líder, luego su límite para $n \to \infty$ es igual a 1.

Cualquier serie de potencias del tipo $\sum \dfrac{P(n)}{n!} x^n$ donde $P(n)$ es una función polinómica, tiene radio de convergencia infinito. Pues:

$$\frac{P(n+1)}{(n+1)!} \frac{n!}{P(n)} = \frac{P(n+1)}{P(n)} \frac{1}{n+1},$$

y basta notar que, evidentemente, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} P(n+1)/P(n) = 1$.

Teniendo en cuenta que $1+2+\cdots+n = n(n+1)/2$ se sigue que las series primera y tercera tienen radio de convergencia 1 y la segunda serie tiene radio de convergencia $+\infty$.

Para calcular la suma de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n$ lo más fácil es expresar n^3+n+3 en potencias de $n+1$. Para ello basta expresar el polinomio $P(x) = x^3+x+3$ por medio de su desarrollo de Taylor centrado en $x = -1$. Como $P(-x) = -P(x)$ la derivada segunda de P en $x = 0$ es cero. Tenemos así que:

$$x^3+x+3 = P(-1) + P'(-1)(x+1) + \frac{P'''(-1)}{3!}(x+1)^3 = 1 + 4(x+1) + (x+1)^3.$$

Luego

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^3+n+3}{n+1} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{n+1} + 4 + (n+1)^2 \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} (n^2+2n+5)x^n.$$

La serie $\sum x^n/(n+1)$ se obtiene integrando la serie geométrica $\sum x^n$ y dividiendo por x, de donde se sigue que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = -\frac{\log(1-x)}{x} \qquad (-1 < x < 1).$$

La suma de la serie $\sum (n^2+2n+5)x^n$ puede calcularse también derivando dos veces la serie geométrica. Seguiremos el procedimiento general para sumar series aritmético – geométricas, es decir, series del tipo $\sum Q(n)x^n$ donde $Q(n)$ es un polinomio en n.

En nuestro caso $Q(n) = n^2+2n+5$. Observa que $Q(n+1) - Q(n) = 3+2n$, por tanto:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} Q(k)x^k(1-x) &= \sum_{k=0}^{n} \left(Q(k)x^k - Q(k)x^{k+1} \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} \big(Q(k+1) - Q(x) \big) x^{k+1} + Q(0) - Q(n)x^{n+1} = \\
&= \sum_{k=0}^{n-1} (3+2k)x^{k+1} + 5 - Q(n)x^{n+1}
\end{aligned}$$

Tomando límites para $n \to \infty$ en esta igualdad, teniendo en cuenta que para $-1 < x < 1$ es $\lim\limits_{n\to\infty} Q(n)x^{n+1} = 0$, se tiene:

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} Q(n)x^n &= \frac{5}{1-x} + \frac{1}{1-x}\sum_{n=0}^{\infty}(3+2n)x^{n+1} = \\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{1-x}\sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = \\ &= \frac{5}{1-x} + \frac{3x}{(1-x)^2} + \frac{2x^2}{(1-x)^3} = \frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3}\end{aligned}$$

Finalmente

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3+n+3}{n+1}x^n = -\frac{\log(1-x)}{x} + \frac{4x^2-7x+5}{(1-x)^3} \qquad (-1 < x < 1).$$

La suma de la tercera serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{1+2+\cdots+n}x^n = \sum_{n\geqslant 1}\frac{2}{n(n+1)}x^n$ puede obtenerse muy fácilmente integrando dos veces la serie geométrica. Seguiremos otro procedimiento que suele ser efectivo para sumar series de la forma $\sum R(n)x^n$ donde $R(n)$ es una función racional de n y que consiste en descomponer $R(n)$ en elementos simples. En nuestro caso tenemos

$$R(n) = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}.$$

Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\log(1-x)$, se obtiene fácilmente que:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+1)}x^n = -2\log(1-x) + 2\frac{\log(1-x)+x}{x}.$$

Para sumar la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{n^3}{n!}x^n$, usaremos que $\mathrm{e}^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}x^n$. La idea consiste en escribir el polinomio como $n^3 = n(n-1)(n-2) + An(n-1) + Bn + C$. Identificando coeficientes resulta $A = 3, B = 1, C = 0$. Por tanto

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}x^n &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n-1)(n-2)+3n(n-1)+n}{n!}x^n = \\ &= \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{(n-3)!}x^n + \sum_{n=2}^{\infty}\frac{3}{(n-2)!}x^n + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x}{(n-1)!}x^n = (x^3+3x^2+x)\,\mathrm{e}^x\end{aligned}$$

Este método puede usarse para sumar series del tipo $\displaystyle\sum\frac{P(n)}{n!}x^n$ donde $P(n)$ es un polinomio. ☺

26. Calcula la función suma de la serie de potencias $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{x^n}{n(2n+1)}$ y deduce el valor de las sumas de las series:

$$\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n+1)} \quad \text{y} \quad \sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}.$$

Solución. Observa que el intervalo de convergencia de la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n+1)}x^n$ es el intervalo $]-1,1[$ y que la serie converge también en los extremos del intervalo de convergencia. Sea

$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ la función suma:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(2n+1)} x^n \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Como consecuencia del teorema de Abel, la función f es continua en $[-1, 1]$.

Nota Observa que puede aplicarse el criterio de Weierstrass en el intervalo $[-1, 1]$; lo que justifica, sin necesidad de recurrir al teorema de Abel, que la serie converge uniformemente en $[-1, 1]$ y, por tanto, la función f es continua en $[-1, 1]$.

Por el teorema de derivación para funciones definidas por series de potencias, sabemos que la función f es indefinidamente derivable en el intervalo $]-1, 1[$ y

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1).$$

Por tanto:

$$x f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1).$$

La forma que tiene f' nos sugiere considerar la función

$$g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \qquad (-1 < x < 1)$$

que se calcula fácilmente, pues

$$g'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n} = \frac{1}{1-x^2}.$$

Como $g(0) = 0$, deducimos que

$$g(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\log(1+x) - \frac{1}{2}\log(1-x).$$

Ahora relacionaremos f' con g. Para $0 < x < 1$ tenemos que:

$$g(\sqrt{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\sqrt{x})^{2n+1}}{2n+1} = \sqrt{x} + \sqrt{x}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{2n+1} =$$
$$= \sqrt{x} + x\sqrt{x} f'(x).$$

De donde:

$$f'(x) = \frac{g(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} = \frac{\log(1+\sqrt{x}) - \log(1-\sqrt{x})}{2x\sqrt{x}} - \frac{1}{x} \qquad (0 < x < 1).$$

Integrando por partes se obtiene que una primitiva de f en $]0, 1[$ viene dada por:

$$h(x) = \frac{(1-\sqrt{x})\log(1-\sqrt{x}) - (1+\sqrt{x})\log(1+\sqrt{x})}{\sqrt{x}} \qquad (0 < x < 1).$$

Deducimos que:

$$f(x) = h(x) - \lim_{x \to 0} h(x) = 2 + h(x) \qquad (0 \leqslant x < 1).$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos que:

$$f(1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(2n+1)}=\lim_{x\to 1}f(x)=2-\lim_{x\to 1}h(x)=2-2\log 2.$$

Consideremos ahora que $-1<x<0$. Tenemos:

$$xf'(x)=-|x|f'(-|x|)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}|x|^n \qquad (-1<x<0).$$

Consideraremos ahora la función

$$\varphi(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1} \qquad (-1<x<1).$$

Como

$$\varphi'(x)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}=-\frac{1}{1+x^2},$$

y $\varphi(0)=0$, deducimos que:

$$\varphi(x)=-\int_0^x\frac{1}{1+t^2}\,dt=-\operatorname{arc\,tg}x.$$

Al igual que antes deducimos que:

$$f'(x)=\frac{\sqrt{-x}-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{-x})}{x\sqrt{-x}} \qquad (-1<x<0),$$

o lo que es igual:

$$-f'(-x)=\frac{\sqrt{x}-\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{x\sqrt{x}} \qquad (0<x<1).$$

Como $-f'(-x)$ es la derivada de la función $x\mapsto f(-x)$, integrando por partes se obtiene que una primitiva de la función $x\mapsto f(-x)$ en $]0,1[$ es:

$$H(x)=2\frac{\operatorname{arc\,tg}(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}+\log(1+x) \qquad (0<x<1).$$

Deducimos que

$$f(-x)=H(x)-\lim_{x\to 0}H(x)=H(x)-2 \qquad (0\leqslant x<1).$$

Como f es continua en $[-1,1]$, obtenemos

$$f(-1)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n(2n+1)}=\lim_{x\to 1}f(-x)=\lim_{x\to 1}H(x)-2=\frac{\pi}{2}+\log 2-2.$$

☺

27. Prueba que las funciones definidas por:

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen}x}{x},\ g(0)=1, \qquad f(x)=\frac{e^x-1}{x},\ f(0)=1$$
$$h(x)=\frac{\cos x-1}{x^2},\ h(0)=-1/2, \quad \varphi(x)=\frac{\log(1+x)}{x},\ \varphi(0)=1$$

son de clase C^∞ en su intervalo natural de definición.

Solución. Estrategia. Para probar que una función es de clase C^∞ en un intervalo I es *suficiente* probar que dicha función es la suma de una serie de potencias convergente en el intervalo I.

Las funciones del enunciado responden todas ellas al siguiente modelo. Supongamos que tenemos una serie de potencias $\sum c_n(x-a)^n$, con radio de convergencia no nulo. Sea I el intervalo de convergencia de la serie y sea $F : I \to \mathbb{R}$, $F(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n$ la función suma. En virtud del teorema de derivación para series de potencias, sabemos que la función F es de clase C^∞ en I. Sea ahora $q\in\mathbb{N}$ y consideremos la función $G : I \to \mathbb{R}$ dada por

$$G(x)=\frac{F(x)-\displaystyle\sum_{k=0}^{q} c_k(x-a)^k}{(x-a)^{q+1}}, \quad G(a)=c_{q+1}.$$

Es evidente que

$$G(x)=\sum_{n=0}^{\infty} c_{q+1+n}(x-a)^n \qquad x\in I.$$

Por tanto, la función G *es la suma de una serie de potencias* en el intervalo I y, por tanto, G es de clase C^∞ en I.

Teniendo en cuenta que

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \qquad (x\in\mathbb{R})$$
$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}x^{n-1} \qquad (x\in\mathbb{R})$$
$$h(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n-2} \qquad (x\in\mathbb{R})$$
$$\varphi(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}x^n \qquad (-1<x<1)$$

Se sigue que las funciones g, f, h son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y la función φ es de clase C^∞ en $]-1,1[$. Pero es evidente que φ es de clase C^∞ en $]1/2,+\infty[$, luego φ es de clase C^∞ en $]-1,+\infty[$. ☺

28. Prueba que la función $f :]-\pi,\pi[\to\mathbb{R}$ dada por:

$$f(x)=\frac{x}{\operatorname{sen} x - x}\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right), \quad f(0)=1,$$

es de clase C^∞. Calcula $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-1-\frac{1}{12}x^2}{x^4}$.

Solución. Las funciones:

$$g(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n} \qquad (x\in\mathbb{R}),$$
$$h(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}(x-1)^n \qquad (|x-1|<1)$$

son de clase C^∞ en $\mathbb{R}$ y en $]0,2[$ respectivamente. Además:

$$g(x)=\frac{\operatorname{sen} x}{x},\ g(0)=1; \qquad h(x)=\frac{\log x}{x-1},\ h(1)=1.$$

Como para todo $x \in]-\pi, \pi[$, $x \neq 0$ es $0 < g(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x} < 1$, tenemos que:

$$f(x) = \frac{\log\left(\frac{\operatorname{sen} x}{x}\right)}{\frac{\operatorname{sen} x}{x} - 1} = h(g(x)), \quad f(0) = h(g(0)) = 1.$$

Concluimos que f es de clase C^∞ en $]-\pi, \pi[$ por ser composición de funciones de clase C^∞.

Pongamos:

$$g(x) - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n} = -\frac{1}{3!}x^2 + \frac{1}{5!}x^4 + \varphi(x).$$

Deducimos que:

$$f(x) = h(g(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(g(x)-1)^n = 1 - \frac{1}{2}(g(x)-1) + \frac{1}{3}(g(x)-1)^2 + \psi(x),$$

donde:

$$\psi(x) = (g(x)-1)^3 \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}(g(x)-1)^{n-3}.$$

Observa que ψ es continua. Además, como para $x \to 0$ es $g(x) - 1 \sim \frac{-1}{3!}x^2$, se verifica que $(g(x)-1)^3 \sim \frac{-1}{(3!)^3}x^6$ y, por tanto, $\psi(x) = o(x^4)$ para $x \to 0$.

Haciendo las operaciones indicadas en la igualdad anterior, calculando solamente los términos hasta la potencia x^4, obtenemos:

$$f(x) = 1 + \frac{1}{12}x^2 - \frac{1}{2}\frac{1}{5!}x^4 + \frac{1}{3}\frac{1}{(3!)^2}x^4 + o(x^4) = 1 + \frac{1}{12}x^2 + \frac{11}{2160}x^4 + o(x^4).$$

Deducimos que:

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x) - 1 - \frac{1}{12}x^2}{x^4} = \frac{11}{2160}.$$

Puedes comprobar este resultado calculando el límite por L'Hôpital. ☺

29. Calcula el desarrollo en serie de potencias centrada en $a = 4$ de la función:

$$f(x) = \frac{2x^3 - x^2 + 2x - 7}{x^4 - x^3 - 3x^2 + x + 2}.$$

La función que nos dan parece bastante impresionante, pero no es tan fiera como parece. Es una función racional y lo que se hace para obtener su desarrollo en serie de potencias es descomponerla en fracciones simples, algo que ya sabes hacer. Si el denominador solamente tiene raíces reales es muy sencillo calcular la serie de potencias que nos piden, porque en tal caso las fracciones simples van a ser, salvo constantes, de los dos tipos siguientes:

$$a)\ \frac{1}{x-\alpha}, \qquad b)\ \frac{1}{(x-\alpha)^n}.$$

Las fracciones del tipo $a)$ pueden desarrollarse en serie de potencias centradas en el punto que queramos $a \neq \alpha$, basta escribir:

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-1}{\alpha - a - (x-a)} = \frac{-1}{\alpha - a} \frac{1}{1 - \frac{x-a}{\alpha-a}}.$$

Pero la última fracción es la suma de una serie geométrica de razón $\frac{x-a}{\alpha-a}$, por tanto, supuesto que $\left|\frac{x-a}{\alpha-a}\right| < 1$, se verifica que:

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{-1}{\alpha-a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x-a}{\alpha-a}\right)^n = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(\alpha-a)^{n+1}}(x-a)^n \qquad |x-a| < |\alpha-a|.$$

Derivando respecto a x esta igualdad obtenemos:

$$\frac{1}{(x-\alpha)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(\alpha-a)^{n+1}}(x-a)^{n-1}\qquad |x-a|<|\alpha-a|.$$

Las sucesivas derivadas nos dan el desarrollo en serie de potencias centrado en a de las fracciones del tipo $b)$.

En nuestro caso, se calcula fácilmente la descomposición en fracciones simples:

$$f(x)=\frac{1}{x-1}-\frac{2}{(x+1)^2}+\frac{1}{x+1}$$

Según acabamos de ver, las fracciones obtenidas puedes desarrollarlas en series de potencias centradas en cualquier punto que no sea una raíz del denominador. Te dejo que acabes tú el ejercicio.

Esto puede complicarse mucho cuando el denominador tiene raíces complejas, en cuyo caso solamente pueden obtenerse con facilidad algunos desarrollos centrados en puntos particulares (las partes reales de las raíces imaginarias). ☺

30. Calcula explícitamente el valor de a_n, n= 0,1,2,... sabiendo que se verifica la siguiente relación de recurrencia:

$$a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n,\quad a_0=1,\ a_1=-3.$$

Solución. Usaremos el método de la función generatriz que se basa en la consideración de la función $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$. Se supone que dicha función está definida en algún intervalo centrado en el origen. Tenemos que:

$$\begin{aligned}f(x)&=a_0+a_1x+\sum_{n=2}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+2}x^{n+2}=\\&=a_0+a_1x+\sum_{n=0}^{\infty}\big(-2a_{n+1}-a_n\big)x^{n+2}=\\&=a_0+a_1x-2x\sum_{n=0}^{\infty}a_{n+1}x^{n+1}-x^2\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\\&=a_0+a_1x-2x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^n-x^2f(x)=a_0+a_1x-2x(f(x)-a_0)-x^2f(x).\end{aligned}$$

De esta igualdad se obtiene que:

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{a_0+a_1x+2xa_0}{1+2x+x^2}=\frac{1-x}{(1+x)^2}=\frac{1}{(1+x)^2}-x\frac{1}{(1+x)^2}=\\&=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{1+x}\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\frac{1}{1+x}\right)=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)+x\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}(-x)^n\right)=\\&=-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^nnx^n=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(2n+1)x^n.\end{aligned}$$

Obtenemos así que para todo $n\geqslant 1$ es $a_n=(-1)^n(2n+1)$. Puedes comprobar ahora que efectivamente se verifica la igualdad $a_{n+2}=-2a_{n+1}-a_n$. ☺

31. Definamos $f : \mathbb{R}_o^+ \to \mathbb{R}$ por:

$$f(x) = \int_0^1 \frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\,dt\,.$$

Prueba que:

a) $f(0) = \pi/4$, y $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

b) Usando un desarrollo en serie para f, prueba que f es derivable en $\mathbb{R}^+$ y:

$$f'(x) = -2x\int_0^1 e^{-x^2(1+t^2)}\,dt\,.$$

c) Justifica que para todo $x \geqslant 0$ se verifica que:

$$f(x) + \left(\int_0^x e^{-t^2}\,dt\right)^2 = \frac{\pi}{4}.$$

d) Deduce de lo anterior que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Solución. a) Tenemos que.

$$f(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^2}\,dt = \operatorname{arc\,tg} 1 - \operatorname{arc\,tg} 0 = \frac{\pi}{4}.$$

Además:

$$\left|\frac{e^{-x^2(1+t^2)}}{1+t^2}\right| \leqslant \left|e^{-x^2(1+t^2)}\right| \leqslant e^{-x^2}\,.$$

Desigualdades válidas para todo $t \in \mathbb{R}$, en particular para $t \in [0,1]$, lo que implica que:

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \int_0^1 e^{-x^2}\,dt = e^{-x^2} \Longrightarrow \lim_{x\to+\infty} f(x) = 0.$$

b) Tenemos que $e^{-x^2(1+t^2)} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+t^2)^n}{n!}x^{2n}$. Por tanto:

$$f(x) = \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}x^{2n}\,dt\,.$$

Se trata de permutar la suma de la serie con la integral. Como la variable de la integral es $t \in [0,1]$, en lo que sigue consideramos que $x \in \mathbb{R}$ es un número fijo. Consideremos la serie de funciones $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ donde para $n = 0,1,2,\dots$ $g_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ es la función dada para todo $t \in [0,1]$ por:

$$g_n(t) = (-1)^n\frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}x^{2n}.$$

En esta expresión debes considerar que x está fijo y la variable es $t \in [0,1]$. Probaremos que la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} g_n$ converge uniformemente en $[0,1]$ lo que permitirá permutar la suma de la serie con la integral. Tenemos que para $n \geqslant 1$ es:

$$|g_n(t)| = \frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}x^{2n} \leqslant \frac{2^{n-1}}{n!}x^{2n} \leqslant \frac{2^{2n}x^{2n}}{n!} = \frac{(4x^2)^n}{n!}$$

Como también $|g_0(t)| \leqslant 1$, y la serie $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0}\frac{(4x^2)^n}{n!}$ es convergente, podemos aplicar a la serie $\sum g_n$ el criterio de convergencia uniforme de Weierstrass y concluimos que dicha serie converge uniformemente en $[0,1]$. Por tanto:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n\frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}x^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\int_0^1 (-1)^n\frac{(1+t^2)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}t\right)x^{2n}.$$

Como esta igualdad es válida para cualquier número real x hemos expresado la función f como suma de una serie de potencias convergente en todo $\mathbb{R}$. Por el teorema de derivación para series de potencias, tenemos que f es derivable y su derivada viene dada por:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 (-1)^n\frac{2n(1+t^2)^{n-1}}{n!}\,\mathrm{d}t\right)x^{2n-1} = \\
&= 2x\sum_{n=1}^{\infty}\left(\int_0^1 (-1)^n\frac{(1+t^2)^{n-1}}{(n-1)!}\,\mathrm{d}t\right)x^{2n-2} = -2x\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^1 (-1)^n\frac{(1+t^2)^n}{n!}x^{2n}\mathrm{d}t = \\
&= -2x\int_0^1\sum_{n=0}^{\infty}\left((-1)^n\frac{(x^2)^n(1+t^2)^n}{n!}\right)\mathrm{d}t = -2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+t^2)}\,\mathrm{d}t\,.
\end{aligned}$$

c) Pongamos para todo $x \geqslant 0$:

$$h(x) = f(x) + \left(\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t\right)^2.$$

Tenemos que $h(0) = f(0) = \pi/4$ y h es una función derivable en el intervalo $[0,+\infty[$. Tenemos:

$$\begin{aligned}
h'(x) &= f'(x) + 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = [t = xu] = f'(x) + 2\,\mathrm{e}^{-x^2}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2u^2}\,x\,\mathrm{d}u = \\
&= f'(x) + 2x\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2(1+u^2)}\,\mathrm{d}u = 0.
\end{aligned}$$

Luego, h es constante y, por tanto, $h(x) = h(0) = \pi/4$ para todo $x \geqslant 0$.

d) Tomando límites para $x \to +\infty$ en la igualdad:

$$\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\pi}{4} - f(x)}$$

obtenemos que $\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. ☺