

## Grado en Biotecnología – Ejercicios de Análisis Matemático

### Relación 3 - Funciones elementales

1. Estudia cuales de las siguientes igualdades son ciertas y, cuando no lo sean, proporciona un contraejemplo. Se supone que  $f, g, h$  son funciones definidas en  $\mathbb{R}$ .

a)  $f \circ (g+h) = f \circ g + f \circ h$  b)  $(g+h) \circ f = g \circ f + h \circ f$  c)  $\frac{1}{f \circ g} = \frac{1}{f} \circ g$  d)  $\frac{1}{f \circ g} = f \circ \frac{1}{g}$

2. Una función  $f$  es *par* si  $f(-x) = f(x)$  e *impar* si  $f(-x) = -f(x)$ .

- a) Estudia si la suma, el producto y la composición de funciones pares o impares es una función par o impar. Considera todos los casos posibles.  
b) Prueba que toda función puede escribirse de forma única como suma de una función par y una función impar.

3. Calcula el dominio natural de definición de la función dada por  $f(x) = \sqrt{\ln(x^2 - 5x + 7)}$ .

4. Calcula el dominio natural de definición de la función  $f(x) = \sqrt{\ln \frac{x^2 - 8x + 4}{x^2 - 3x + 2}}$ .

5. Prueba que la función  $f : [1/2, +\infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  dada por  $f(x) = x^2 - x + 1$  para todo  $x \geq 1/2$ , es estrictamente creciente. Calcula la función inversa de  $f$ .

6. Compara  $a^{\ln b}$  con  $b^{\ln a}$ .

7. Simplifica las expresiones  $a^{\ln(\ln a)/\ln a}$ ,  $\log_a(\log_a(a^{a^x}))$ .

8. Calcula  $x$  sabiendo que:

$$\frac{1}{\log_x(a)} = \frac{1}{\log_b(a)} + \frac{1}{\log_c(a)} + \frac{1}{\log_d(a)}.$$

9. Prueba las igualdades:

$$\cos a = 4 \cos^3(a/3) - 3 \cos(a/3) = 2 \cos^2(a/2) - 1.$$

Usando que  $\cos 0 = 1$ ,  $\cos \pi = -1$  y que el seno y el coseno son positivos en  $]0, \pi/2[$ , deduce el valor de  $\cos(\pi/6)$ ,  $\cos(\pi/4)$  y  $\cos(\pi/8)$ .

10. Prueba las igualdades siguientes.

$$\begin{aligned} \cos(\arctg x) &= \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}, \quad \sin(\arctg x) = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \\ \tan(\arcsen x) &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} \quad \forall x \in ]-1, 1[, \quad \arccos x + \arcsen x = \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in [-1, 1] \\ \arctg x + \arctg(1/x) &= \frac{\pi}{2} \quad \forall x \in \mathbb{R}^+ \end{aligned}$$

11. a) Dado  $x \in \mathbb{R}$ , calcula  $\arcsen(\sen x)$ .

- b) Dado  $x \in \mathbb{R}$ ,  $x \neq k\frac{\pi}{2}$  para  $k \in \mathbb{Z}$ , calcula  $\arctg(\tg x)$ .

12. Dado  $x \in \mathbb{R}$  prueba que hay un único  $t \in \mathbb{R}$  tal que  $\frac{e^t - e^{-t}}{2} = x$ .

Sugerencia. Lo que tienes que hacer es calcular  $t$ . La sustitución  $e^t = u$  te permitirá calcular  $u$ .