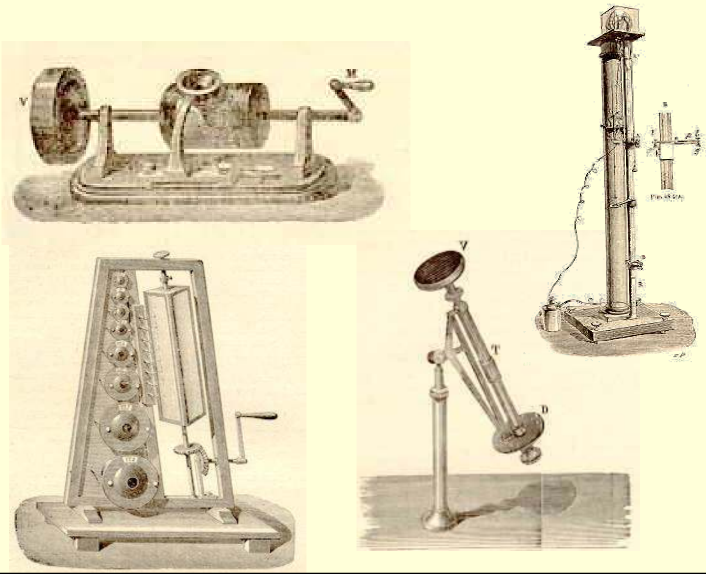
# Laboratorio de Bases Físicas del Medio Ambiente



# Teoría de errores

Todas las medidas experimentales vienen afectadas de una imprecisión inherente al proceso de medida.

Medir es , básicamente, comparar con un patrón y esta comparación se hace con un aparato (por simple que sea-una regla, por ejemplo- podemos incluirlo en la denominación generalizada de “aparato”),

la medida dependerá de la mínima cantidad que aquel sea capaz de medir.

**Error: diferencia que existe entre la medida y el valor “verdadero”**

Todas las medidas tiene un error.

La teoría de errores proporciona cotas a estos errores

# TIPOS DE ERROR

- Error sistemático: aquel que es constante a lo largo de todo el proceso de medida y, por tanto, afecta a todas las medidas de un modo definido y es el mismo para todas ellas. Estos errores tienen siempre un signo determinado y las causas probables pueden ser:
- *Errores instrumentales* (de aparatos); por ejemplo, el error de calibrado de los instrumentos.
- *Error personal*: Este es, en general, difícil de determinar y es debido a las limitaciones de carácter personal. Como, por ejemplo, los errores de paralaje, o los problemas de tipo visual.
- *Errores de método de medida*, que corresponden a una elección inadecuada del método de medida; lo que incluye tres posibilidades distintas: la inadecuación del aparato de medida, del observador o del método de medida propiamente dicho.
- Errores accidentales son aquellos que se deben a las pequeñas variaciones que aparecen entre observaciones sucesivas realizadas por el mismo observador y bajo las mismas condiciones. Las variaciones no son reproducibles de una medición a otra y se supone que sus valores están sometidos tan sólo a las leyes del azar y que sus causas son completamente incontrolables para un observador.
- Los errores accidentales poseen, en su mayoría, un valor absoluto muy pequeño y si se realiza un número suficiente de medidas se obtienen tantas desviaciones positivas como negativas. Y, aunque con los errores accidentales no se pueden hacer correcciones para obtener valores más concordantes con los reales, si pueden emplearse *métodos estadísticos*, mediante los cuales se pueden llegar a algunas conclusiones relativas al valor más probable en un conjunto de mediciones.

# EXACTITUD, PRECISIÓN Y SENSIBILIDAD

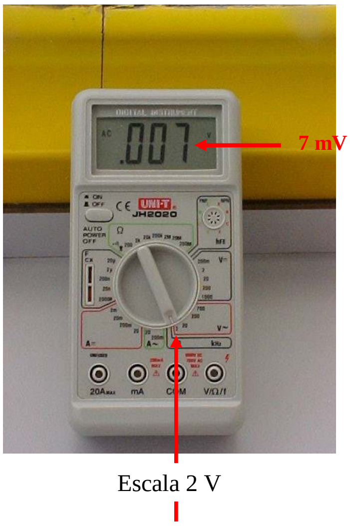
- Exactitud: grado de concordancia entre el valor “verdadero” y el experimental. Un aparato es *exacto* si las medidas realizadas con él son todas muy próximas al valor “verdadero” de la magnitud medida.
- Precisión: concordancia entre las medidas de una misma magnitud realizadas en condiciones sensiblemente iguales. Un aparato es *preciso* cuando la diferencia entre diferentes mediciones de una misma magnitud son muy pequeñas.

  La *exactitud* implica, normalmente, *precisión*, pero la afirmación inversa no es cierta, ya que pueden existir aparatos muy precisos que posean poca exactitud, debido a errores sistemáticos, como el “error de cero”, etc. En general, se puede decir que es más fácil conocer la precisión de un aparato que su exactitud (básicamente, debido a la introducción del término “verdadero”).
- Sensibilidad: valor mínimo de la magnitud que es capaz de medir.

  Que la sensibilidad de una balanza es de 5 mg significa que, para masas inferiores a ésta, la balanza no acusa ninguna desviación. Normalmente, se admite que la sensibilidad de un aparato viene indicada por *el valor de la división más pequeña de la escala de medida*. En ocasiones, de un modo erróneo, se toman como idénticos los conceptos de precisión y sensibilidad.

## ERROR DE CERO

El error más típico que afecta a la exactitud de los aparatos es el "error de cero". Causado por un defecto de ajuste del aparato, este da una lectura distinta de cero cuando lo que mide vale cero. Es fácilmente corregible reajustando el aparato o corrigiendo numéricamente las lecturas en la cantidad en que difieren el cero real y el de la escala.




# ERROR ABSOLUTO Y ERROR RELATIVO

- Si medimos una cierta magnitud física cuyo valor "verdadero" es $x_0$, obteniendo un valor de la medida $x$, llamaremos error absoluto de dicha medida a la diferencia

$$\Delta x = x - x_0,$$

- en donde, en general, se supone que $\Delta x \ll |x_0|$.

- El *error absoluto* nos da una medida de la desviación, en términos absolutos, respecto al valor "verdadero". No obstante, en ocasiones nos interesa resaltar la importancia relativa de esa desviación. Para tal fin, se usa el *error relativo*.

- El error relativo se define como el cociente entre el error absoluto y el valor "verdadero":

$$\varepsilon = \frac{\Delta x}{x_0}$$

- Al dar el resultado de una medida (o de un conjunto de medidas) de una magnitud, siempre se indica el *grado de incertidumbre* de la misma, para lo cual acompañamos el resultado de la medida con el error absoluto; expresando el resultado así

$$x \pm \Delta x.$$

- Dado el significado de la cota de imprecisión que tiene el error absoluto, este, durante el transcurso de estas prácticas de laboratorio, no deberá escribirse con más de una cifra significativa (aunque podrían admitirse dos cifras si estas no sobrepasan 24, pero esto se quedará para cursos posteriores). Si el error se ha obtenido con más de una cifra, se deberá a proceder a suprimir las posteriores, *aumentando en una unidad la primera, si la segunda fuera 5 o mayor que 5*.
- El valor de la magnitud debe de tener sólo las cifras necesarias para que su última cifra significativa sea del mismo orden decimal que la última del error absoluto, llamada *cifra de acotamiento*.

| Valores incorrectos | Valores correctos |
|---|---|
| $3{,}418 \pm 0{,}123$ | $3{,}4 \pm 0{,}1$ |
| $6{,}3 \pm 0{,}09$ | $6{,}30 \pm 0{,}09$ |
| $46288 \pm 1551$ | $(4{,}6 \pm 2) \times 10^3$ |
| $428{,}351 \pm 0{,}27$ | $428{,}4 \pm 0{,}3$ |
| $0{,}01683 \pm 0{,}0058$ | $0{,}017 \pm 0{,}006$ |

# CIFRAS SIGNIFICATIVAS

- El número de cifras significativas de una medida es el número de dígitos fiables que dicha medida contiene.
- Ejemplo "dudoso": tiempo que tarda la luz en recorrer UN MILLÓN de kilómetros...

$$t = \frac{x}{c} = \frac{10^6}{3 \cdot 10^5} = 3.3333333333 \quad s \qquad ?$$

- Los ceros a la izquierda ***no son*** significativos, indican la colocación del punto decimal; así, 0.000345 tiene TRES cifras significativas.
- Los ceros a la derecha y después del punto decimal ***si son*** significativos; como ejemplo, 3.4120 tiene CINCO cifras significativas.
- En números enteros terminados en ceros, éstos pueden ser significativos o no. Debe distinguirse si sólo sirven para localizar el punto decimal o forman parte de la medida.

$3 \cdot 10^2$ kg → UNA cifra significativa
$3.0 \cdot 10^2$ kg → DOS cifras significativas
$3.00 \cdot 10^2$ kg → TRES cifras significativas

# DETERMINACIÓN DE ERRORES EN MEDIDAS DIRECTAS

- ***Cuando se realice la medida de cualquier magnitud, se indicará siempre una estimación del error asociado a la misma*.**
- **Dado que no conocemos el valor "verdadero" de la magnitud que deseamos medir, habrá que seguir ciertos procedimientos para hacer una estimación, tanto del valor "verdadero", como de una *cota de error*, que nos indiquen la incertidumbre de la medición realizada**
- Distinguiremos dos casos bien diferenciados:

  (a) Si sólo se puede realizar una sola medida, *x*, de la magnitud.

- En este caso consideraremos que el error absoluto coincide con el valor absoluto de la sensibilidad (S) del aparato utilizado para realizar la medida. De este modo, el resultado de la medida lo expresaremos así:

  - $x \pm S$

---

- (b) Caso en el que se realizan varias medidas de una misma magnitud.
- Para alcanzar cierta validez estadística en los resultados de las medidas, conviene repetir varias veces la determinación del valor de la magnitud problema. Los resultados de las medidas individuales pueden presentarse poco o muy dispersos y, en función de esta dispersión será conveniente aumentar o no el número de mediciones de la magnitud.
- Para decidir el número de determinaciones que hay que efectuar del valor de la magnitud física, se sigue el siguiente procedimiento:
- Se realizan **tres** medidas de la magnitud ($x_1$, $x_2$ y $x_3$), se calcula el valor medio de las tres medidas

$$\bar{x}_3 = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}$$

- se halla la *dispersión total, D,* de las mismas, es decir, la diferencia entre los valores extremos de las medidas (valor máximo menos el valor mínimo) y se obtiene el *tanto por ciento de dispersión, T,* dado por:

$$T = \frac{D}{\bar{x}_3}$$

- (i) el valor de la dispersión *D* no sea mayor que el valor de la sensibilidad del aparato de medida $D \leq S$.

  En este caso, tomaremos como estimación del valor "verdadero" de la magnitud el valor medio de las tres medidas, y como error absoluto la sensibilidad, es decir,

$$\overline{x_3} \pm S$$

- (ii) el valor de la dispersión *D* es mayor que la sensibilidad del aparato, $D > S$,

- Se procede a aumentar el número de medidas de la magnitud.
- El *criterio* a seguir en esta aumento viene condicionado por el valor del porcentaje dispersión *T* del modo indicado en la siguiente tabla:

# Número de medidas en el laboratorio

| **T en las tres primeras medidas** | **Nº total de medidas necesarias** | **Error Medida** |
|---|---|---|
| $T_3 \leq 2\ \%$ | Bastan las 3 medidas realizadas | $\Delta x = S$<br>$\overline{x_3} \pm S$ |
| $2\% < T_3 \leq 8\%$ | Hay que hacer 3 medidas más, hasta un total de 6 | $\Delta x = \max(D_6/6, S)$<br>$\overline{x_6} \pm \Delta x$ |
| $8\% < T_3 \leq 15\%$ | Hay que hacer un total de N=15 medidas | $\Delta x = \left[\frac{\sum(x_i - \overline{x_N})^2}{N}\right]^{1/2}$<br>$\overline{x_N} \pm \Delta x$ |
| $15\% < T_{15}$ | Hay que hacer un mínimo de N=50 medidas | $\Delta x = \left[\frac{\sum(x_i - \overline{x_N})^2}{N}\right]^{1/2}$<br>$\overline{x_N} \pm \Delta x$ |

- (1) se han realizado tres medidas, se toma como error absoluto el valor de la sensibilidad del aparato

$$\Delta x = S.$$

- (2) se han realizado seis medidas: se calcula el *error de dispersión* definido como $D_6/4$ (la cuarta parte de la dispersión total de las seis medidas), y se asigna como error absoluto de las medidas, el mayor de entre este valor y la sensibilidad del aparato. Es decir,

$$\Delta x = \max (D_6/6, S)$$

- (3) se han realizado más de 15 medidas; el error absoluto puede calcularse por la expresión:

$$\Delta x = \left[ \frac{\sum (x_i - \overline{x_n})^2}{N} \right]^{1/2}$$

- Es el *error cuadrático medio* en donde $x_i$ son cada una de las medidas realizadas y N es el número total de medidas realizadas.
- El procedimiento seguido en este último caso se debe a que, en una serie repetida de medidas de una misma magnitud, la distribución estadística de éstas alrededor del valor medio representa una forma típica, llamada *distribución gaussiana* o *distribución normal*

# DETERMINACIÓN DEL ERROR DE UNA MAGNITUD MEDIDA INDIRECTAMENTE

- La medida indirecta de una magnitud se alcanza mediante la aplicación de una fórmula a un conjunto de medidas directas (variables independientes o *datos*), que las relacionan con la magnitud problema.
- Esta fórmula ha de servir para obtener el error de dicha magnitud.
- La magnitud problema *F* es función de otras magnitudes físicas (*datos*), estando relacionadas con ellas por

$$F = F(x, y, z, ...)$$

- Se han realizado medidas de las citadas variables *x, y, z, ...*y se han determinado su valor medio (al que llamaremos con el mismo nombre *x, y, z, ...*) y sus errores absolutos ($\Delta x$, $\Delta y$, $\Delta z$, ...).

Se obtiene la diferencial total de *F* en función de las variables *x, y, z, ...*

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz + \ldots$$

- Se asimilan las diferentes diferenciales a los errores absolutos y consideramos que en el cálculo del error de *F* debemos ponernos en el caso más desfavorable (siempre deseamos tener una cota de error, o sea un valor de la magnitud del que podamos estar seguros de que el valor “verdadero” está dentro de nuestro intervalo de “seguridad”), o sea, el mayor error posible. Lo que significa que consideraremos todos los errores como positivos, es decir, tomaremos, además, los valores absolutos de las derivadas parciales, con lo que obtendremos el valor absoluto de *F*, es decir

$$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \Delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right| \Delta y + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right| \Delta z + \ldots$$

## ¿qué son las derivadas parciales?

- La derivada parcial de una función *f(x,y,z,..)* respecto de *x* se calcula como la derivada de f respecto de *x* manteniendo constantes las demás variables.
- Representa la variación de *f* cuando hay un cambio infinitesimal de *x* (y sólo de *x*)
- Ejemplo. Sea la función *P* que depende de las variables *I* y *R* $P = P(I,R) = I^2 R$

$$\frac{\partial P}{\partial R} = I^2 \qquad \frac{\partial P}{\partial I} = 2RI$$

# Ejemplo numérico del cálculo de errores

- Calculemos el error de una magnitud $F = \frac{(x+y)z}{(u-v)w}$
- Se han determinado las valores medios de las variables y sus errores absolutos,

x = 27,33 ± 0,01
y = 2,45 ± 0.05
z = 10,0 ± 0,1
u = 50,2 ± 0,1
v = 1,033 ± 0,001
w = 3,26 ± 0,02

- El valor de la magnitud *F es* F = 1,8579...
  y el error correspondiente
- $$\Delta F = \left|\frac{\partial F}{\partial x}\right|\Delta x + \left|\frac{\partial F}{\partial y}\right|\Delta y + \left|\frac{\partial F}{\partial z}\right|\Delta z + \left|\frac{\partial F}{\partial u}\right|\Delta u + \left|\frac{\partial F}{\partial v}\right|\Delta v + \left|\frac{\partial F}{\partial w}\right|\Delta w$$

$$\Delta F = \left|\frac{z}{(u-v)w}\right|\Delta x + \left|\frac{z}{(u-v)w}\right|\Delta y + \left|\frac{x+y}{(u-v)w}\right|\Delta z + \left|-\frac{(x+y)z}{(u-v)^2 w}\right|\Delta u + \left|\frac{(x+y)z}{(u-v)^2 w}\right|\Delta v + \left|-\frac{(x+y)z}{(u-v)w^2}\right|\Delta w$$

- Tras realizar los cálculos numéricos, se obtiene: ΔF = 0,04458...
- Teniendo en cuenta el número máximo de cifras significativas del error absoluto,

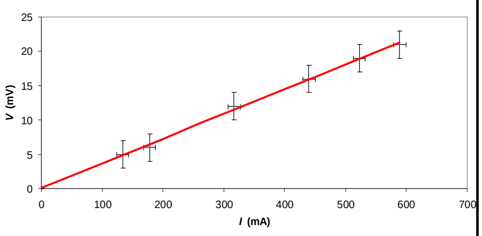
F = 1,86 ± 0,04

# CONSTRUCCIÓN DE GRÁFICAS

- Gráficas en papel milimetrado con los ejes bien trazados, indicando en sus extremos la magnitud representada en ese eje, así como la unidad en que ha sido medida. El título de la gráfica se pondrá en la parte superior.
- La variable independiente del fenómeno estudiado se representará en abscisas y la dependiente en ordenadas.
- Las escalas, sobre ambos ejes, han de permitir una lectura rápida y sencilla. Se elegirán escalas con intervalos sencillos de 1, 2, 5, 10, 20, ... unidades.
- Sobre los ejes sólo se indicarán los valores correspondientes a las divisiones enteras de la escala ( que quedarán uniformemente espaciadas). No se señalarán los valores correspondientes a las medidas realizadas.
- Los valores medidos se representarán sobre el papel milimetrado por el punto correspondiente a sus dos coordenadas (“*punto experimental*”) y rodeado por el *rectángulo de error*, cuya base abarca desde *x* - *Δ*x hasta *x* + *Δx*, y cuya altura desde *y* - *Δy* hasta *y* + *Δy*, siendo *x* e *y* las coordenadas del punto experimental.
- Si *Δx* o *Δy* son despreciables en comparación con la escala utilizada, el rectángulo de error quedará reducido a un simple segmento vertical u horizontal (*barra de error*), según el caso. En el caso de que ambos errores sean simultáneamente despreciables, el punto experimental quedaría reducido a un “punto”.
- Las gráficas han de ser líneas finas y “continuas”, nunca quebradas.
- Han de pasar por todos los rectángulos de error, aunque para ello dejen muchas veces de pasar por los puntos experimentales, que pueden quedar a derecha o a izquierda de la gráfica. Si al hacer esta operación, alguno de los rectángulos de error, queda excesivamente alejado de la forma continua de la gráfica, es prueba de que esa medida es falsa, por alguna causa accidental, y debería repetirse.

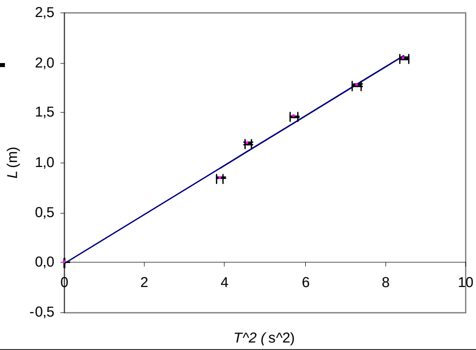
## Ejemplos

| $I$ (mA) | $\Delta I$ | $V$ (mV) | $\Delta V$ |
|---|---|---|---|
| 134 | 10 | 5 | 2 |
| 178 | 10 | 6 | 2 |
| 317 | 10 | 12 | 2 |
| 440 | 10 | 16 | 2 |
| 523 | 10 | 19 | 2 |
| 589 | 10 | 21 | 2 |




| $T$ (s) | $\Delta T$ | $T^2$(s$^2$) | $\Delta(T^2)$ | $L$ (m) | $\Delta L$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1,97 | 0,02 | 3,88 | 0,08 | 0,85 | 0,01 |
| 2,14 | 0,02 | 4,58 | 0,09 | 1,20 | 0,01 |
| 2,39 | 0,02 | 5,71 | 0,10 | 1,46 | 0,01 |
| 2,70 | 0,02 | 7,29 | 0,11 | 1,78 | 0,01 |
| 2,91 | 0,02 | 8,47 | 0,12 | 2,05 | 0,01 |

$$\Delta T^2 = 2T\Delta T$$




## AJUSTE DE LA RECTA DE REGRESIÓN MEDIANTE MÍNIMOS CUADRADOS

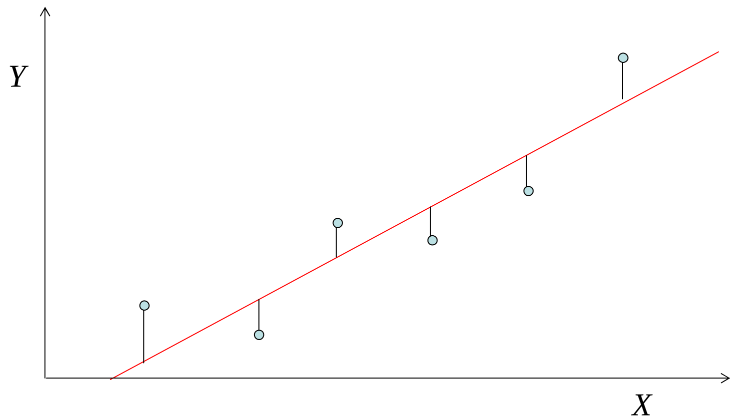
- Con frecuencia, se plantea el problema de encontrar una expresión matemática $y = f(x)$ de la ley física que rige el comportamiento de un determinado fenómeno, a partir de una serie de N medidas, ($x_i$, $y_i$), de las magnitudes *x* e *y* que lo caracterizan.
- Cuando la representación gráfica del fenómeno estudiado proporciona una distribución de los puntos experimentales que parecen tener la forma de una curva determinada, es conveniente obtener la ecuación de esta curva que probablemente será la expresión de la ley física que rige el fenómeno estudiado.
- El método más potente (y, sobre todo, el más simple) conocido es el de *regresión por los mínimos cuadrados*. Estos métodos son aplicables a diversas curvas de distintos grados.
- El caso más simple es ley física lineal, lo que lleva a obtener una *recta de regresión*.

# MÉTODO DE MÍNIMOS CUADRADOS

•Dicha recta debe de cumplir la condición de que los puntos experimentales queden distribuidos simétricamente a ambos lados y lo más próximos posible a la misma. Esta condición se tiene si la recta, de ecuación $y = a\,x + b$ verifica que la cantidad

$$C(x, y) = \Sigma (y_i - a\,x_i - b)^2$$

sea mínima.



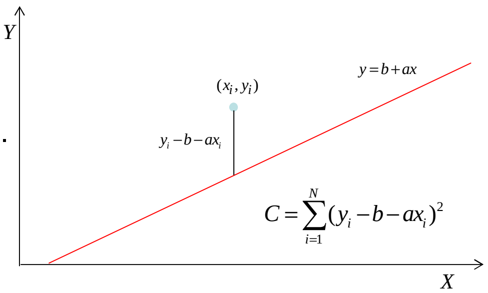

- Para minimizar $C(x, y) = \Sigma (y_i - a\,x_i - b)^2$ se deriva respecto a *a* y *b*, y se igualan ambas derivadas a cero.

$$\frac{\partial C(a,b)}{\partial a} = 0 \qquad \frac{\partial C(a,b)}{\partial b} = 0$$

Lo que da un sistema de ecuaciones con dos incógnitas, *a* y *b*.

$$a \sum_{i=1}^{N} x_i + b \sum_{i=1}^{N} x_i^2 = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$$

$$aN + b \sum_{i=1}^{N} x_i = \sum_{i=1}^{N} y_i$$




Su solución es

$$a = \frac{N \sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum x_i y_i - Nb}{\sum x_i^2}$$ **Pendiente**

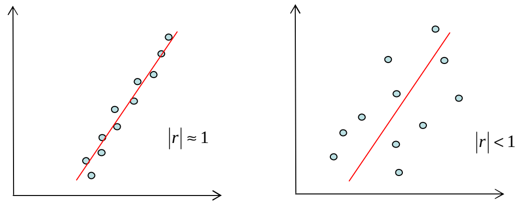
$$b = \frac{\sum x_i^2 \sum y_i - \sum x_i \sum x_i y_i}{N \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} = \frac{\sum y_i - a \sum x_i}{N}$$ **Ordenada en el origen**

## ¿Cómo evaluar la “bondad” del ajuste?

•*Coeficiente de correlación lineal*, “*r*” : da una medida del grado de correlación (de aproximación) entre los valores de las variables *x* e *y*, es decir, hasta que punto *x* e *y* están relacionados mediante una función lineal.

$$r = \frac{N\sum x_i y_i - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{([N\sum x_i^2 - (\sum x_i)^2 (N\sum y_i^2 - (\sum y_i)^2)}}$$

Varía entre cero (correlación inexistente) y $\pm 1$ (correlación completa).




Errores en la pendiente *a* y en la ordenada en el origen *b*

$$\Delta a = \left[\frac{\sum(y_i - ax_i - b)^2}{(N-2)\sum(x_i - \overline{x})^2}\right]^{\frac{1}{2}} \qquad \Delta b = \left[\left(\frac{1}{N} + \frac{\overline{x}^2}{\sum(x_i - \overline{x})^2}\right)\left(\frac{\sum(y_i - ax_i - b)^2}{(N-2)}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

## Ejemplo

Se ha usado un péndulo simple para medir la aceleración de la gravedad. El procedimiento consiste en medir el periodo de oscilación *T* para varias longitudes diferentes *L*, y usar la relación entre el periodo, la longitud del péndulo y la aceleración de la gravedad:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

Con el método de mínimos cuadrados, transformando la ecuación anterior, se puede obtener la aceleración de la gravedad. Las longitudes están medidas con ±1 cm y los periodos con ±0.02 s

La transformación necesaria para resolver el problema es linealizar la ecuación del periodo del péndulo: $L = \frac{g}{4\pi^2}T^2$

Mediante el ajuste de *L* frente a $T^2$ obtenemos una recta cuya pendiente es $g/4\pi^2$, de la cual obtendremos un valor de *g*.

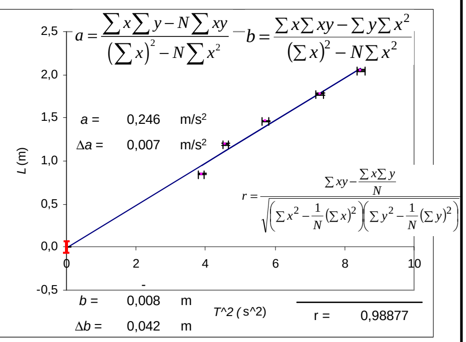
Los errores en *L* son conocidos directamente; para determinar los errores en $T^2$ aplicamos la propagación de errores:

| *T* (s) | Δ*T* | *L* (m) | Δ*L* |
|---|---|---|---|
| 1,97 | 0,02 | 0,85 | 0,01 |
| 2,14 | 0,02 | 1,20 | 0,01 |
| 2,39 | 0,02 | 1,46 | 0,01 |
| 2,70 | 0,02 | 1,78 | 0,01 |
| 2,91 | 0,02 | 2,05 | 0,01 |

$$\Delta\left(T^2\right) = \left|\frac{\partial T^2}{\partial T}\right|\Delta T = 2T\Delta T$$

| | | |
|---|---|---|
| *g* = | 9,7 | m/s² |
| Δ*g* = | 0,3 | m/s² |

| $T^2$(s) | Δ($T^2$) | *L* (m) | Δ*L* | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| x | Δx | y | Δy | xy | x^2 | y^2 |
| 3,88 | 0,08 | 0,85 | 0,01 | 3,30 | 15,1 | 0,72 |
| 4,58 | 0,09 | 1,20 | 0,01 | 5,47 | 21,0 | 1,43 |
| 5,71 | 0,10 | 1,46 | 0,01 | 8,34 | 32,6 | 2,13 |
| 7,29 | 0,11 | 1,78 | 0,01 | 12,94 | 53,1 | 3,15 |
| 8,47 | 0,12 | 2,05 | 0,01 | 17,36 | 71,7 | 4,20 |
| 29,93 | 0,48 | 7,33 | 0,05 | 47,4 | 193,5 | 11,6 |



# INTERPOLACIÓN LINEAL EN TABLAS DE SIMPLE ENTRADA

- La tablas de simple entrada proporcionan el valor de una variable dada *x* en función de otra *z*, y viceversa.
- Se quiere determinar el valor de *z* que corresponde a uno de *x* no tabulado, o viceversa,
- se supone que, para intervalos pequeños de las variables la función z = z(x) es lineal y por tanto los incrementos de las mismas son proporcionales. Para resolver el problema se determinan previamente los valores tabulados de *x* e *y* entre los que se encuentran los de nuestro problema ($x_1<x<x_2$ ; $z_1<z<z_2$),

| | |
|---|---|
| $x_1$ | $z_1$ |
| $x_2$ | $z_2$ |

La relación que liga *x* con *z* puede escribirse,, según la fórmula lineal

$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

El error absoluto de *z* resulta ser

$$\Delta z = \left|\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\right| \Delta x$$

# Ejemplo

| T (ºC) | $e_s$ (hPa) | $e_i$ (hPa) | $L_c$ (kJ kg$^{-1}$) |
|---|---|---|---|
| -40 | 0.189 | 0.128 | 2599 |
| -35 | 0.314 | 0.223 | |
| -30 | 0.509 | 0.380 | 2571 |
| -25 | 0.807 | 0.632 | |
| -20 | 1.254 | 1.032 | 2545 |
| -15 | 1.912 | 1.652 | |
| -10 | 2.863 | 2.600 | 2521 |
| -5 | 4.215 | 4.015 | |
| 0 | 6.108 | 6.107 | 2501 |
| 5 | 8.719 | | |
| 10 | 12.272 | | 2473 |
| 15 | 17.044 | | |
| 20 | 23.373 | | 2449 |
| 25 | 31.671 | | |
| 30 | 42.430 | | 2426 |
| 35 | 56.236 | | |
| 40 | 73.777 | | 2402 |

¿cuánto vale $e_s$ para una temperatura de 7º C?

En los 5 ºC que hay entre 10 y 5º C, $e_s$ cambia de 12.272-8.719 HPa= 3.553 HPa. Por cada ºC

$$\frac{3.553}{5} = 0.7106 HPa/^{o}C$$

$$e_s(7^{o}C) = e_s(5^{o}C) + 2 \times \frac{3.553}{5}\frac{HPa}{^{o}C} =$$

$$(8.719 HPa + 2^{o}C \times 0.7106 \frac{HPa}{^{o}C}) = 10.1402 HPa$$

# Ejemplo

| T (ºC) | $e_s$ (hPa) | $e_i$ (hPa) | $L_c$ (kJ $kg^{-1}$) |
|---|---|---|---|
| -40 | 0.189 | 0.128 | 2599 |
| -35 | 0.314 | 0.223 | |
| -30 | 0.509 | 0.380 | 2571 |
| -25 | 0.807 | 0.632 | |
| -20 | 1.254 | 1.032 | 2545 |
| -15 | 1.912 | 1.652 | |
| -10 | 2.863 | 2.600 | 2521 |
| -5 | 4.215 | 4.015 | |
| 0 | 6.108 | 6.107 | 2501 |
| 5 | 8.719 | | |
| 10 | 12.272 | | 2473 |
| 15 | 17.044 | | |
| 20 | 23.373 | | 2449 |
| 25 | 31.671 | | |
| 30 | 42.430 | | 2426 |
| 35 | 56.236 | | |
| 40 | 73.777 | | 2402 |

¿cuánto vale $e_s$ para una temperatura de 7º C?

x=7ºC   z= $e_s$(7ºC)

$x_1$=5ºC   $x_2$=10ºC

$z_1$= $e_s$(5ºC)=8.719 HPa $z_2$= $e_s$(10ºC)=12.722 HPa

$$z = z_1 + \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}(x - x_1) =$$

$$8.719 HPa + \frac{12.727 HPa - 8.719 HPa}{10^o C - 5^o C}(7^o C - 5^o C)$$

$$e_s(7^o C) = 10.1402 HPA$$

$$\Delta z = \left|\frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}\right| \Delta x = \frac{12.727 HPa - 8.719 HPa}{10^o C - 5^o C} 1^o C =$$

$$0.7106 HPa \approx 0.7 HPa$$

$$e_s(7^o C) = (10.1 \pm 0.7) HPA$$

# INTERPOLACIÓN LINEAL EN TABLAS DE DOBLE ENTRADA

- En las tablas de doble entrada, para cada pareja de valores *x* e *y* se suministra el valor correspondiente de una tercera variable relacionada con las dos anteriores mediante una función z = z (x, y).
- En este caso el trazo de tablas (cuyos intervalos se consideran ahora "triplemente" lineales), entre cuyos valores se encuentran el *z* buscado, presentan el aspecto ($x_1$<x< $x_2$ ; $y_1$< y< $y_2$ ),

| | $y_1$ | $y_2$ |
|---|---|---|
| $x_1$ | $z_{11}$ | $z_{12}$ |
| $x_2$ | $z_{21}$ | $z_{22}$ |

La relación aproximada linealmente que permite el cálculo es

$$z = z_{11} + \frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}(x - x_1) + \frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1}(y - y_1)$$

El error absoluto de *z* resulta ser

$$\Delta z = \left|\frac{z_{21} - z_{11}}{x_2 - x_1}\right| \Delta x + \left|\frac{z_{12} - z_{11}}{y_2 - y_1}\right| \Delta y$$