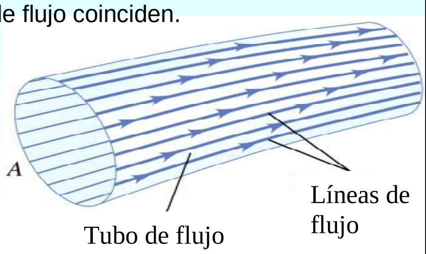
Dinámica de fluidos

La hidrodinámica estudia los fluidos en movimiento, constituye una de las ramas más complejas de la mecánica, aunque muchos casos prácticos pueden resolverse mediante modelos idealizados.

Dinámica de Fluidos: Definiciones

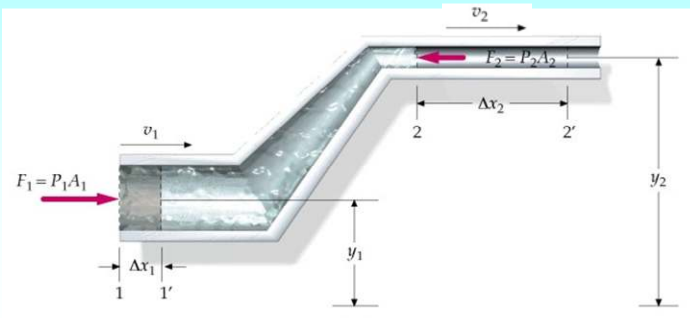
- •Fluido ideal: incomprensible y sin rozamiento interno o viscosidad.
- •La hipótesis de incompresibilidad suele ser una buena aproximación para líquidos.
- •Un gas puede tratarse como un fluido ideal siempre que el flujo sea tal que las diferencias de presión no resulten demasiado grandes.
- •Línea de flujo: la trayectoria seguida por un elemento de un fluido móvil.
- •En general, la velocidad del elemento varía, tanto en magnitud como en dirección.
- •Flujo estacionario: cuando todo elemento que pasa por un punto dado sigue la misma línea de flujo que los elementos precedentes, se dice que el flujo es estacionario.
- •En estado estacionario, la velocidad en cada punto no varía con el tiempo, si bien la velocidad de una partícula del fluido puede cambiar al pasar de un punto a otro.
- •Línea de corriente: curva cuya tangente en ese punto coincide con la dirección de la velocidad del fluido en ese punto.
- •En un flujo estacionario, líneas de corriente y de flujo coinciden.
- •Dos líneas de corriente no pueden cortarse.

•Si se consideran todas las líneas de corriente que pasan por la periferia de un elemento de área, A, estas líneas encierran un volumen denominado tubo de flujo.



Ecuación de continuidad

- Consideremos un fluido incompresible, no viscoso (sin rozamiento interno) que fluye estacionariamente y sin turbulencias por un tubo cerrado.
- Consideremos los puntos 1 y 2. Después de un tiempo Δt, el fluido se habrá movido a lo largo de la tubería y estará comprendido entre los puntos 1’ y 2’.



(a)

Ecuación de continuidad

- Empezamos en el punto 1 y un intervalo de tiempo Δt
- Anchura del bloque de fluido que pasa por la sección 1: $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$
- Volumen de fluido que pasa la sección 1: $V_1 = A_1 \Delta x_1 = A_1 v_1 \Delta t$
- Masa de fluido que pasa la sección 1: $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
- Principio físico: la masa se conserva $m_1 = m_2$
- Punto 1: $m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
- Punto 2: $m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

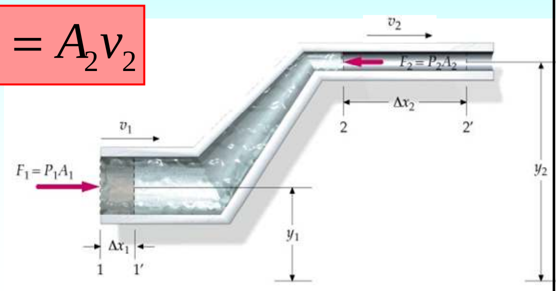
$$\Rightarrow \rho_1 A_1 v_1 \cancel{\Delta t} = \rho_2 A_2 v_2 \cancel{\Delta t}$$

- Para fluido incompresibles ($\rho_1 = \rho_2 = \rho$)

$$\boxed{A_1 v_1 = A_2 v_2}$$

- Definimos el caudal: Q (unidades: $m^3 s^{-1}$)

$$Q = \frac{dV}{dt} = A\frac{dx}{dt} = Av$$



Ejemplos

Aceleración de agua en caída libre
–Aumenta la velocidad
–Disminuye el área del flujo
–Caudal, Av= cte

Ecuación de continuidad en fluidos compresibles

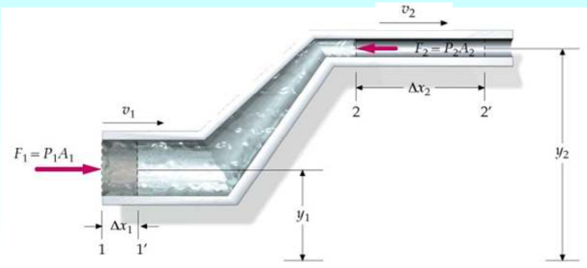
- Flujo compresible (ejm. Gases)
- El término caudal no tiene sentido
- Pero la masa aún se conserva
- •En el punto 1 fluido que pasa por la sección 1: $\Delta x_1 = v_1 \Delta t$
- Volumen de fluido que pasa la sección 1: $V_1 = A_1 \Delta x_1 = A_1 v_1 \Delta t$
- Masa de fluido que pasa la sección 1: $m_1 = \rho_1 V_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
- Principio físico: la masa se conserva $m_1 = m_2$
- Punto 1: $m_1 = \rho_1 A_1 v_1 \Delta t$
- Punto 2: $m_2 = \rho_2 A_2 v_2 \Delta t$

$$\rho_1 A_1 v_1 \cancel{\Delta t} = \rho_2 A_2 v_2 \cancel{\Delta t}$$

$$\boxed{\rho_1 A_1 v_1 = \rho_2 A_2 v_2}$$

Ecuación de Bernoulli

La ecuación de Bernoulli (1738): consecuencia de la ley de conservación de la energía.
Consideramos un fluido circulando de modo estacionario a través de una tubería que no es horizontal. La presión variará de un punto a otro a lo largo de la tubería y debe realizarse cierto trabajo para que el fluido circule, la velocidad del fluido y la presión también variarán.
Inicialmente el fluido está entre los puntos 1 y 2. La totalidad del fluido se mueve en el tiempo Δt, pasando a estar entre el punto 1' (1+ $\Delta x_{1)}$ y el punto 2' (2+$\Delta x_{2)}$



(a)

- Consideramos el trabajo de las fuerzas que están actuando
- Desde la izquierda tenemos:
- La fuerza $F_1 = P_1 A_1$ que ejerce un trabajo $W = F_1 \Delta x_1$
- Desde la derecha:
- La fuerza $F_2 = P_2 A_2$ que ejerce un trabajo $W = -F_2 \Delta x_2$ (la fuerza opone el movimiento)

Teniendo en cuenta que $A_1\, \Delta x_1 = A_2\, \Delta x_2 = \Delta V$ (fluido incompresible)

- Trabajo neto, $W = (P_1 - P_2)\, \Delta V$

Sirve para aumentar la energía Cinética (ΔT); y/ó– Potencial gravitacional (ΔU)

- Este trabajo es igual a la variación de energía cinética y energía potencial gravitatoria del fluido considerado, es decir a la variación de energía de la masa . La variación de energía potencial de Δm es

$$\Delta U = \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1 = g\Delta m(y_2 - y_1)$$

y la variación de energía cinética será

$$\Delta T = \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2 = \frac{1}{2}\Delta m(v_2^2 - v_1^2)$$

Por el teorema de conservación de trabajo-energía se tiene

$$\Delta W = \Delta U + \Delta T$$

$$(P_1 - P_2)\Delta V = \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1 + \frac{1}{2}\Delta m v_2^2 - \frac{1}{2}\Delta m v_1^2$$

dividiendo cada término por ΔV y teniendo en cuenta que *ρ=Δm/ΔV*

$$P_1 + \rho g y_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \rho g y_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 \quad P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte$$

$$P + \rho g y + \frac{1}{2}\rho v^2 = cte$$

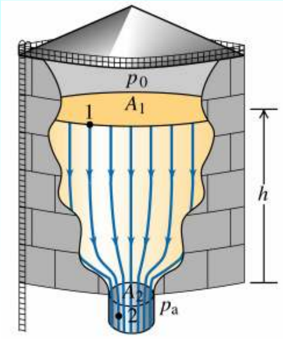
- la suma de estas magnitudes es cte en cualquier punto de la tubería. Esta es la ecuación para un flujo no viscoso, estacionario de un fluido incompresible.
- La ecuación de Bernoulli expresa la igualdad del trabajo por unidad de volumen de fluido (P_2-P_1) a la suma de las magnitudes energía potencial y cinética por unidad de volumen que tienen lugar en el flujo. Esta ecuación también puede interpretarse en función de presiones. El 1º término del 2º miembro puede interpretarse como la diferencia de presión debido al peso del fluido y a la distinta altura de los extremos considerados. El 2º sumando es la diferencia de presión adicional asociada al cambio de presión.
- Téngase en cuenta que P es la presión absoluta (no manométrica) y que ha de utilizarse un sistema coherente de unidades (por ejemplo, la presión en Pa = N/m^2, y la velocidad en m/s.
- A veces al término $\frac{1}{2}\rho v^2$ se le llama presión dinámica

Aplicaciones de la ley de Bernoulli

- o Hidrostática: Si $v_1=v_2=0$ $P_1-P_2=\rho g(y_2-y_1)$
- o Velocidad de salida: Teorema de Torricelli.
- Depósito de sección A_1, lleno hasta una altura h de un líquido de densidad ρ. v_1 es la velocidad en el punto 1
- El espacio por encima del líquido es el aire a presión P.
- El líquido sale por un orificio de área A_2. v_2 es la velocidad de salida y en el punto 2 la presión es la atmosférica P_a
- Aplicando la ley de Bernoulli y tomando el fondo del depósito como nivel de referencia queda

$$P+\frac{1}{2}\rho v_1^2+\rho gh=P_a+\frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$v_2^2=v_1^2+2\frac{P-Pa}{\rho}+2gh$$



Teorema de Torricelli

$$v_2^2=v_1^2+2\frac{P-P_a}{\rho}+2gh$$

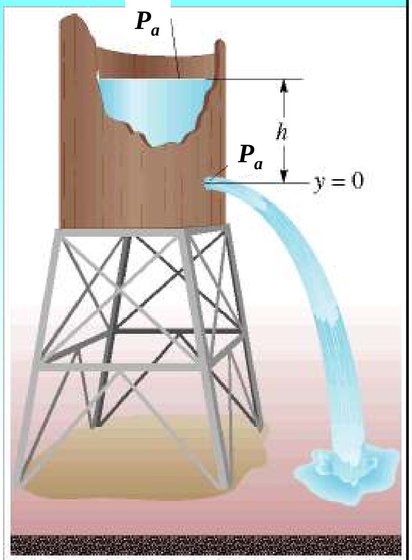
El depósito está abierto, de modo que $P=P_a$

$P-P_a=0$

Si A_1 es mucho mayor que A_2, queda que $v_1 \ll v_2$ y este término podrá despreciarse, entonces

$$v_2=\sqrt{2gh}$$

La velocidad de salida es igual a la adquirida por cualquier cuerpo al caer libremente a una altura h (teorema de Torricelli). Este teorema es también aplicable a cualquier orificio en las paredes a profundidad *h.*



- o <u>Depósito cerrado</u>: Si v_1 sigue siendo despreciable, y la presión P en el recipiente cerrado es muy grande, de tal modo que 2*gh* puede despreciarse frente a $2(P-P_a)/\rho$, la velocidad de salida será

$$v_2 = \sqrt{2(P-P_a)/\rho}$$

- ρ es la densidad del fluido que sale por el orificio. Si el recipiente está lleno parcialmente de líquido, ρ es la densidad del líquido. Si el recipiente sólo contiene gas, ρ es la densidad del gas.
- La velocidad del gas puede ser muy grande aunque *P* no lo sea, ya que *P* en un gas es muy pequeña.
- Si la presión es demasiado grande, este modelo no resulta válido. Ha de tenerse en cuenta la compresibilidad del gas, y si la velocidad es muy grande, el flujo pasa a ser turbulento, dejando de ser válida la ecuación de Bernoulli.

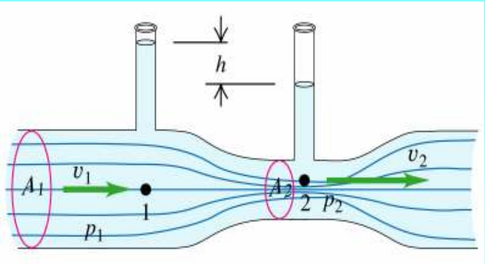
- o <u>Vena contracta</u>: Las convergencias de las líneas de corriente en el orificio, da lugar a que la sección transversal de la corriente continúe disminuyendo durante un pequeño recorrido fuera del depósito. Esta área de sección transversal mínima, llamada sección contraída (vena contracta) es el que debe utilizarse en la ecuación de continuidad. Para una abertura circular de bordes finos, el área de sección contraída es aproximadamente el 65% del área del orificio

Tubo de Venturi

- Consiste en un tubo con un estrechamiento intercalado en él, sin que presente turbulencia en el estrechamiento (haciendo este de forma gradual).

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$



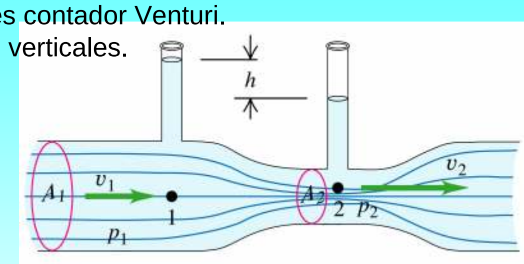
Ya que $A_1>A_2$, $v_2 > v_1$, y por lo tanto $P_2 < P_1$.
Actúa una fuerza neta hacia la derecha que acelera al fluido al entrar en el estrechamiento y otra fuerza neta hacia la izquierda que lo decelera al abandonarlo.
La reducción de presión en un estrechamiento tiene muchas aplicaciones técnicas.
El vapor de gasolina penetra en un colector del motor por la baja presión producida en un tubo Venturi

Contador Venturi

El tubo Venturi puede usarse para determinar las velocidades en el fluido y los caudales. Se llama entonces contador Venturi.

P_1 y P_2 se miden mediante tubos verticales.

Conociendo las áreas A_1 y A_2



$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2$$

$$A_1 v_1 = A_2 v_2$$

$$\frac{A_1 v_1}{A_2} = v_2 \Rightarrow P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \frac{1}{2}\rho \left(\frac{A_1 v_1}{A_2}\right)^2$$

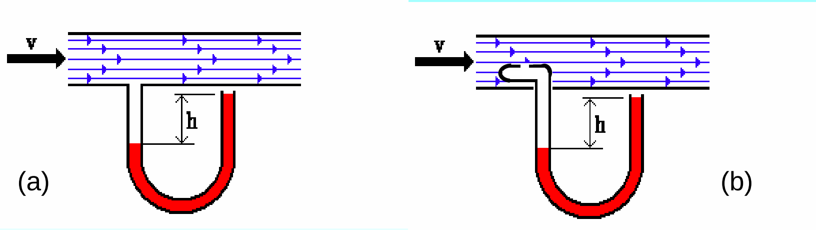
$$v_1^2 - \left(\frac{A_1 v_1}{A_2}\right)^2 = \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho} \Rightarrow v_1^2\left(1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2\right) = \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho}$$

$$v_1^2 = \frac{2(P_2 - P_1)}{\rho} \Bigg/ 1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{2(P_2 - P_1)}{\rho} \Bigg/ 1 - \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2} = \sqrt{2gh \Bigg/ \left(\frac{A_1}{A_2}\right)^2 - 1}$$

Medida de la presión en fluidos móviles

La presión P en un fluido que circula por un canal cerrado puede medirse haciendo uso de manómetros de tubo abierto.

En (a), una de las ramas del manómetro está unida a un orificio de la pared del canal. En (b), se intercala en la corriente mediante una sonda. La sonda debe ser lo bastante pequeña para que el flujo no sea perturbado y no aparezca turbulencia.

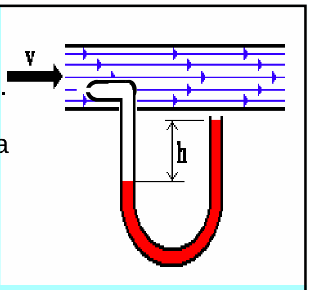


La diferencia de altura en los ramales del manómetro es proporcional a la diferencia entre la presión atmosférica P_a y la presión del fluido P. Esto es

$$P - P_a = \rho_m g h_1 \Rightarrow P = P_a + \rho_m g h_1$$

donde ρ_m es la densidad del líquido que está dentro del manómetro

El tubo de Pitot es una sonda con un orificio en el extremo que se enfrenta a la corriente donde la presión es P_2 y la velocidad nula (punto de remanso). Aplicando la ecuación de Bernoulli al punto de remanso y a otro situado a gran distancia de la sonda donde la presión es P y la velocidad v,



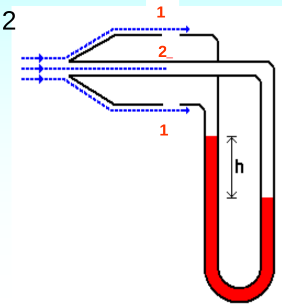
$$P_2 = P + \frac{1}{2}\rho v^2 = P_a + \rho g h_2$$

P_2 vendrá dado por la lectura del manómetro. A veces a P se le llama presión estática y a $\rho v^2/2$ presión dinámica, pero P es en realidad la presión real (fuerza por unidad de área).

El tubo de Prandtl (o Piot): En 1, la presión es P, y en 2

.

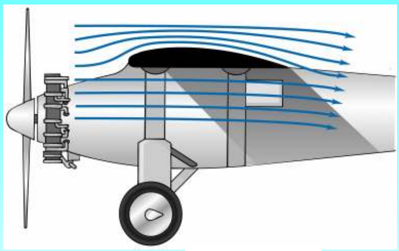
$$P_2 = P + \frac{1}{2}\rho v^2 \qquad \frac{1}{2}\rho v^2 = \rho_m g h$$

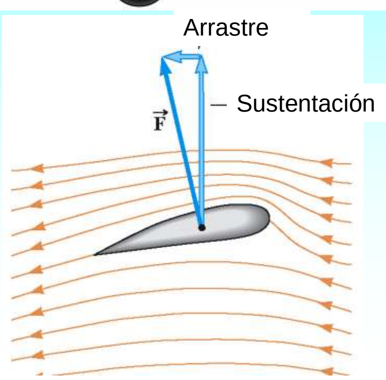


La lectura de este instrumento es directa, no depende de P_a. Si se mantiene el reposo, sirve para medir la velocidad de corriente de un fluido que pasa por él. Si se coloca en un avión indica la velocidad del avión respecto del aire.

Sustentación sobre el ala de un avión

- La orientación del ala respecto a la dirección del flujo hace que las líneas de corriente se aprieten encima del ala, lo que corresponde a un aumento de la velocidad en cima del ala, como ocurre en el estrechamiento Venturi.
- En la región situada encima del ala, la presión se reduce, mientras que debajo se mantiene próxima a la atmosférica.
- Debido a que la fuerza hacia arriba sobre la cara inferior es mayor que la ejercida hacia abajo sobre la cara superior, resulta una fuerza neta hacia arriba, o sustentación.
- Cuando aumenta el ángulo del ala del avión respecto del flujo se produce flujo turbulento en una región cada vez mayor de la parte superior del ala, y el descenso de presión no es tan grande como el predicho por la ecuación de Bernoulli. La sustentación del ala disminuye, y en casos extremos el avión pierde bruscamente velocidad.





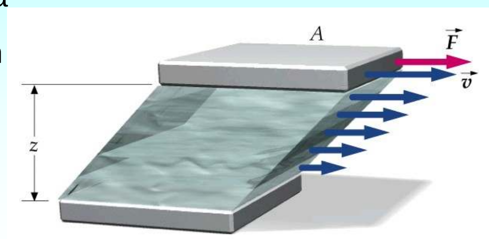
Fluidos Reales

- Resisten al deslizamiento entre capas
- Fricción interna “viscosidad”
- La viscosidad es más importante para ciertos fluidos
- Comparar la caída de un ladrillo desde 2m
- En el aire / en el agua / en la miel
- La importancia de la viscosidad
- Depende del fluido, pero también
- Depende del flujo

Viscosidad

- Viscosidad: el rozamiento interno de un fluido.
- A causa de la viscosidad es necesario ejercer una fuerza para que una capa líquida deslice sobre otra, o para que una superficie deslice sobre otra de la cual le separa un líquido.
- Los líquidos presentan mayor viscosidad que los gases
- La viscosidad depende de la temperatura. En los líquidos, la viscosidad disminuye con la temperatura.
- Sean dos láminas paralelas separadas por un fluido viscoso. La lámina inferior está fija, la superior se mueve con velocidad constante, *v*.

• El fluido en contacto con cada superficie tiene la misma velocidad que ésta, esto es, en el fluido de la parte superior es *v*, y en la inferior cero (está en reposo). La velocidad de las capas intermedias aumenta uniformemente de una superficie a la otra.



•Laminar: Capas del fluido fluyen paralelamente sin mezclarse

- o Observaciones empíricas
- En ausencia de otras fuerzas, la lámina superior decelera
- La deceleración depende en
- La diferencia de las velocidades (v-0)
- La distancia (l) de separación
- La superficie (A) de las láminas
- El fluido entre las láminas

La fuerza que está decelerando (oponiéndose al movimiento)

$$F = \eta A \frac{v}{l}$$

- η es la la viscosidad del fluido
- En este caso, en el que la velocidad v cambia linealmente entre las dos láminas, decimos que el fluido es newtoniano.
- Fluidos newtonianos son el agua, el petróleo y el aceite.
- En el caso general

$$F = \eta A \frac{dv}{dy}$$

dv/dy es la variación de v entre los puntos cercanos separados una distancia *dy*, medida perpendicularmente a la dirección del flujo

La unidad de viscosidad en el Sistema Internacional es

$$\frac{N \cdot m}{ms^{-1}m^2} = Pa \cdot s$$

La unidad de viscosidad en el sistema cgs es el poise.

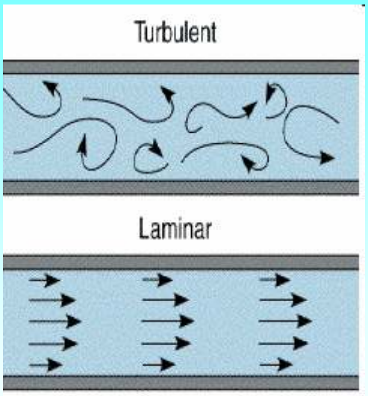
P = 1 dina s/cm^2 = 10^{-1}N s/m^2 = 10^{-1}Pa s = 1 g cm/s^2 s/cm^2 = 1 g/s cm

Fluido	T (°C)	η (10^{-3} Pa s)
Agua	0	1.8
	20	1.0
	100	0.3
Sangre	37	~4
Plasma de sangre	37	~1.5
Alcohol etilo	20	1.2
Aceite de motor	30	200*
Glicerina	20	1500
Aire	20	0.018
Hidrógeno	0	0.009
Vapor de agua	100	0.013

* Mucho mayor a temperaturas bajas (importante para los motores)

Régimen laminar y turbulento

- Laminar: Capas del fluido que fluyen paralelamente sin mezclarse



- Turbulento: flujo complejo e irregular caracterizado por regiones con remolinos (caótico)
- El régimen turbulento aparece cuando las velocidades de flujo suficientemente elevadas o cuando las superficies límites producen cambios bruscos de velocidad.

Régimen laminar vs régimen turbulento

Laminar: alta velocidad

Turbulento: baja velocidad

La **transición de flujo laminar a turbulento** depende de:

la velocidad v

la viscosidad η

La densidad del fluido ρ

la geometría del flujo/conducto

Número de Reynolds

- Cuando la velocidad de un fluido excede de cierto valor crítico (dependiendo de las propiedades del fluido y de las propiedades del tubo),el flujo se vuelve turbulento.
- Dentro de una capa muy delgada contigua a las paredes de tubo, llamada capa límite, el flujo es todavía laminar. Su velocidad en la capa límite es nula en las paredes y aumenta uniformemente a través de ella.
- Las propiedades de la capa límite son de máxima importancia para determinar la resistencia a fluir y la transferencia de calor hacia o desde el fluido.
- Fuera de la capa límite, el movimiento es muy irregular, con torbellinos o vórtices, que originan un aumento de la resistencia al movimiento. El flujo es turbulento.
- La experiencia indica que hay una combinación de 4 factores que determina si el flujo es laminar o turbulento. Esa relación es el número de Reynolds, *R*, definido por

$$R = \frac{\rho v D}{\eta} = \frac{inercia}{fricción}$$

- ρ es la densidad del fluido, v su velocidad media, η el coeficiente de viscosidad y *D* el diámetro del tubo.
- El número de Reynolds es adimensional.

- Las experiencias muestran que si *R* < 2000, el flujo es laminar, mientras que si *R* > 3000 el flujo es turbulento. Entre 2000-3000 el flujo es inestable y puede pasar de un régimen a otro.
- Para agua a 20º C en un tubo de 1 cm de diámetro, el flujo será laminar si

$$\frac{\rho v D}{\eta} \leq 2000 \qquad v \leq \frac{2000\eta}{\rho D} = 2000\frac{0.01 din \cdot s \cdot cm^{-2}}{1gr \cdot cm^{-3} 1cm} = 20 cm/s$$

- Dos sistemas son equivalentes si el número de Reynolds es el mismo para ambos.
- *D* puede ser cualquier dimensión característica del sistema, como la envergadura.
- El flujo de un fluido de densidad *ρ* y viscosidad *η* dadas, en un modelo a escala 0.5, es dinámicamente semejante al que tiene lugar alrededor de un objeto de tamaño natural si su velocidad *v* es el doble.

Ley de Hagen-Poiseuille

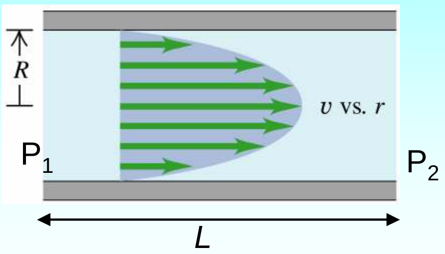
- Proporciona el caudal en una tubería con régimen laminar de un fluido con viscosidad
- Un fluido ideal (sin viscosidad), fluiría por un tubo sin necesidad de una fuerza
- En realidad no hay fluidos ideales. La ley de Bernoulli es una válida sólo cuando la viscosidad es muy pequeña
- Fluido real: hace falta una diferencia de presión
- Agua o aceite en un tubo
- Sangre en el sistema circulatorio del organismo

  El flujo varia con el radio, y depende de

  - La diferencia de presión
  – Las dimensiones del tubo
  – La viscosidad

Ley de Hagen-Pouiselle

- La velocidad de un fluido viscoso que circula por un tubo no es la misma en todos los puntos de la sección transversal.
- La capa más externa se adhiere a las paredes del tubo, y su velocidad es nula. Las paredes ejercen sobre esta capa un arrastre hacia atrás, que a su vez tira hacia atrás de la capa que le sigue, y así sucesivamente
- Siempre que el mov. no sea demasiado rápido, el flujo es laminar, con una velocidad que es máxima en el centro del tubo y disminuye hasta anularse en las paredes.



• El gasto o volumen total del flujo por unidad de tiempo Q viene dado por (ley de Hagen-Pouiselle)

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{8}\frac{R^4}{\eta}\frac{P_1 - P_2}{L}$$

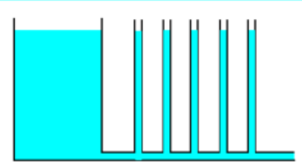
- Se tiene que

$$Q = \frac{dV}{dt} = \frac{d(A\Delta x)}{dt} = Av$$

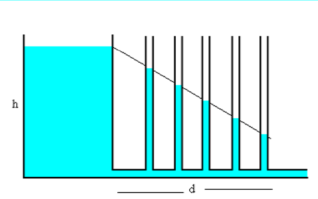
donde v es la velocidad media en la sección tranversal del tubo

Pérdida de Carga

- La existencia de la viscosidad implica una pérdida de energía,
- la ecuación de Bernoulli debe ser modificada para tener en cuenta esta pérdida de energía.
- La ecuación de continuidad sigue siendo válida, esto es, las velocidades medias del fluido en dos secciones del mismo diámetro deben ser iguales, forzosamente resultará que la presión del fluido tiene que disminuir a lo largo de la tubería horizontal.



a) Viscosidad despreciable



b) Con viscosidad

- La ecuación de Bernoulli queda como

$$\left(\frac{P_1}{\rho}+\frac{v_1^2}{2}+gy_1\right)-\left(\frac{P_2}{\rho}+\frac{v_2^2}{2}+gy_2\right)=H_L$$

H_L = pérdida de carga.

v_1 , v_2 = velocidades medias en las secciones correspondientes del tubo