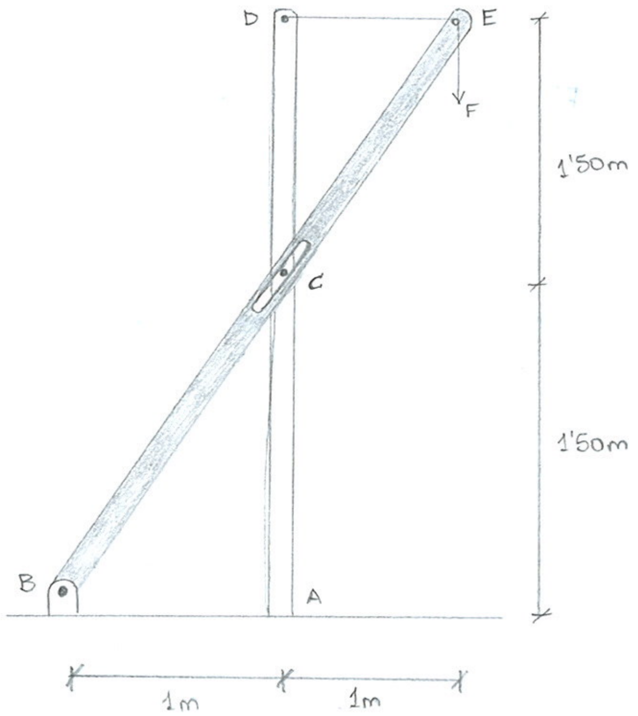
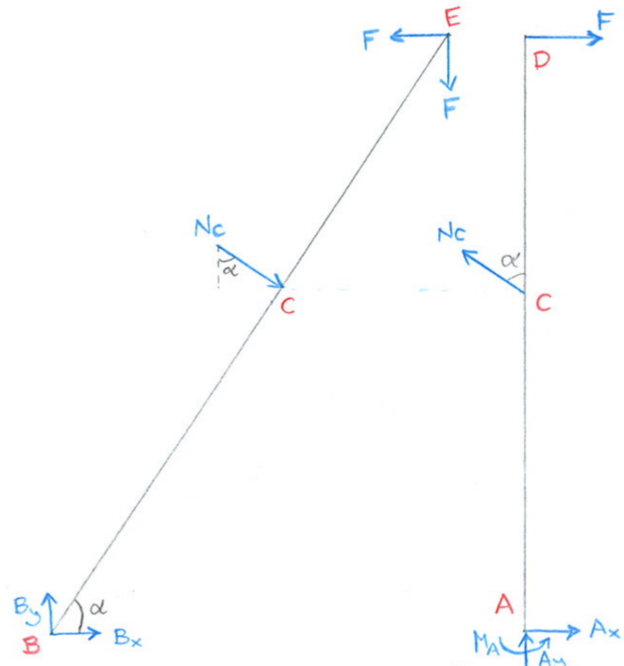
PROBLEMA 2.1.





BARRA BE   BARRA AD

EQUILIBRIO DE LA BARRA "BE":

[x] $B_x + N_c \operatorname{sen}\alpha - F = 0$ (1)

[y] $B_y - N_c \cos\alpha - F = 0$ (2)

[M^B] $-N_c \cdot d - 2F + 3F = 0 \; ; \quad N_c = \frac{F}{d}$ (3)

EQUILIBRIO DE LA BARRA "AD":

[x] $A_x - N_c \operatorname{sen}\alpha + F = 0$ (4)

[y] $A_y + N_c \cos\alpha = 0$ (5)

[M^A] $M^A + N_c \operatorname{sen}\alpha \cdot 1'5 - F \cdot 3 = 0$ (6)

Sabemos $M^A = 450 N\cdot m$, por lo que a partir de las ecuaciones (3) y (6) podemos obtener el valor de la fuerza F y la reacción N_c.

$$d = \sqrt{1^2 + 1'5^2} = 1'80278 \text{ m}$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{1'50}{d} = 0'83205$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{d} = 0'5547$$

De (3): $N_c = \dfrac{F}{d}$

Sustituimos (3) en (6):

$450 + N_c \cdot \dfrac{1'5}{d} \cdot 1'5 - 3F = 0$; $\qquad 450 + \cancel{N}F\,\dfrac{1'5^2}{d^2} - 3F = 0$; $\boxed{F = 195\,N}$

$N_c = \dfrac{F}{d}$; $\boxed{N_c = 108'167\,N}$

Las reacciones en A y B las calculamos a partir de las ecuaciones (1), (2), (4) y (5)

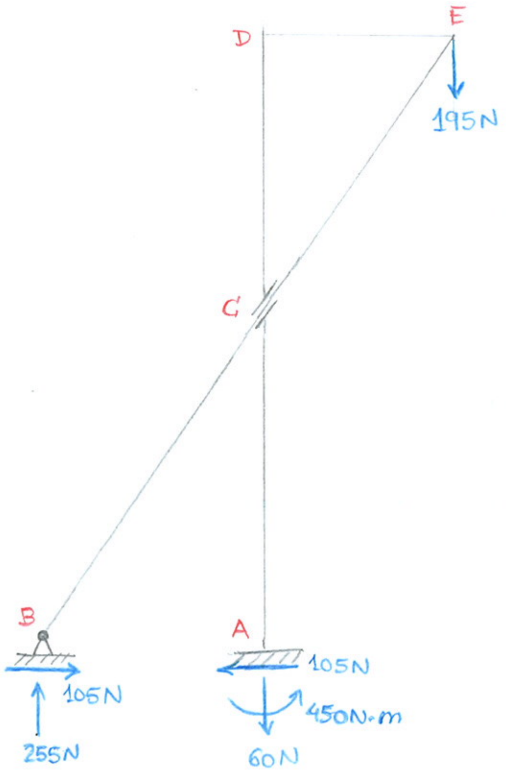
De (1): $B_x = F - N_c \,\text{sen}\,\alpha$; $\boxed{B_x = 105\,N}$

De (2): $B_y = F + N_c \cos\alpha$ $\boxed{B_y = 255\,N}$

De (4): $A_x = -F + N_c \,\text{sen}\,\alpha$ $\boxed{A_x = -105\,N}$

De (5): $A_y = -N_c \cos\alpha$ $\boxed{A_y = -60\,N}$

Podemos comprobar los resultados estableciendo las ecuaciones de equilibrio del conjunto:



$\Sigma F_x = 0$

$105 - 105 = 0$

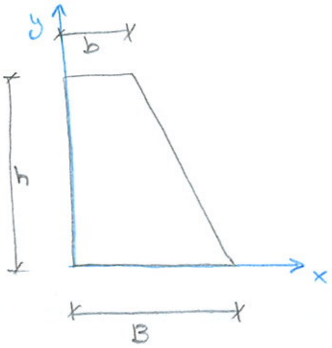
$\Sigma F_y = 0$

$255 - 60 - 195 = 0$

$\Sigma M^B = 0$

$-60 \cdot 1 - 195 \cdot 2 + 450 = 0$

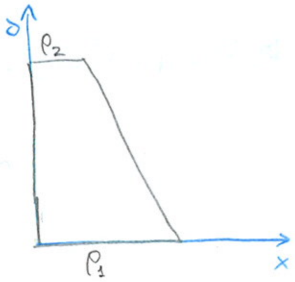
PROBLEMA 2.2.



CENTRO DE MASAS: $\vec{r}_G = \dfrac{\int_m \vec{r}\, dm}{\int_m dm}$

$$x_G = \frac{\int_m x\, dm}{\int_m dm} \qquad y_G = \frac{\int_m y\, dm}{\int_m dm}$$

DENSIDAD (Es constante en dirección x y variable en dirección y)



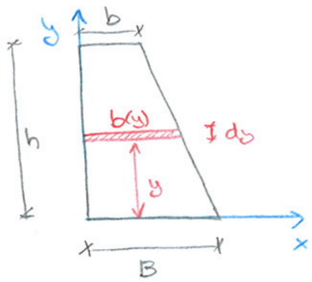
$$\rho(y) = a_1 y + a_2$$

$$\rho(0) = \rho_1 \qquad a_2 = \rho_1$$

$$\rho(h) = \rho_2 \qquad a_1 h + \rho_1 = \rho_2 \;; \quad a_1 = \frac{\rho_2 - \rho_1}{h}$$

$$\rho(y) = \frac{\rho_2 - \rho_1}{h} y + \rho_1$$

MASA: $M = \int_m dm$



$$dm = \rho(y)\, dS = \rho(y)\, b(y)\, dy$$

$$b(y) = a_1 y + a_2$$

$$b(0) = B \qquad a_2 = B$$

$$b(h) = b \qquad a_1 h + B = b \;; \quad a_1 = \frac{b - B}{h}$$

$$b(y) = \frac{b-B}{h} y + B$$

$$M = \int_m dm = \int_{y=0}^{h} \rho(y)\, b(y)\, dy = \int_0^h \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{h} y + \rho_1\right)\left(\frac{b-B}{h} y + B\right) dy$$

$$M = \frac{h}{6}\left[B(2\rho_1 + \rho_2) + b(\rho_1 + 2\rho_2)\right]$$

Empleando el mismo elemento diferencial podemos calcular y_G:

$$y_G = \frac{\int_m y\, dm}{\int_m dm}$$

$$\int_m y\, dm = \int_{y=0}^{h} y\, \rho(y)\, b(y)\, dy = \int_0^h y \left(\frac{\rho_2 - \rho_1}{h} y + \rho_1\right)\left(\frac{b-B}{h} y + B\right) dy$$

$$\int_m y\, dm = \frac{h^2}{2}\left[B(\rho_1 + \rho_2) + b(\rho_1 + 3\rho_2)\right]$$

$$y_G = \frac{(h^2/2)\left[B(\rho_1+\rho_2)+b(\rho_1+3\rho_2)\right]}{(h/6)\left[B(2\rho_1+\rho_2)+b(\rho_1+2\rho_2)\right]}$$

$$\boxed{y_G = \frac{h}{2}\ \frac{B(\rho_1+\rho_2)+b(\rho_1+3\rho_2)}{B(2\rho_1+\rho_2)+b(\rho_1+2\rho_2)}}$$

Podemos escribir la coordenada x del centro de masas del elemento diferencial en función de la variable y: $x(y) = \frac{b(y)}{2}$

$$\int_m x\,dm = \int_{y=0}^{h} x(y)\,\rho(y)\,b(y)\,dy = \int_0^h \frac{1}{2}\left(\frac{\rho_2-\rho_1}{h}y+\rho_1\right)\left(\frac{b-B}{h}y+B\right)^2 dy =$$

$$= \frac{h}{24}\left[2bB(\rho_1+\rho_2)+B^2(3\rho_1+\rho_2)+b^2(\rho_1+3\rho_2)\right]$$

$$x_G = \frac{(h/24)\left[2bB(\rho_1+\rho_2)+B^2(3\rho_1+\rho_2)+b^2(\rho_1+3\rho_2)\right]}{(h/6)\left[B(2\rho_1+\rho_2)+b(\rho_1+2\rho_2)\right]}$$

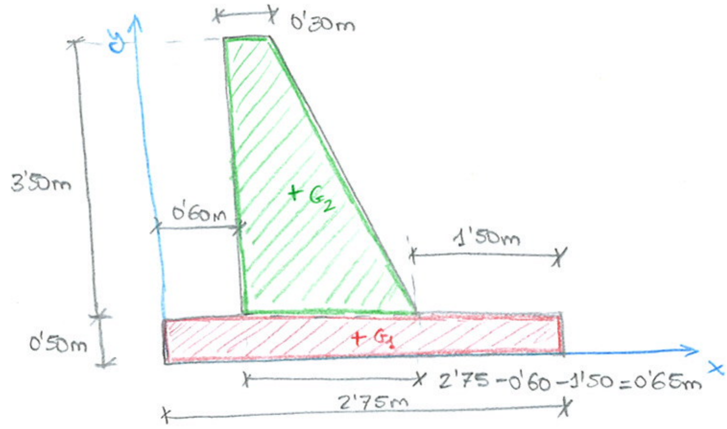
$$\boxed{x_G = \frac{1}{4}\ \frac{2bB(\rho_1+\rho_2)+B^2(3\rho_1+\rho_2)+b^2(\rho_1+3\rho_2)}{B(2\rho_1+\rho_2)+b(\rho_1+2\rho_2)}}$$

Si el valor de la densidad es constante e igual a $\rho=\rho_1=\rho_2$ tenemos:

$$x_G = \frac{1}{3}\left(B+\frac{b^2}{b+B}\right) \qquad y_G = \frac{h}{3}\left(\frac{2b+B}{b+B}\right)$$

$$M = \rho\frac{(b+B)h}{2}$$

Calculamos el centro de masas del muro; respecto a los ejes representados:



Centro de masas del trapecio G_2:

$$x_{G_2} = 0'60 + \frac{1}{3}\left(0'65 + \frac{0'30^2}{0'30+0'65}\right) = 0'848246\,m$$

$$y_{G_2} = 0'50 + \frac{3'50}{3}\left(\frac{2\cdot 0'3 + 0'65}{0'3+0'65}\right) = 2'03509\,m$$

$$m_2 = \rho\,\frac{(0'3+0'65)\cdot 3'50}{2} = 1'6625\,\rho$$

Centro de masas del rectángulo G_1:

$$x_{G_1} = \frac{2'75}{2} = 1'375\,m$$

$$y_{G_1} = \frac{0'50}{2} = 0'25\,m$$

$$m_1 = \rho\cdot 2'75\cdot 0'50 = 1'375\,\rho$$

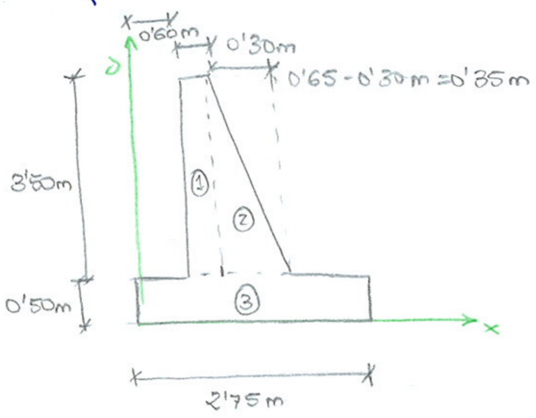
Centro de masas del muro:

$$M = m_1 + m_2 = 3'0375\,\rho$$

$$x_G = \frac{0'848246\cdot 1'6625\rho + 1'375\cdot 1'375\rho}{3'0375\rho} = 1'08669\,m$$

$$y_G = \frac{2'03509\cdot 1'6625\rho + 0'25\cdot 1'375\rho}{3'0375\rho} = 1'22702\,m$$

Compruebo que los resultados son válidos:



	$S_i\,(m^2)$	$x_{G_i}\,(m)$	$x_{G_i} \cdot S_i$	$y_{G_i}\,(m)$	$y_{G_i} \cdot S_i$
1	$0'30 \times 3'50$ $1'05$	$0'6 + 0'3/2$ $0'75$	$0'7875$	$0'5 + 3'50/2$ $2'25$	$2'3625$
2	$\frac{1}{2} \cdot 0'35 \cdot 3'50$ $0'6125$	$0'6 + 0'3 + 0'35/3$ $1'01667$	$0'6227$	$0'5 + 3'50/3$ $1'66667$	$1'02083$
3	$0'5 \times 2'75$ $1'375$	$2'75/2$ $1'375$	$1'8906$	$0'5/2$ $0'25$	$0'34375$
	$3'0375$		$3'30083$		$3'72708$

$$x_G = \frac{3'30083}{3'0375} = 1'08669\ m$$

$$y_G = \frac{3'72708}{3'0375} = 1'22702\ m$$