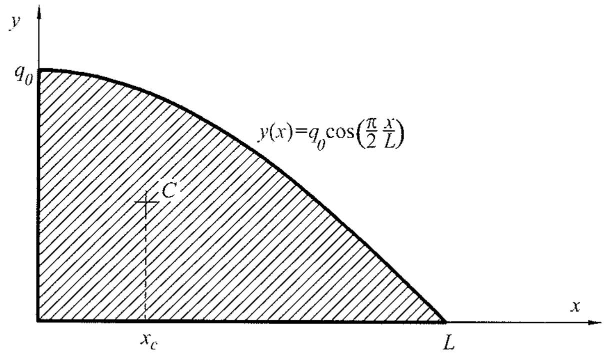
PRIMER PARCIAL	**MECÁNICA PARA INGENIEROS**		*25 NOV. 2011*
EJERCICIO 2	**GRUPO:**	**Tiempo:**	**50 min.**
APELLIDOS:		FIRMA:	
NOMBRE:		D.N.I.:	

Esta parte puntúa con 1/3 de la nota del parcial.

▷ **Ejercicio 1** *(3 PUNTOS)*

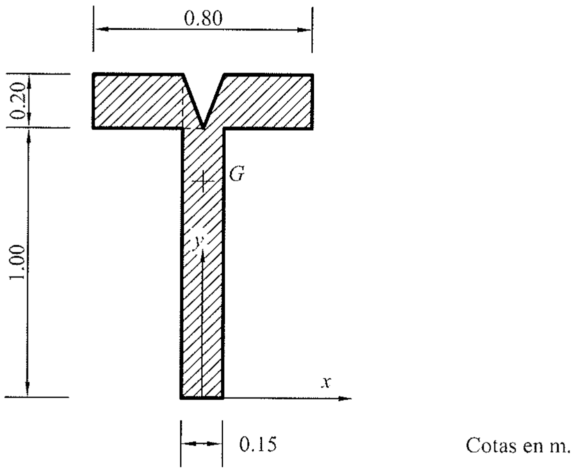
Calcular la posición horizontal (x_c) del centroide del área representada.



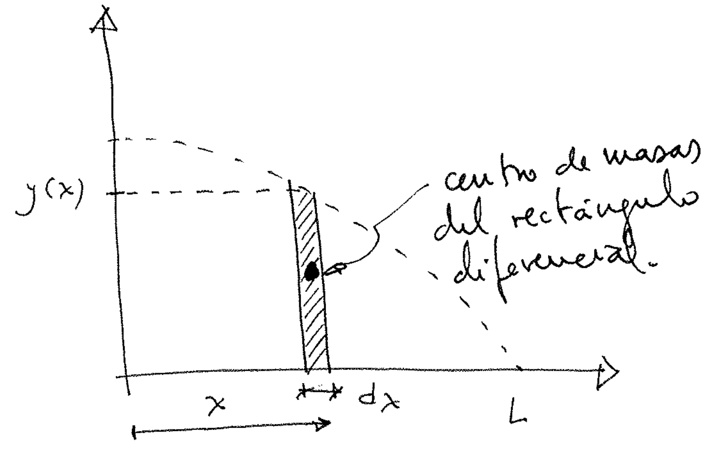
▷ **Ejercicio 2** *(7 PUNTOS)*

A continuación se representa una placa de densidad uniforme y peso total 250 kg. En el mismo croquis se han representado los ejes x e y con origen en el centro de la base de la placa. Sabiendo que la placa es simétrica respecto al eje y, se pide:

1. Posición del centro de gravedad (x_G, y_G). *(2 PUNTOS)*
2. Momentos de inercia: I_x, I_y. *(4 PUNTOS)*
3. Producto de inercia respecto a los ejes x e y. *(1 PUNTO)*



Ej. 1



$$x_c \cdot A = \int_{x=0}^{L} x \overbrace{y(x)\,dx}^{da}$$

Siendo $A = \int_{x=0}^{L} y(x)\,dx$

$$A = \int_{x=0}^{L} q_0 \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)dx = q_0 \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\Bigg]_0^L = \frac{2L q_0}{\pi}$$

$$\int_{x=0}^{L} x \cdot y(x)\,dx = \left|\begin{array}{l} \text{F. Int. por partes:} \\ u = x \Rightarrow du = dx \\ dv = y(x)\,dx \Rightarrow v = q_0 \frac{2L}{\pi}\sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right) \\ \int_a^b u\,dv = uv\Big]_a^b - \int_a^b v\,du \end{array}\right| =$$

$$= x\, q_0 \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\Bigg]_0^L - \int_0^L q_0 \frac{2L}{\pi} \sin\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)dx =$$

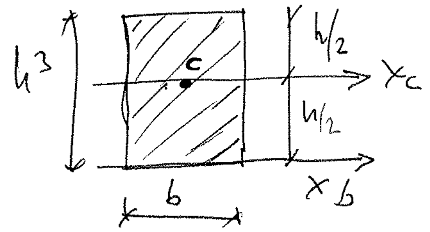
$$= \frac{2L^2 q_0}{\pi} + \left[q_0 \frac{4L^2}{\pi^2} \cos\left(\frac{\pi}{2}\frac{x}{L}\right)\right]_0^L = \frac{2L^2 q_0}{\pi} - \frac{4L^2}{\pi^2} q_0 =$$

$$= \frac{2L^2 q_0}{\pi^2}\left(\pi - 2\right)$$

Por lo que

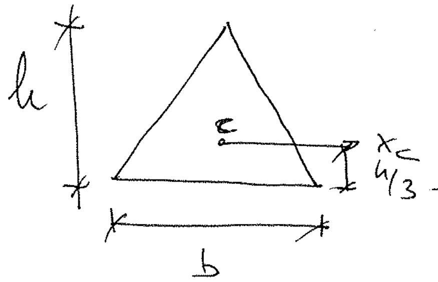
$$x_c = \frac{\pi - 2}{\pi} L$$

Ej. 2. Usaremos las siguientes fórmulas conocidas



$$I_{x_c} = \frac{1}{12} b h^3$$

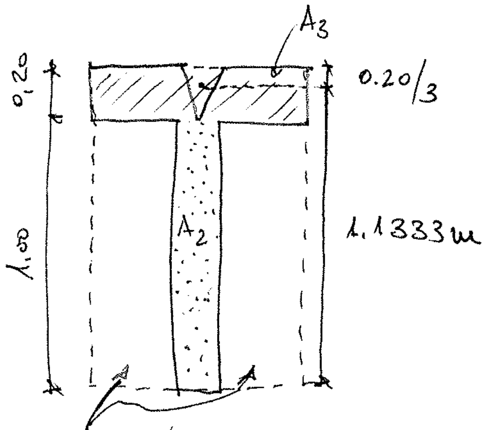
$$I_{x_b} = \frac{1}{3} b h^3$$



$$I_{x_c} = \frac{1}{36} b h^3$$

$$I_{x_b} = \frac{1}{12} b h^3$$

Utilizaremos la adición de áreas.



$A_4 =$ (0,15; 0,20) ; $A_1 = 0{,}80 \times 1{,}20$ (rectángulo exterior) $= 0.96 m^2$

$= \frac{1}{2} 0{,}15 \cdot 0{,}20 = 0{,}015 m^2$

$A_2 = 0{,}15 \cdot 1{,}00 = 0{,}15 m^2$

$A_3 = 0{,}80 \cdot 0{,}20 = 0{,}16 m^2$

$A_5 = (0{,}80 - 0{,}15) \times 1{,}00 = 0{,}65 m^2$

$$A = A_1 - A_4 - A_5 = 0{,}96 - 0.015 - 0{,}65 = 0{,}295 m^2$$

$\rho = \frac{M}{A} = \frac{250}{0{,}295} = 847{,}46 kg/m^2$, al ser $\rho =$ cte el centro de gravedad coincide con el centroide.

$$A \cdot y_G = A_1 \cdot 0{,}60 - A_5 \cdot 0{,}50 - A_4 \cdot 1{,}1333 \Rightarrow y_G = 0{,}7932 m$$

$\Rightarrow$ $x_G = 0$ por simetría

$y_G = 0{,}7932 m$

$$I_x(A) = I_x(A_1) - I_x(A_5) - I_x(A_4) =$$

$$= \frac{1}{3}\, 0,80 \cdot 1,20^3 - \frac{1}{3}\, 0,65 \cdot 1^3 - \underbrace{\left(\overbrace{\frac{1}{36} \cdot 0,15 \cdot 0,20^3}^{I(A_4)\,CG} + \overbrace{1,1338^2 \cdot 0,015}^{d^2 \cdot A_4} \right)}_{\text{steiner}} =$$

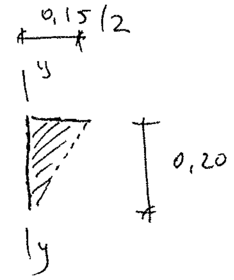
$$= 0,22483\ m^4$$

$$\boxed{I_x(M) = \rho\, I_x(A) = 190,54\ kg \cdot m^2}$$

$$I_y(A) = I_y(A_2) + I_y(A_3) - I_y(A_4) =$$

$$= \frac{1}{12}\, 1 \cdot 0,15^3 + \frac{1}{12}\, 0,2 \cdot 0,80^3 - 1.40625\,\bar{e}5 = 8.8005\,\bar{e}3\ m^4$$

$$I_y(A_4) = 2 \underbrace{\frac{1}{12}\, 0,20 \left(\frac{0,15}{2}\right)^3}_{\text{momento de inercia de este triángulo.}} =$$



$$\boxed{I_y(M) = \rho\, I_y(A) = 7,4581\ kg \cdot m^2}$$

$\boxed{I_{xy}(M) = 0}$ ya que Y es eje de simetría.

Mecanica Primer Parcial.25-11-2011

Nombre (mayusculas):
Grupo: DNI: Firma:

Dado el solido rigido,formado por una sola pieza,tiene peso despreciable,y esta sometido a una fuerza distribuida triangular q , un momento M aplicado en B y una fuerza puntual F . Calcular:

1°) Resultante de la fuerza distribuida triangular y su punto de aplicación.
2°) Reducir el sistema dado (q , M y F) a una fuerza y un momento en A
3°) Eje central de estas tres acciones
4°) Calcular las reacciones en A (articulación) y C (apoyo simple de rodillo)

Utilizar figura 1 para apartados 1° al 3° y figura 2 para apartado 4° .
Datos: L= 3 m. ; h= 6 m. ; q max.= 8 kN/m. (q=0 en B , q= q max. en A)
F= 20 kN ; M = 50 kN.m. (aplicado en B,sentido el dado).
El espesor de la figura es despreciable frente a su longitud.

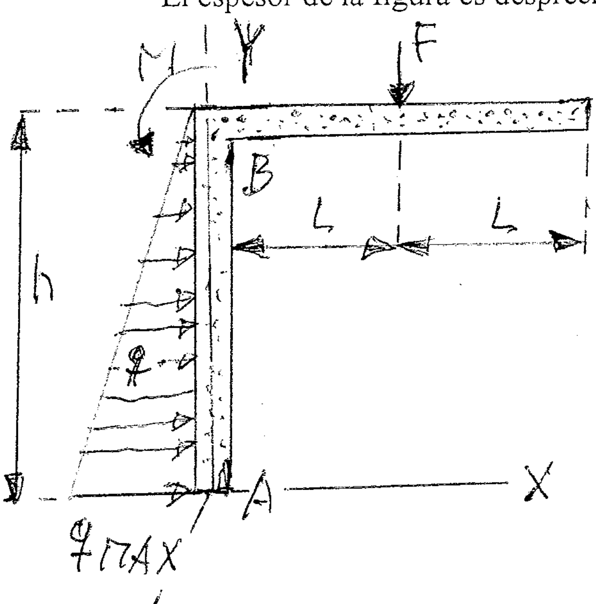


FIGURA 1

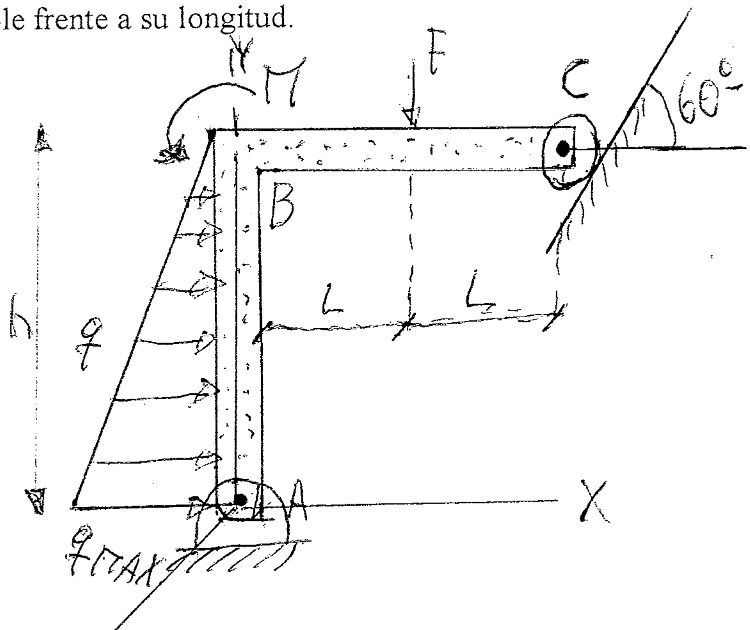
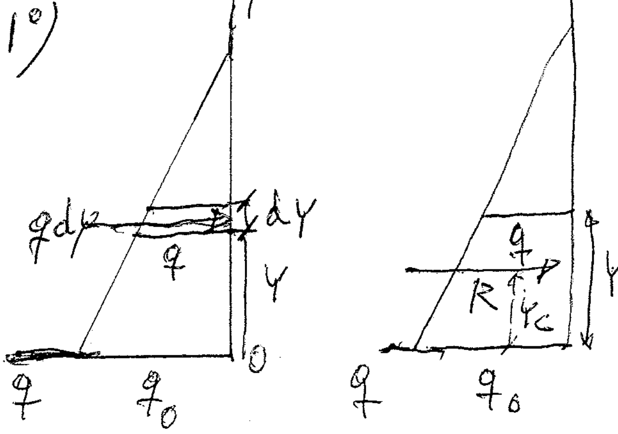


FIGURA 2

$q_{MAX} = q_0$

1°)



$$\frac{q}{q_0} = \frac{h-Y}{h} \; ; \; q = \frac{q_0}{h}(h-Y)$$

$$R = \int q\,dY = \int_0^h \frac{q_0}{h}(h-Y)\,dY =$$

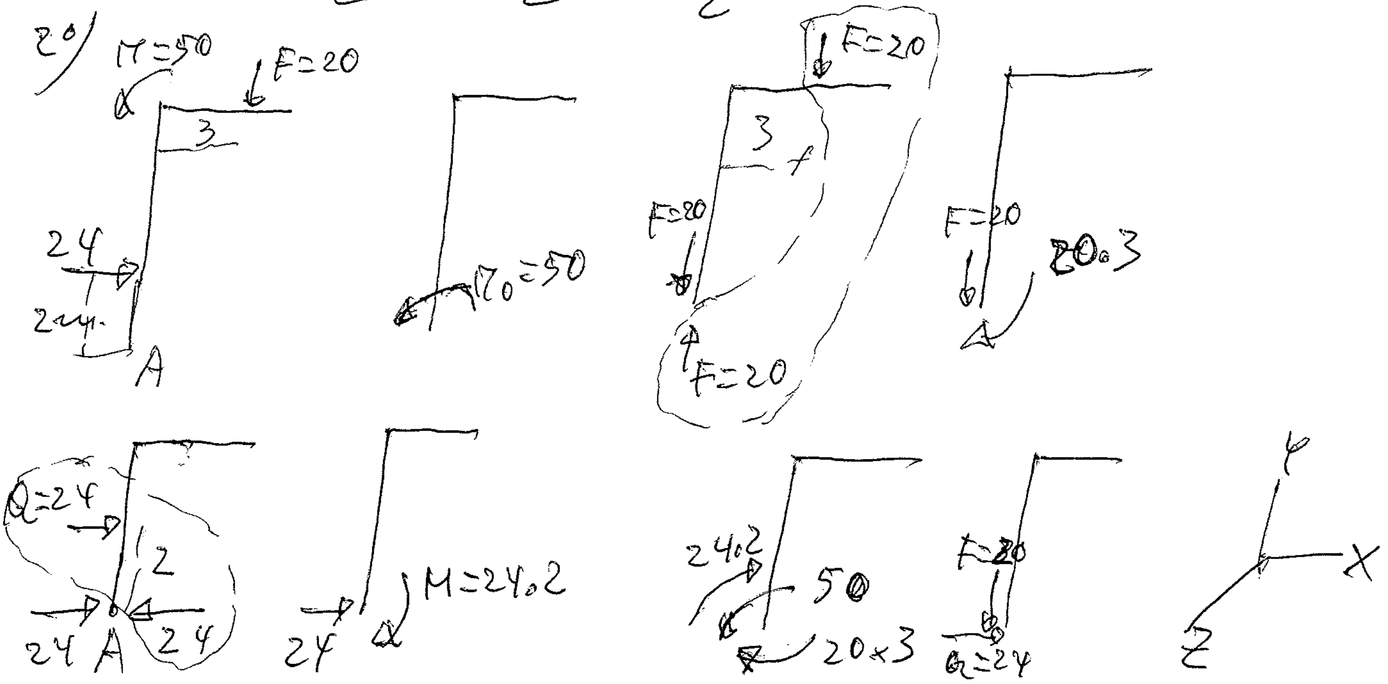
$$= \frac{q_0}{h}\left[hY - \frac{Y^2}{2}\right]_0^h = \frac{q_0 h}{2}$$

$$R \cdot Y_c = \int Y q\,dY = \int Y \frac{q_0}{h}(h-Y)\,dY = \frac{q_0}{h}\left[h\frac{Y^2}{2} - \frac{Y^3}{3}\right]_0^h =$$

$= \frac{q_0}{h}\frac{h^3}{6}$; $Y_C = \dfrac{\frac{q_0 h^2}{6}}{\frac{q_0 h}{2}} = \frac{h}{3}$; $Y_C = \frac{h}{3} = \frac{6}{3} = 2m.$

$R = \frac{q_0 h}{2} = \frac{8 \cdot h}{2} = \frac{8 \cdot 6}{2} = 24 kN.$

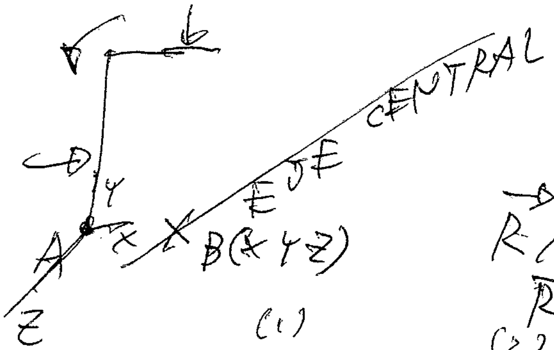
2º)



$\vec{M}_A = 50\vec{k} - 60\vec{k} - 48k = -58\vec{k}$

$\vec{R} = 24\vec{i} - 20\vec{j}$

3º) EJE CENTRAL.



$\vec{M}_B = \vec{M}_A + BA \times \vec{R}$

$\vec{M}_B = -58\vec{k} + \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -x & -y & -z \\ 24 & -20 & 0 \end{vmatrix}$

$\vec{R} \parallel \vec{M}_B$ PARALELOS

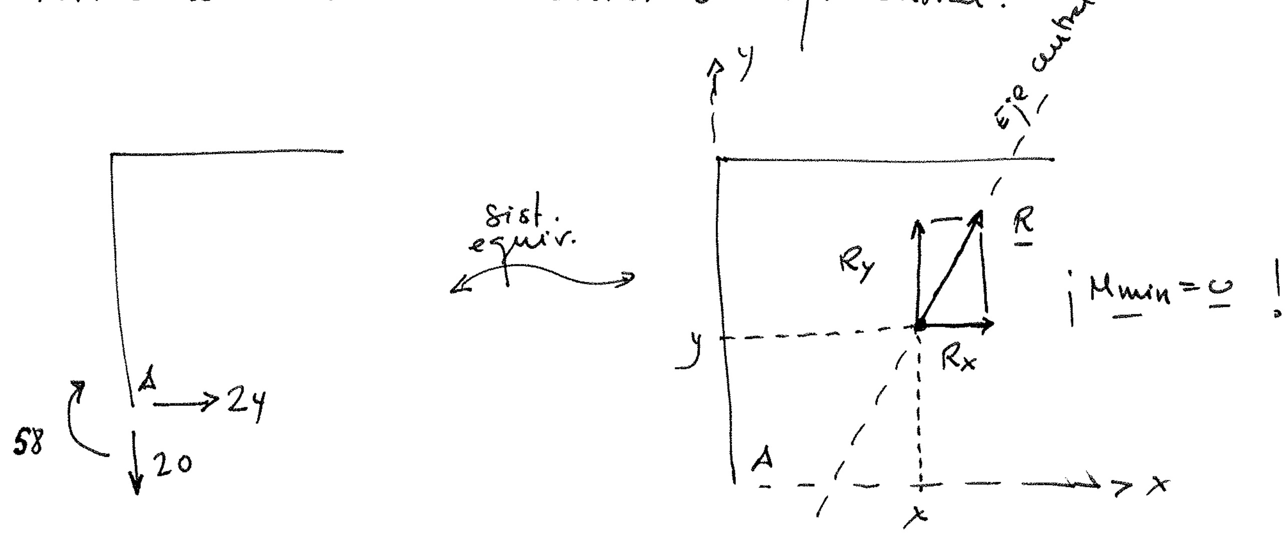
$\vec{R} = 24\vec{i} - 20\vec{j}$

$\underset{(1)}{\frac{20z}{24}} = \underset{(2)}{\frac{-24z}{-20}} = \underset{(3)}{\frac{-58+20x+24y}{0}}$

(1),(2) $-400z = -576z$; $(576-400)z = 0$; $\underline{z=0}$

(1),(3) $-58 + 20x + 24y = 0$ EJE CENTRAL.

Forma alternativa de resolver el eje central.



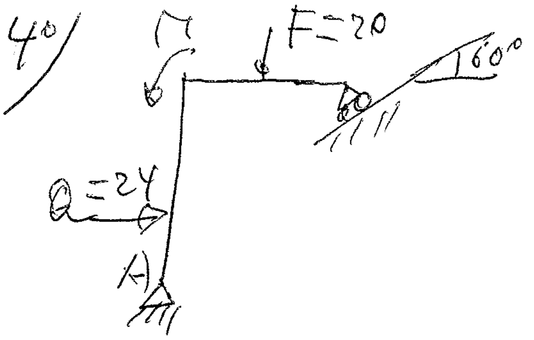
Igualdad de $\Sigma \underline{F}$ ⇒ $R_x = 24$ kN $R_y = -20$ kN

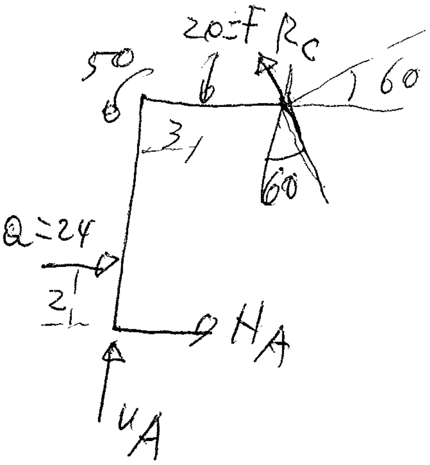
Igualdad de ΣM_A → $-58 = x \cdot R_y - y\, R_x$ →

→ $20x + 24y - 58 = 0$ → $\boxed{10x + 12y - 29 = 0}$

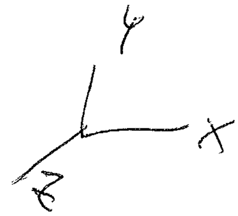
Ec. eje central.

4°)





1/4



$\sum F_x = 0 \quad H_A + 24 - R_c \operatorname{sen} 60 = 0$ (1)

$\sum F_y = 0 \quad V_A - 20 + R_c \cos 60 = 0$ (2)

$\sum M_A = 0 \quad 50 - 20 * 3 - 24 \cdot 2 + R_C \cos 60 \cdot 6 + R_c \operatorname{sen} 60 * 6 = 0$ (3)

3 INCOGNITAS H_A, V_A, R_C. 3 ECUACIONES.

(3) $\quad 50 - 60 - 48 + R_C\left(\frac{6}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot 6\right) = 0$

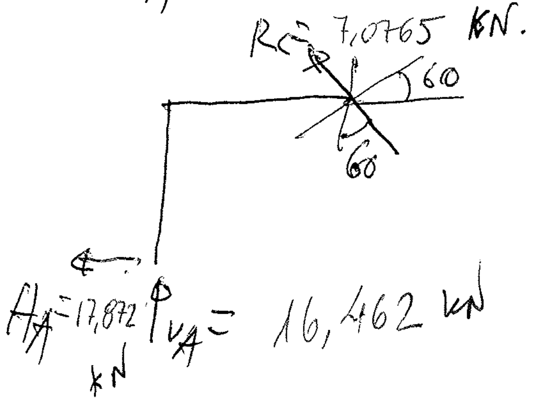
$-58 + R_C(3 + 3\sqrt{3}) = 0$; $R_C = \frac{58}{3(1+\sqrt{3})}$

$R_C = \frac{58}{8{,}1962} = 7{,}0765\,kN$

(1) $\quad H_A = -24 + R_c \cdot \operatorname{sen} 60 = -17{,}872\,kN$.

(2) $\quad V_A = 20 - R_c \cos 60 = 16{,}462\,kN$

$H_A = -17{,}872\,KN$ VA ALREVES PREVISTO.



PRIMER PARCIAL	**MECÁNICA PARA INGENIEROS**	*25 NOV 2011*
TEORÍA	**GRUPO:**	**Tiempo: 1 h.**
APELLIDOS:		FIRMA:
NOMBRE:		DNI:

La Teoría representa 1/3 de la nota total del examen (1/3·10).

▹ **Ejercicio 1 (3,5 ptos)**

Demostrar la ecuación del cambio de momento de un sistema de vectores deslizantes y aplicarla para demostrar la invarianza del *segundo invariante* o *invariante escalar*.

Demostrar que en sistemas de vectores deslizantes coplanarios y en sistemas de vectores paralelos (de resultante no nula), el sistema se puede reducir a una vector equipolente a la resultante cuya recta de aplicación sea el eje central. Realizar croquis explicativos.

▹ **Ejercicio 2 (2,5 ptos)**

Demostrar que el momento de un *par de fuerzas* es independiente del punto desde el cual se tome el momento, es decir, se puede considerar un vector libre. Realizar croquis explicativos.

▹ **Ejercicio 3 (4 ptos)**

Deducir razonadamente la ecuación diferencial de equilibrio de un cable sometido a cargas verticales distribuidas ($y''dx = \frac{dp}{T_0}$). Realizar croquis explicativos.

Nota: las cargas verticales son genéricas, no siendo necesario particularizarlas a cargas uniformes, ni por unidad de longitud sobre la horizontal ni por unidad de longitud del cable.

<u>*Empiece a responder en esta misma hoja*</u>